MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

E. KAMKE TÜBINGEN
E. SCHMIDT BERLIN
F. K. SCHMIDT JENA
I. SCHUR BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON
K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:
W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. KÄHLER E. LANDAU
O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

40. BAND

QA1
188
.40

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1936

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

E. KAMKE TÜBINGEN
E. SCHMIDT BERLIN
F. K. SCHMIDT JENA
I. SCHUR BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:
W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. KÄHLER E. LANDAU
O. PERRON W. THRELFALL H. WEYL

40. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1936

66 52970
QA1
M88
V. 40

Inhaltsverzeichnis

Seite

Aumann, G., Zwei Sätze über Differential- und Differenzenquotient von analytischen Funktionen 202
Bankwitz, C., Über Knoten und Zöpfe mit gleichsinniger Verdrillung 588
Beck, H., Über Ternionen in der Geometrie 509
Berger, K. H., Eine projektive Kennzeichnung der den Geraden äquivalenten Kurvensysteme 41
Berger, K. H., Eine verschärfte projektive Kennzeichnung der den Geraden äquivalenten Kurvensysteme 662
Bödewadt, U. T., Zum Momentenproblem für das Intervall [0,1] 426
Brauer, A., und Brauer, R., Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya 242
Brauer, R., und Brauer, A., Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya 242
Chowla, S., and Sastry, S., Note on Hypothesis K of Hardy and Littlewood . . 348
Chowla, I., Some problems of Waring's type 506
David, E., Topologische Fragen der Differentialgeometrie 61. Über die Bestimmung von Pfaffschen Formen mit vorgegebenen Ableitungsgleichungen 110
Dörge, K., Zu der von R. v. Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. Mitteilung: Allgemeine Wahrscheinlichkeitstheorie . . 161
Doetsch, G., Thetarelationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung 613
Duschek, A., Zur geometrischen Variationsrechnung. 3. Mitteilung: Das Variationsproblem der F_m im Riemannschen R_n und eine Verallgemeinerung des Gauß-Bonnetschen Satzes 279
Erdélyi, A., Über einige bestimmte Integrale, in denen die Whittakerschen $M_{k,m}$-Funktionen auftreten 693
Feller, W., Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung . 521
Funk, P., Über zweidimensionale Finslersche Räume, insbesondere über solche mit geradlinigen Extremalen und positiver konstanter Krümmung 86
Garten, V., Über den Einfluß endlich vieler Änderungen auf das Borelsche Limitierungsverfahren 756
Geppert, H., Die mehrfachen Punkte der Linearscharen auf einer algebraischen Kurve 760
Gericke, H., Zur Arbeit von P. Ganapathi: „A note on the oval" 201
Gericke, H., Über die größte Kugel in einer konvexen Punktmenge 317
Gericke, H., Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises 417
Graf, U., Über einscharig in der linearen Strahlenkongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades 671
Grell, H., Über die Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie in endlichen algebraischen Erweiterungen erster und zweiter Art 503
Grell, H., Verzweigungstheorie in allgemeinen Ordnungen algebraischer Zahlkörper 629
Haack, W., Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe I 560
Haack, W., Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe II. Kurven und Torsen des Komplexes 703
Hantzsche, W., und Wendt, H., Dreidimensionale wirbelgefaserte Räume . . 727
Hardy, G. H., and Littlewood, J. E., An inequality 1
Heffter, L., Kurven- und Stieltjes-Integral 608
Herrmann, H., Beziehungen zwischen den Eigenwerten und Eigenfunktionen verschiedener Eigenwertprobleme 221
Hölder, O., Verallgemeinerung einer Formel von Hacks 463

Seite

Karamata, J., Über einen Konvergenzsatz des Herrn Knopp 421
Krafft, M., Über konvexe Funktionen 469
Kunert, D., Ein neuer Beweis für die Reziprozitätsformel der Gaußschen Summen in beliebigen algebraischen Zahlkörpern 326
Littlewood, J. E., and Hardy, G. H., An inequality 1
Lösch, F., Neue Beweise der Überkonvergenzsätze für Potenzreihen und Dirichletsche Reihen 773
Maruhn, K., Über die Verzweigung der Lösung einer Integro-Differentialgleichung aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten . . . 56
Maruhn, K., Ergänzung zu meiner Arbeit: Über die Verzweigung der Lösung einer Integro-Differentialgleichung aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten 312
Mayer, W., und Thomas, T. Y., Vollständig integrable Systeme totaler Differentialgleichungen 658
Petterson, E. L., Irreduzibilitätskriterien als Folgerung einiger Beziehungen zwischen den Faktorzerlegungen eines algebraischen Polynoms und seines konstanten Gliedes 194
Pflanz, E., Über p-fach symmetrische schlichte Funktionen 72
Pi Calleja, P., Über die Konvergenzbedingungen der komplexen Form des Fourierschen Integrals 349
Prasad, B. N., On the summability $(C, 1)$ of Fourier series 496
Rádl, F., Über das verallgemeinerte gemeinsame Maß von zwei Differentialpolynomen 375
Rao, K. S., On sums of like powers 321
Rao, K. S., Some Easier Waring's Problems 477
Rau, H., Über eine asymptotische Darstellung der Jacobischen Polynome durch Besselsche Funktionen 683
Reichardt, H., Der Primdivisorsatz für algebraische Funktionenkörper über einem endlichen Konstantenkörper 713
Reidemeister, K., Die Fundamentalgruppe von Komplexen 406
Ridder, J., Über Perron-Stieltjessche und Denjoy-Stieltjessche Integrationen . . 127
Sastry, S., and Chowla, S., Note on Hypothesis K of Hardy and Littlewood . . 348
Schmid, H. L., Über das Reziprozitätsgesetz in relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper 94
Schmidt, H., Über die Stammfunktion einer stetigen Funktion 70
Schmidt, H., Über die Reihendarstellung implizit gegebener Funktionen von endlich oder unendlich vielen Veränderlichen 266
Siddiqi, M. R., On the theory of non-linear differential Equations of Parabolic type. II. 484
Süss, W., Durchmesser und Umkugel bei mehrdimensionalen Punktmengen . . . 315
Thomas, T. Y., und Mayer, W., Vollständig integrable Systeme totaler Differentialgleichungen 658
Tricomi, F., Über Doetschs Umkehrformel der Gauß-Transformation und eine neue Umkehrung der Laplace-Transformation 720
Ulm, H., Zur Theorie der nicht-abzählbaren primären abelschen Gruppen . . . 205
Varga, O., Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum 387
Walfisz, A., Zur additiven Zahlentheorie. II. 592
Weise, K. H., Autoparallele Mannigfaltigkeiten im affin zusammenhängenden Raum 208
Wendt, H., und Hantzsche, W., Dreidimensionale wirbelgefaserte Räume . . 727
Wielandt, H., Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen . . . 582
Young, R. C., The asymptotic behaviour of $F(z) = \int_{a-0}^{b+0} e^{zt}\, d\, g\,(t)$ 292

An inequality.

By

G. H. Hardy and J. E. Littlewood.

1.

Introduction.

1.1. In this paper we give the complete proof of a theorem which we stated seven or eight years ago [1]). The theorem embodies the solution of the following problem.

Suppose that

$$a_n \geqq 0, \quad b_n \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.1.1}$$

and that

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0. \tag{1.1.2}$$

It is convenient to take

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \tag{1.1.3}$$

and so

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0. \tag{1.1.4}$$

Suppose further that α and β are real and

$$\gamma = \alpha + \beta - 1; \tag{1.1.5}$$

that

$$q \geqq p > 0, \quad r > 0; \tag{1.1.6}$$

and that A, B, C are defined by

$$A^p = \sum_1^\infty n^{-1} (n^\alpha a_n)^p, \quad B^q = \sum_1^\infty n^{-1} (n^\beta b_n)^q, \quad C^r = \sum_1^\infty n^{-1} (n^\gamma c_n)^r. \tag{1.1.7}$$

In what circumstances is it true that

$$C \leqq K A B, \tag{1.1.8: I}$$

where

$$K = K(p, q, r, \alpha, \beta), \tag{1.1.9}$$

for all a_n *and* b_n?

We shall generally refer to this inequality as **(I)**.

1.2. The following explanations are required.

[1]) Hardy and Littlewood [1], Theorem 25. The notation there is a little different, and there is an error in the statement of the results in the special case $p = 1$: see f. n. [12]), p. 31 below.

(i) The assumption (1.1.3) involves no real loss of generality, but is convenient for printing because it enables us to use powers of n in (1.1.7) instead of the corresponding powers of $n+1$.

(ii) Equation (1.1.5) assigns the 'right' value to γ, and is essential if we are to obtain significant results. The first two series (1.1.7), are 'on the boundary of convergence' when

$$a_n = n^{-\alpha}, \quad b_n = n^{-\beta} \qquad (n \geqq 1), \tag{1.2.1}$$

and the third when

$$c_n = n^{-\gamma} \qquad (n \geqq 1). \tag{1.2.2}$$

If $\alpha < 1$, $\beta < 1$, and a_n and b_n are defined by (1.2.1), then c_n behaves, for large n, like a multiple of

$$n^{1-\alpha-\beta},$$

and (1.1.5) is necessary to ensure that all three series shall be on the boundary of convergence together.

(iii) Since we may interchange a_n and b_n, there is no loss of generality in (1.1.6).

(iv) We allow p, q, r to have the value ∞. If $p = \infty$, the first equation (1.1.7) is to be replaced by

$$A = \operatorname{Max}(n^{\alpha} a_n),$$

and a similar convention applies to infinite values of q and r. Thus, if $p = q = r = \infty$, **(I)** becomes

$$\operatorname{Max}(n^{\alpha+\beta-1} c_n) \leqq K \operatorname{Max}(n^{\alpha} a_n) \operatorname{Max}(n^{\beta} b_n),$$

where $K = K(\alpha, \beta)$. This is in point of fact true when $\alpha < 1$, $\beta < 1$, and false otherwise.

1.3. We have to distinguish a variety of cases defined by relations of magnitude between p, q, r. We call a case *ordinary* if

$$p \neq 1, \quad q \neq 1, \quad p \neq \infty, \quad q \neq \infty, \quad r \neq \infty, \tag{1.3.1}$$

and otherwise *exceptional*. An exceptional case will be called *normal* if the result and proof in the exceptional case are obtained from those in an ordinary case by mere insertion of the exceptional values of p, q or r and (if there are infinite values) interpretation of A, B, or C in accordance with § 1.2 (iv). Otherwise we shall call the case *abnormal*.

We write

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad \alpha_0 = 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}, \quad \beta_0 = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}, \tag{1.3.2}$$

with the convention that

$$\frac{1}{\infty} = 0. \tag{1.3.3}$$

Thus $\pi = \infty$ if $p = q = \infty$. In any case

$$\pi \leqq p \leqq q. \tag{1.3.4}$$

We say that a set of conditions is necessary and sufficient for **(I)** if, when they are satisfied, **(I)** is true for all a_n, b_n, and, when they are not satisfied, it may be falsified by an appropriate choice of a_n and b_n.

If $p > 1$, we write p' for the number 'conjugate' to p, defined by

$$p' = \frac{p}{p-1}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.3.5}$$

We use the same notation for other letters.

2.

Statement of the main theorem.

2.1. In our statement of our general theorem we distinguish ordinary and exceptional cases.

Theorem 1. (i) (*Ordinary and exceptional cases.*) *It is necessary for the truth of* **(I)** *that*

$$p \geqq 1. \tag{2.1.1}$$

(ii) (*Ordinary cases.*) *It is necessary and sufficient for the truth of* **(I)**, *in an ordinary case, that* p, q, r, α, β *should satisfy* (2.1.1) (*so that* $p > 1$) *and one or other of*

$$\pi \leqq r \leqq p, \qquad \alpha < 1, \quad \beta < 1; \tag{2.1.2}$$

$$p < r \leqq q, \qquad \alpha < 1, \quad \beta \leqq \beta_0; \tag{2.1.3}$$

$$\pi \geqq 1, \quad q < r, \qquad \alpha \leqq \alpha_0, \quad \beta \leqq \beta_0; \tag{2.1.4}$$

$$\pi < 1, \quad q < r \leqq \frac{\pi}{1-\pi}, \qquad \alpha \leqq \alpha_0, \quad \beta \leqq \beta_0. \tag{2.1.5}$$

(iii) (*Exceptional cases*). *The only case in which* (I) *is true when* $p = \infty$ *is the case*

$$p = q = r = \pi = \infty, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1.$$

This is a normal case of (2.1.2).

There are four exceptional cases which are abnormal, in that the conditions appropriate to them cannot be derived by mere substitution of the exceptional values into the conditions of an ordinary case.

(iii a) *If* $p > 1$, $\pi > 1$, $r = \infty$, *then* $\alpha \leqq \alpha_0$, $\beta \leqq \beta_0$ *in* (2.1.4) *must be replaced by* $\alpha < \alpha_0$, $\beta < \beta_0$.

(iii b) *If* $p = 1$, $1 < r < q$, *then* $\alpha < 1$, $\beta \leqq \beta_0$ *in* (2.1.3) *must be replaced by* $\alpha < 1$, $\beta < \beta_0$.

(iii c) *If* $p = q = r = 1$, *then* $\alpha < 1$, $\beta < 1$ *in* (2.1.2) *must be replaced by* $\alpha \leqq 1$, $\beta \leqq 1$.

(iii d) *If* $p = 1 < r = q$, *then* $\alpha < 1$, $\beta \leqq \beta_0$ *in* (2.1.3) *must be replaced by* $\alpha \leqq 1$, $\beta \leqq \beta_0$.

Otherwise all exceptional cases are normal.

It should be observed that, in (iii a), (iii b) and (iii d), the case $q = \infty$ is included; and that (iii c) is really a boundary case of (iii d) which happens to fall under (2. 1. 2) instead of under (2. 1. 3).

3.

General remarks on the theorem and its proof.

3. 1. (i) The classification of cases in our statement of the theorem is naturally based upon the results. Thus the cases $\pi \geqq 1$ and $\pi < 1$ are distinguished in (2. 1. 4) and (2. 1. 5), but not in (2. 1. 2) or (2. 1. 3), where the results are the same. The proofs, however, are often affected by distinctions which do not appear in the result. Thus, for example, the proofs that

$$p > 1, \quad r = \pi, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1$$

is a sufficient set of conditions are quite different in the two cases referred to [2]). We shall therefore find it necessary, in proving the theorem, to use a rather different classification based upon the methods employed.

(ii) We state all our proofs primarily for ordinary cases. The proofs can generally be adapted to the exceptional cases normally (*i. e.* as explained in § 1. 3), and when this is so we shall merely mention the fact and leave the adaptation to the reader. We shall discuss the details of exceptional cases only when there is some genuine abnormality either in the result or in the proof.

(iii) The reader who wishes to be convinced of the interest of the results may be referred to § 9, where we enumerate a large number of special cases, which include many standard inequalities, and others of more novelty, whose importance in analysis is unquestionable. But in our own opinion the interest of the theorem depends primarily on the great variety of the arguments which a complete proof demands. Those used in §§ 6. 2, 6. 4, 6. 6, and 7. 5—7. 9, for example, are all quite different, and represent the solution of so many distinct problems.

(iv) Our c_n is the 'Cauchy Faltung' of two sequences a_n, b_n; and Theorem 1 suggests a number of further problems. We might suppose, for example, that

$$c_n = \sum_{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\varkappa = n} a_{\mu_1} b_{\mu_2} \ldots k_{\mu_\varkappa}$$

is the Cauchy Faltung of $\varkappa$ sequences. Or again we might suppose that

$$c_n = \sum_{\mu + \nu = n} a_\mu b_\nu$$

---

[2]) See §§ 6. 2—6. 3 and § 6. 4 respectively.

is the 'Fourier Faltung' of two sequences in which n ranges from $-\infty$ to ∞. Some results in these directions are known [3]), but we have not attempted any systematic investigation.

(v) There are a number of special cases, which we refer to in § 9, in which it is possible to determine the 'best possible' value of K and to pick out the cases of equality in **(I)**. Other special cases show that these problems are usually difficult, and we ignore them here.

4.

Two general principles.

4.1. We shall make repeated use of the principles expressed in the two following lemmas.

Lemma 1. *If* $r_1 < r < r_2$, *and* **(I)** *is true for* p, q, r_1, α, β *and for* p, q, r_2, α, β, *then it is true for* p, q, r, α, β.

Let

$$r = (1-\theta)\, r_1 + \theta\, r_2,$$

where $0 < \theta < 1$. Then, by Hölder's inequality,

$$\begin{aligned}\Sigma\, n^{-1}(n^{\gamma} c_n)^r &= \Sigma\,(n^{-1}(n^{\gamma} c_n)^{r_1})^{1-\theta}\,(n^{-1}(n^{\gamma} c_n)^{r_2})^{\theta}\\ &\leqq (\Sigma\, n^{-1}(n^{\gamma} c_n)^{r_1})^{1-\theta}\,(\Sigma\, n^{-1}(n^{\gamma} c_n)^{r_2})^{\theta}\\ &\leqq K\,(A\,B)^{1-\theta}\,(A\,B)^{\theta} = K\,A\,B.\end{aligned}$$

The proof is normal for exceptional cases.

4.2. Lemma 2. *If* $\alpha' \leqq \alpha$, $\beta' \leqq \beta$, *and* **(I)** *is true for* p, q, r, α, β, *then it is true for* p, q, r, α', β'.

We define a'_n, b'_n by

$$n^{\alpha} a'_n = n^{\alpha'} a_n, \quad n^{\beta} b'_n = n^{\beta'} b_n.$$

Then

$$\begin{aligned}c'_n &= \sum_{\mu+\nu=n} a'_\mu b'_\nu = \sum_{\mu+\nu=n} \mu^{-(\alpha-\alpha')}\,\nu^{-(\beta-\beta')}\, a_\mu b_\nu\\ &\geqq n^{-(\alpha-\alpha')-(\beta-\beta')}\, c_n = n^{-\gamma+\gamma'}\, c_n.\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}(\Sigma\, n^{-1}(n^{\gamma'} c_n)^r)^{\frac{1}{r}} &\leqq (\Sigma\, n^{-1}(n^{\gamma} c'_n)^r)^{\frac{1}{r}}\\ &\leqq K\,(\Sigma\, n^{-1}(n^{\alpha} a'_n)^p)^{\frac{1}{p}}\,(\Sigma\, n^{-1}(n^{\beta} b'_n)^q)^{\frac{1}{q}}\\ &= K\,(\Sigma\, n^{-1}(n^{\alpha'} a_n)^p)^{\frac{1}{p}}\,(\Sigma\, n^{-1}(n^{\beta'} b_n)^q)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

which proves the lemma. This proof also is normal for exceptional cases.

---

[3]) See for example Hardy and Littlewood [2, 4, 5].

5.

Cases of falsity.

5. 1. In this section we show that the conditions of the theorem are necessary for the truth of **(I)** in any ordinary case. We note in passing where the arguments apply to exceptional cases also.

Lemma 3. **(I)** *is false whenever*

(5. 1. 1) $$p < 1.$$

In proving this we may suppose (after Lemma 2) that

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1.$$

We take $s < 1$, ε positive and small (so that $\beta + \varepsilon < 1$), and

(5. 1. 2) $$a_n = m^{-s} (n = m^2), \quad a_n = 0 (n \neq m^2),$$

(5. 1. 3) $$b_1 = 0, \quad b_n = n^{-\beta-\varepsilon} (n \geqq 2).$$

Plainly B is finite; and A is finite if

$$\sum m^{-2} (m^{2\alpha-s})^p < \infty,$$

i. e. if

(5. 1. 4) $$s > 2\alpha - \frac{1}{p}.$$

Here

$$c_n = \sum_{m^2 < n-1} m^{-s} (n - m^2)^{-\beta-\varepsilon}.$$

Since $s < 1, \beta + \varepsilon < 1$, we have

$$\sum_{m^2 < n-1} m^{-s} (n - m^2)^{-\beta-\varepsilon} \sim \int_0^{n^{\frac{1}{2}}} x^{-s} (n - x^2)^{-\beta-\varepsilon} \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^n u^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} (n - u)^{-\beta-\varepsilon} \, du = K n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s-\beta-\varepsilon}$$

for large n[4]). Hence

$$c_n > K n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s-\beta-\varepsilon}$$

for large n. If

$$r(\gamma + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}s - \beta - \varepsilon) - 1 > -1,$$

i. e. if

(5. 1. 5) $$s < 2\alpha - 1 - 2\varepsilon,$$

then $C = \infty$.

Since $p < 1$, we can (when ε is small enough) choose s so that (5. 1. 4) and (5. 1. 5) are both satisfied, and then $A < \infty$, $B < \infty$, $C = \infty$. This proves the lemma. The argument applies normally to the exceptional cases in which $q = \infty$ or $r = \infty$, and the lemma is true in all cases.

---

[4]) If for example $s > 0$, $\beta > 0$, then $x^{-s} (n - x^2)^{-\beta-\varepsilon}$ has one minimum, of order $n^{-\frac{1}{2}s-\beta-\varepsilon}$, and series and integral differ by $O\left(n^{-\frac{1}{2}s-\beta-\varepsilon}\right)$.

5.2. There is an interesting special case of Theorem 1 in which the sequences a_n and b_n are identical (so that $p = q$, $\alpha = \beta$). This case is stated, as Theorem 2, in § 9.1. It is obvious that, if **(I)** is true generally, it is true when $a_n = b_n$, so that conditions 'sufficient' in Theorem 1 are also sufficient in Theorem 2. On the other hand it is not obvious (though actually true) that conditions 'necessary' in the general theorem remain necessary in the special case. It is therefore desirable to prove Lemma 3 (or the part of it relevant in this case) by a 'Gegenbeispiel' in which $a_n = b_n$. The same remark applies to the other lemmas of this section; but it is only in Lemma 3 that any substantial change in the construction is required. The *result* is the same in every case.

We require a simple lemma of an arithmetical character.

Lemma 4. *If ε is positive, and N large, there are more than $N^{1-\varepsilon}$ integers n for which*

$$\text{(5.2.1)} \quad \tfrac{1}{2}N \leqq n \leqq N, \quad n = \mu^2 + \nu^2, \quad \mu > N^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \quad \nu > N^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

We denote by $u(n)$ the number of representations of n as the sum of two squares. It is known that

$$\text{(5.2.2)} \qquad u(n) = O\left(n^{\frac{1}{4}\varepsilon}\right)$$

and that

$$\text{(5.2.3)} \qquad \sum_{\frac{1}{2}N \leqq n \leqq N} u(n) > HN,$$

where H is a constant, when N is large.

From (5.2.2) and (5.2.3) it follows, first, that the number of n for which

$$\tfrac{1}{2}N \leqq n \leqq N, \qquad n = \mu^2 + \nu^2$$

is greater than $H(\varepsilon)\, N^{1-\frac{1}{4}\varepsilon}$, where $H(\varepsilon)$ depends only on ε, and therefore greater than $N^{1-\frac{1}{2}\varepsilon}$ for large N.

Next, the number of possible choices of μ and ν for which $\mu \leqq N^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ does not exceed

$$N^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot N^{\frac{1}{2}} = N^{1-\varepsilon}.$$

Hence the number of n satisfying (5.2.1) is, for large N, greater than

$$N^{1-\frac{1}{2}\varepsilon} - 2N^{1-\varepsilon} > N^{1-\varepsilon}.$$

This proves Lemma 4. To apply it to the proof of Lemma 3, we choose a_n as in § 5.1, and $b_n = a_n$, so that

$$c_n = \sum_{\mu^2+\nu^2=n} (\mu\nu)^{-\varepsilon}.$$

We choose s, as before, to satisfy (5.1.4) and (5.1.5). Then A and B are finite. In discussing C we must distinguish the cases $s \geqq 0$ and $s < 0$.

If $0 \leqq s < 2\alpha - 1$ we have

$$c_n \geqq \sum_{\mu^2 + \nu^2 = n} (\mu^2 + \nu^2)^{-s} = u(n)\, n^{-s},$$

$$C^r = \sum n^{-1} (n^\gamma c_n)^r \geqq \sum_{\frac{1}{2}N}^{N} n^{-1} \left(n^{2\alpha - 1 - s} u(n)\right)^r$$

$$> N^{1-s} N^{-1} \left(\frac{1}{2} N\right)^{(2\alpha - 1 - s) r} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} N\right)^{(2\alpha - 1 - s) r - s},$$

and so $C = \infty$, if ε is small enough. Here we use only part of Lemma 4.

If $s < 0$, $s < 2\alpha - 1$, we need the full force of the lemma. If ε small then, for the $N^{1-\varepsilon}$ n of the lemma, we have

$$c_n > (N^{1-2\varepsilon})^{-s}$$

and so

$$C^r \geqq \sum n^{-1} \left(n^{2\alpha - 1} (N^{1-2\varepsilon})^{-s}\right)^r,$$

which is greater than a multiple of

$$N^{1-\varepsilon} N^{-1} N^{(2\alpha - 1 - s) r + 2\varepsilon s r} = N^{(2\alpha - 1 - s) r + 2\varepsilon s r - \varepsilon}.$$

Since the index is positive when ε is small, $C = \infty$.

5.3. Lemma 5. **(I)** *is false when*

(5.3.1) $$p \geqq 1, \quad r < \pi.$$

After Lemma 2, we may suppose

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1.$$

We take $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, and

$$n^\alpha a_n = (\log n)^{-\frac{1+\delta}{p}}, \quad n^\beta b_n = (\log n)^{-\frac{1+\delta}{q}},$$

where $\delta > 0$, for $n \geqq 2$. Then A and B are finite. Since $\alpha < 1$, $\beta < 1$, we have [5])

$$c_n \sim K (\log n)^{-\frac{1+\delta}{\pi}} \int_0^n x^{-\alpha} (n - x)^{-\beta}\, dx = K n^{-\gamma} (\log n)^{-\frac{1+\delta}{\pi}},$$

and plainly $C = \infty$ if $r < \pi$ and δ is sufficiently small.

The argument applies normally to the exceptional cases.

5.4. Lemma 6. **(I)** *is false when*

(5.4.1) $$p \geqq 1, \quad \pi < 1, \quad r > \frac{\pi}{1 - \pi}.$$

We take

$$n^\alpha a_n = n^{\frac{1}{p}} (\log n)^{-2}, \quad n^\beta b_n = n^{\frac{1}{q}} (\log n)^{-2}$$

---

[5]) See Knopp [8].

when

$$n = 2^m \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

and $a_n = b_n = 0$ otherwise. Then A and B are finite.

There are an infinity of values of n for which

$$c_{2n} \geqq a_n b_n = n^{-\gamma-1+\frac{1}{\pi}} (\log n)^{-4},$$

and, in the series for C^r, n occurs an infinity of times with exponent

$$r\left(-1+\frac{1}{\pi}\right)-1 = r\frac{1-\pi}{\pi}-1 > 0.$$

Hence $C = \infty$.

The argument applies normally to the exceptional cases.

There is an alternative statement of the argument which illustrates a point of principle. The 'Gegenbeispiel' which we have constructed does more than we need. It contradicts not only the inequality **(I)** but also the (weaker) convergence theorem 'if A and B are finite then C is finite'. If we are content merely to contradict **(I)**, which is all that is strictly necessary to the proof of Theorem 1, we may take

$$N^{\alpha} a_N = N^{\frac{1}{p}}, \quad N^{\beta} b_N = N^{\frac{1}{q}},$$

and all other a_n and b_n zero. Then $A = 1$, $B = 1$, and

$$C = (2N)^{\gamma r-1} c_{2N}^{\ r} = (2N)^{\gamma r-1} a_N^{\ r} b_N^{\ r} > K N^{-r-1+\frac{r}{\pi}}.$$

Since the exponent of N is positive, this contradicts **(I)** when N is sufficiently large.

5.5. Lemma 7. **(I)** *is false unless*

$$\alpha \leqq \alpha_0, \quad \beta \leqq \beta_0. \tag{5.5.1}$$

We choose a_n and b_n as in § 5.4, but now use the inequality

$$c_{n+2} \geqq K b_n.$$

In the series for C^r, n occurs an infinity of times with an exponent at least

$$\left(\gamma-\beta+\frac{1}{q}\right) r - 1 = r\left(\alpha-1+\frac{1}{q}\right)-1,$$

which is positive if $\alpha > \alpha_0$. Hence it is necessary for the truth of **(I)** that $\alpha \leqq \alpha_0$, and a similar argument shows that it is necessary that $\beta \leqq \beta_0$.

This argument also applies normally in the exceptional cases.

5.6. Lemma 8. *Suppose that p, q, r are finite and that $p \geqq 1$. Then* **(I)** *is false unless either*

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \tag{5.6.1}$$

or

$$r\left(1-\frac{1}{\pi}\right) \leqq -1. \tag{5.6.2}$$

It is sufficient, after Lemma 2, to consider the cases in which $\alpha = 1$ and $\beta < 1$ or $\alpha < 1$ and $\beta = 1$.

(i) Suppose first

$$p > 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta < 1; \tag{5.6.3}$$

and take $a_1 = b_1 = 0$ and

$$a_n = n^{-1}(\log n)^{-h}, \quad b_n = n^{-\beta}(\log n)^{-k} \quad (n \geqq 2), \tag{5.6.4}$$

where

$$h = \frac{1+\delta}{p}, \quad k = \frac{1+\delta}{q} \tag{5.6.5}$$

and δ is positive and small, so that

$$\frac{1}{p} < h < 1, \quad \frac{1}{q} < k < 1. \tag{5.6.6}$$

Then A and B are finite.

On the other hand $\gamma = \beta$ and

$$c_n \geqq \sum_{2}^{\frac{1}{2}n} m^{-1}(\log m)^{-h}(n-m)^{-\gamma}\big(\log(n-m)\big)^{-k}$$

$$> K n^{-\gamma}(\log n)^{-k} \sum_{2}^{\frac{1}{2}n} m^{-1}(\log m)^{-h} > K n^{-\gamma}(\log n)^{1-h-k}.$$

Hence, if C is finite, we must have

$$r\left(1 - \frac{1+\delta}{p} - \frac{1+\delta}{q}\right) = r(1-h-k) < -1.$$

Making $\delta \to 0$, we obtain (5.6.2).

(ii) Next suppose

$$p = 1, \quad q \geqq 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta < 1.$$

We again define a_n and b_n by (5.6.4) and (5.6.5). If $q > 1$, k satisfies (5.6.6), while $h = 1 + \delta > 1$. If $p = q = 1$, then $h = k = 1 + \delta > 1$. A and B are again finite, while

$$c_n \geqq \sum_{2}^{\frac{1}{2}n} m^{-1}(\log m)^{-1-\delta}(n-m)^{-\gamma}\big(\log(n-m)\big)^{-k} > K n^{-\gamma}(\log n)^{-k}.$$

If $C < \infty$ then

$$-\frac{r(1+\delta)}{q} = -rk < -1$$

and so, making $\delta \to 0$,

$$r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) = -\frac{r}{q} \leqq -1.$$

(iii) The cases in which $\alpha < 1$, $\beta = 1$ may be dealt with similarly, using the inequality

$$c_n \geqq \sum_{\frac{1}{2}n}^{n-2} m^{-\alpha}(\log m)^{-h}(n-m)^{-1}\big(\log(n-m)\big)^{-k}.$$

The argument is like that of (i) when $p \geqq 1$, $q > 1$, and like that of (ii) when $p = q = 1$.

5.7. Lemma 9. *Suppose that p, q, r are finite and $p \geqq 1$. Then* **(I)** *is false unless*

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \tag{5.7.1}$$

except perhaps when

$$p = 1, \quad r = q, \quad \alpha = 1, \quad \beta \leqq \beta_0. \tag{5.7.2}$$

It follows from Lemma 8 that, if **(I)** is true, and (5.7.1) is not satisfied, then

$$r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \leqq -1$$

and so

$$\pi < 1, \quad r \geqq \frac{\pi}{1-\pi}.$$

Hence, by Lemma 6,

$$r = \frac{\pi}{1-\pi}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1. \tag{5.7.3}$$

But then

$$\alpha_0 = 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} < 1$$

unless $p = 1$, and similarly $\beta_0 < 1$ unless $q = 1$ and therefore $p = 1$. Now $\alpha \leqq \alpha_0$, $\beta \leqq \beta_0$, by Lemma 7. Hence (5.7.1) is satisfied unless $p = 1$ and so, by (5.7.3), $r = q$.

5.8. Lemma 10. **(I)** *is always false, when $p \geqq 1$, unless α and β satisfy* (5.7.1), *except perhaps in the particular case* (5.7.2).

Lemma 9 shows that this is true when p, q, r are finite. We have now to examine the cases in which one at least is infinite.

Suppose **(I)** true. Then we know, by Lemma 5, that $r \geqq \pi$, and by Lemma 7 that $\alpha \leqq \alpha_0$, $\beta \leqq \beta_0$. Also

$$\alpha_0 = 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

unless $r \leqq q$, and $\beta_0 < 1$ unless $r \leqq p \leqq q$. Hence $\alpha < 1$ unless $r \leqq q$, and $\beta < 1$ unless $r \leqq p \leqq q$.

If $p < \infty$ then, since one at least of q and r is infinite, and $r \leqq q$, either

$$\infty\, p <, \quad q = \infty, \quad r < \infty, \tag{a}$$

or

$$p < \infty, \quad q = r = \infty. \tag{b}$$

If $p = \infty$ then $q = \infty$, so that $\pi = \infty$ and

$$p = q = r = \infty. \tag{c}$$

We have to re-examine our argument in these three cases.

An examination of the argument of § 5.6 shows that it applies, with 'normal' changes, to all possibilities covered by cases (a) and (c). The conclusion is

$$r\left(1-\frac{1}{\pi}\right) \leqq -1$$

in case (a), and

$$1-\frac{1}{\pi} \leqq 0$$

in case (c), and each conclusion is false because $\pi = p$.

There remains only case (b). Here $\beta_0 < 1$, so that $\beta < 1$; but $\alpha_0 = 1$. Since there is an abnormality in the conclusion, we state the argument more fully. If $p > 1$, we take

$$a_n = n^{-1}(\log n)^{-h} = n^{-1}(\log n)^{-\frac{1+\delta}{p}}, \quad b_n = n^{-\beta} \quad (n \geqq 2).$$

The argument of § 5.6 (i) shows that

$$c_n > K n^{-\gamma}(\log n)^{1-h},$$

and $C < \infty$ requires $h \geqq 1$ and so

$$\frac{1}{p} \geqq 1,$$

which is false.

If $p = 1$, the argument of § 5.6 (ii) gives only $c_n > K n^{-\gamma}$, and there is no contradiction. The possibility

$$p = 1, \quad q = r = \infty, \quad \alpha = 1, \quad \beta \leqq \beta_0 = 0 \tag{5.8.1}$$

remains open. In this case, which is included in (5.7.2) for $q = \infty$, **(I)** is actually true.

5.9. *Summary of possibilities of truth.* It is now easy to see that there are no possibilities of truth beyond those enumerated in the theorem. Suppose that **(I)** is true for the set p, q, r, α, β and all a_n, b_n. Then $p \geqq 1$, by Lemma 3, and $r \geqq \pi$, by Lemma 5.

If these conditions are satisfied, and $\pi \leqq r \leqq p$, then $\alpha < 1$, $\beta < 1$, by Lemmas 9 and 10, except perhaps when $p = q = r = 1$, $\alpha \leqq 1$, $\beta \leqq 1$, a special case of (5.7.2).

Next suppose that $p < r \leqq q$. Then $\alpha \leqq \alpha_0$, $\beta \leqq \beta_0$, by Lemma 7 (these inequalities being true in any case); and also (except in the special case $p = 1$, $r = q$) $\alpha < 1$, $\beta < 1$. Here

$$\alpha_0 = 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geqq 1, \quad \beta_0 = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r} < 1,$$

so that the conditions on α and β amount to $\alpha < 1$, $\beta \leqq \beta_0$.

Finally, if $r > q$, we must distinguish the cases $\pi < 1$ and $\pi \geqq 1$. If $\pi < 1$ we must have

$$r \leqq \frac{\pi}{1-\pi},$$

by Lemma 6. If $\pi \geqq 1$ this condition disappears. Since now $\alpha_0 < 1$, $\beta_0 < 1$, the decisive conditions on α and β are $\alpha \leqq \alpha_0$, $\beta \leqq \beta_0$.

6.

Cases I – IV of truth.

6.1. We proceed now to the proof of the positive parts of Theorem 1. We state both the results and the proofs primarily for the ordinary cases in which $p > 1$ and p, q, r are finite, noting incidentally how far our arguments cover the exceptional cases. There is a certain overlapping, since an exceptional case may sometimes be regarded as a boundary case of more than one ordinary case.

We begin by reclassifying the cases of truth in accordance with the methods of proof required. This classification by methods is not quite the same as our previous classification by results, primarily because we have often to use different methods when $\pi < 1$ and when $\pi > 1$, even when the results are the same.

We distinguish the following nine cases.

I. $\pi \geqq 1, \quad r = \pi, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1.$

II. $\pi < 1, \quad r = \pi, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1.$

III. $r = p, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1.$

IV. $\pi < r < p, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1.$

V. $\pi > 1, \quad p < r \leqq q, \quad \alpha < 1, \quad \beta \leqq \beta_0.$

VI. $\pi \leqq 1, \quad p < r \leqq q, \quad \alpha < 1, \quad \beta \leqq \beta_0.$

VII. $\pi \geqq 1, \quad q < r, \quad \alpha \leqq \alpha_0, \quad \beta \leqq \beta_0.$

VIII. $\pi < 1, \quad q < r < \frac{\pi}{1-\pi}, \quad \alpha \leqq \alpha_0, \quad \beta \leqq \beta_0.$

IX. $\pi < 1, \quad r = \frac{\pi}{1-\pi}, \quad \alpha \leqq \alpha_0, \quad \beta \leqq \beta_0.$

Cases I – IV cover (2.1.2) of the theorem (the first three cases being boundary cases), Cases V and VI cover (2.1.3), Case VII is (2.1.4), and Cases VIII and IX cover (2.1.5).

It may be observed that the condition $r < \frac{\pi}{1-\pi}$ does not figure in Case VI. It is

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

and is satisfied automatically except when

$$p = 1, \quad r = q = \frac{\pi}{1-\pi}$$

(a case excluded for the moment as exceptional).

Case I.

6.2. Lemma 11. **(I)** *is true when*

$$\pi \geqq 1, \quad r = \pi, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1.$$

We suppose first that $\pi > 1$, and that a_n and b_n vanish from a certain point onwards, so that A, B, and C are certainly finite. We write

$$n^{\alpha-\frac{1}{p}} a_n = \boldsymbol{a}_n, \qquad n^{\beta-\frac{1}{q}} b_n = \boldsymbol{b}_n, \tag{6.2.1}$$

so that

$$A^p = \Sigma\, \boldsymbol{a}_n^p, \quad B^q = \Sigma\, \boldsymbol{b}_n^q. \tag{6.2.2}$$

We then have

$$C^r = \Sigma\, n^{\gamma r-1} c_n^r = \Sigma\, n^{\gamma r-1} c_n^{r-1} c_n$$

$$= \sum_n n^{\gamma r-1} c_n^{r-1} \sum_\mu \mu^{-\alpha+\frac{1}{p}} (n-\mu)^{-\beta+\frac{1}{q}} \boldsymbol{a}_\mu \boldsymbol{b}_{n-\mu},$$

the range of μ being $1 \leqq \mu \leqq n-1$. It is easily verified that

$$C^r = \Sigma\, u v w, \tag{6.2.3}$$

where

$$u^{r'} = n^{\gamma r+\gamma-1} \mu^{-\alpha} (n-\mu)^{-\beta} c_n^r,$$

$$v^p = n^{\gamma-1} \mu^{-\alpha+1} (n-\mu)^{-\beta} \boldsymbol{a}_\mu^p,$$

$$w^q = n^{\gamma-1} \mu^{-\alpha} (n-\mu)^{-\beta+1} \boldsymbol{b}_{n-\mu}^q\ ^{6}).$$

Since here

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

Hölder's inequality gives

$$C^r \leqq (\Sigma\, u^{r'})^{\frac{1}{r'}} (\Sigma\, v^p)^{\frac{1}{p}} (\Sigma\, w^q)^{\frac{1}{q}} = U^{\frac{1}{r'}} V^{\frac{1}{p}} W^{\frac{1}{q}}, \tag{6.2.4}$$

say. All these sums are double sums in μ and n.

---

[6]) The exponent of n in $u v w$ is

$$\frac{\gamma r+\gamma-1}{r'} + \frac{\gamma-1}{p} + \frac{\gamma-1}{q} = \gamma(r-1) + \gamma - 1 = \gamma r - 1,$$

and that of μ is

$$-\frac{\alpha}{r'} - \frac{\alpha-1}{p} - \frac{\alpha}{q} = -\alpha + \frac{1}{p}.$$

See (1.3.5) for the definition of r'.

Here, first,

$$U = \sum_n n^{\gamma r + \gamma - 1} c_n^r \sum_\mu \mu^{-\alpha} (n-\mu)^{-\beta};$$

and

$$\sum_\mu \mu^{-\alpha} (n-\mu)^{-\beta} \leqq K n^{1-\alpha-\beta} = K n^{-\gamma},$$

since $\alpha < 1$, $\beta < 1$; so that

$$U \leqq K \sum n^{\gamma r - 1} c_n^r = K C^r. \tag{6.2.5}$$

Next

$$V = \sum_n n^{\gamma-1} \sum_\mu \mu^{-\alpha+1} (n-\mu)^{-\beta} a_\mu^p = \sum_\mu \mu^{-\alpha+1} a_\mu^p \sum_n n^{\gamma-1} (n-\mu)^{-\beta},$$

where now n runs from $\mu+1$ to ∞ and μ from 1 to ∞. Since $\beta < 1$ and $\gamma - 1 - \beta = \alpha - 2 < -1$,

$$\sum_n n^{\gamma-1} (n-\mu)^{-\beta} \leqq K \mu^{\gamma-\beta} = K \mu^{\alpha-1},$$

and so

$$V \leqq K \sum a_\mu^p = K A^p. \tag{6.2.6}$$

Similarly

$$W \leqq K B^q. \tag{6.2.7}$$

From (6.2.4), (6.2.5), (6.2.6), and 6.2.7) we deduce

$$C^r \leqq K C^{r-1} A B,$$

which is **(I)**. We have proved **(I)** on the hypothesis that a_n and b_n vanish from a certain point onwards, but this limitation may be removed in the obvious manner by a passage to the limit.

6.3. The proof when $\pi = 1$ is a normal simplification of that just given. In this case

$$C = \sum n^{\gamma-1} c_n = \sum_n n^{\gamma-1} \sum_\mu \mu^{-\alpha+\frac{1}{p}} (n-\mu)^{-\beta+\frac{1}{q}} a_\mu b_{n-\mu} = \sum v w$$

where

$$v^p = n^{\gamma-1} \mu^{-\alpha+1} (n-\mu)^{-\beta} a_\mu^p,$$

$$w^q = n^{\gamma-1} \mu^{-\alpha} (n-\mu)^{-\beta+1} b_{n-\mu}^q.$$

Hence

$$C \leqq (\sum v^p)^{\frac{1}{p}} (\sum w^q)^{\frac{1}{q}} = V^{\frac{1}{p}} W^{\frac{1}{q}};$$

and we complete the proof by estimating V and W as in § 6.2.

If $p = 1$, then $\pi \geqq 1$ involves $q = \infty$, $\pi = 1$, and so $r = p$. If $q = \infty$ then $\pi = p$, $r = p$. Hence the only exceptional cases of Case I fall also under Case III, and will be treated as sub-cases of Case III.

Case II.

6.4. Lemma 12. **(I)** *is true when*

$$\pi < 1, \quad r = \pi, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1.$$

It is enough, after Lemma 2, to prove this when

$$\alpha = 1 - \frac{\delta}{p}, \quad \beta = 1 - \frac{\delta}{q}, \tag{6.4.1}$$

where δ is positive and small. We use the lemma which follows, and which we have proved elsewhere[7]).

Lemma 13. *If* $c > 1$ *and*

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

then

$$\Sigma\, n^{-c} A_n^k \leqq H\, \Sigma\, n^{-c} (n a_n)^k \quad (k \geqq 1), \tag{6.4.2}$$

$$\Sigma\, n^{-c} A_n^k \geqq H\, \Sigma\, n^{-c} (n a_n)^k \quad (k \leqq 1), \tag{6.4.3}$$

where

$$H = H(k, c).$$

Since

$$r\gamma - 1 = \pi(\alpha + \beta - 1) - 1 = \pi\left(1 - \frac{\delta}{p} - \frac{\delta}{q}\right) - 1 = \pi - 1 - \delta,$$

we have, by (1.1.7) and (6.4.3),

$$C^r = \Sigma\, n^{-1-\delta} (n c_n)^\pi \leqq K\, \Sigma\, n^{-1-\delta} C_n^\pi,$$

where

$$C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n.$$

Since

$$C_n \leqq A_n B_n,$$

this gives

$$\begin{aligned} C^r &\leqq K\, \Sigma\, n^{-1-\delta} A_n^\pi B_n^\pi \\ &\leqq K\, (\Sigma\, n^{-1-\delta} A_n^p)^{\frac{\pi}{p}}\, (\Sigma\, n^{-1-\delta} B_n^q)^{\frac{\pi}{q}} \\ &\leqq K\, (\Sigma\, n^{-1-\delta} (n a_n)^p)^{\frac{\pi}{p}}\, (\Sigma\, n^{-1-\delta} (n b_n)^q)^{\frac{\pi}{q}} \\ &= K A^\pi B^\pi = K A^r B^r. \end{aligned}$$

The proof is valid for $q \geqq p \geqq 1$, and the remark about infinite values at the end of § 6.2 applies here also.

Lemmas 11 und 12 together dispose of the boundary case $r = \pi$.

A lemma for Case III.

6.5. Our treatment of Case III depends upon the following lemma, in which we use

$$\mathbf{I}(p, q, r, \alpha, \beta)$$

as an abbreviation for '**(I)** is true for the values p, q, r, α, β of the parameters'.

---

[7]) Hardy and Littlewood [1], Theorem 1.

Lemma 14. *Suppose that*

$$h > -1, \quad k > -1, \tag{6.5.1}$$

$$s \geqq p, \quad t \geqq q, \quad \sigma > 0, \quad \tau > 0, \tag{6.5.2}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\tau} = 1, \tag{6.5.3}$$

$$P = \frac{s\,p}{(s-p)\,\tau}, \quad Q = \frac{t\,q}{(t-q)\,\tau}, \quad R = \frac{r}{\tau}, \tag{6.5.4}$$

$$\mathsf{A} = \tau\left(\alpha + \frac{h}{\sigma} - \frac{1}{s}\right), \quad \mathsf{B} = \tau\left(\beta + \frac{k}{\sigma} - \frac{1}{t}\right). \tag{6.5.5}$$

Then $\mathbf{I}\,(P, Q, R, \mathsf{A}, \mathsf{B})$ *implies* $\mathbf{I}\,(p, q, r, \alpha, \beta)$.

We observe first that

(i) s or t may be infinite;

(ii) it follows from (6.5.3) that $\sigma \geqq 1$, $\tau \geqq 1$;

(iii) it is not necessary to suppose that $Q \geqq P$.

The lemma contains the general form of a transformation which we have used successfully before in special cases. In our application here we shall require

$$P = 1, \quad R = 1,$$

and so

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}, \quad \tau = r.$$

The first of these equations demands that

$$r \geqq p.$$

We write [8])

$$\mathfrak{a}_n = n^{\tau\left(\frac{1-\alpha p}{s} - \frac{h}{\sigma}\right)} a_n^{\tau\left(1-\frac{p}{s}\right)}, \qquad \mathfrak{b}_n = n^{\tau\left(\frac{1-\beta q}{s} - \frac{k}{\sigma}\right)} b_n^{\tau\left(1-\frac{q}{t}\right)}.$$

It is then easily verified that

$$n^{-1}\,(n^{\mathsf{A}}\,\mathfrak{a}_n)^P = n^{-1}\,(n^{\alpha}\,a_n)^p, \; n^{-1}\,(n^{\mathsf{B}}\,\mathfrak{b}_n)^Q = n^{-1}\,(n^{\beta}\,b_n)^q, \tag{6.5.6}$$

and that

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{\mu+\nu=n} a_\mu\, b_\nu \\ &= \sum \left((\mu^h\,\nu^k)^{\frac{1}{\sigma}}\,(\mu^{-1}\,(\mu^\alpha\,a_\mu)^p)^{\frac{1}{s}}\,(\nu^{-1}\,(\nu^\beta\,b_\nu)^q)^{\frac{1}{t}}\,(\mathfrak{a}_\mu\,\mathfrak{b}_\nu)^{\frac{1}{\tau}}\right). \end{aligned}$$

Hence, by Hölder's inequality,

$$c_n \leqq (\Sigma\,\mu^h\,\nu^k)^{\frac{1}{\sigma}}\,A^{\frac{p}{s}}\,B^{\frac{q}{t}}\,\mathfrak{c}_n^{\frac{1}{\tau}} \leqq K\,A^{\frac{p}{s}}\,B^{\frac{q}{t}}\,n^{\frac{h+k+1}{\sigma}}\,\mathfrak{c}_n^{\frac{1}{\tau}},$$

where

$$\mathfrak{c}_n = \sum_{\mu+\nu=n} \mathfrak{a}_\mu\,\mathfrak{b}_\nu.$$

---

[8]) The values of the various indices are forced throughout by (6.5.6) and the general course of the argument.

This is equivalent to

$$n^{-1}(n^{\gamma}c_n)^r \leqq K A^{\frac{pr}{s}} B^{\frac{qr}{t}} n^{-1}(n^{\Gamma}c_n)^R, \tag{6.5.7}$$

where

$$\Gamma = \mathsf{A} + \mathsf{B} - 1.$$

If now

$$\boldsymbol{A}^P = \Sigma\, n^{-1}(n^{\mathsf{A}}a_n)^P, \quad \boldsymbol{B}^Q = \Sigma\, n^{-1}(n^{\mathsf{B}}b_n)^Q, \quad \boldsymbol{C}^R = \Sigma\, n^{-1}(n^{\Gamma}c_n)^R,$$

then

$$\boldsymbol{A}^P = A^p, \quad \boldsymbol{B}^Q = B^q$$

by (6.5.6), and

$$\boldsymbol{C} \leqq K\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

by $\mathbf{I}(P, Q, R, \mathsf{A}, \mathsf{B})$. Hence we deduce from (6.5.7)

$$C^r \leqq K A^{\frac{pr}{s}} B^{\frac{qr}{t}} \boldsymbol{C}^r \leqq K A^{\frac{pr}{s}} B^{\frac{qr}{t}} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^R$$
$$= K A^{\frac{pr}{s}} B^{\frac{qr}{t}} A^{\frac{pR}{P}} B^{\frac{qR}{Q}} = K(AB)^r,$$

which proves the lemma. The argument reduces normally when s or t is infinite.

Case III.

6.6. We now consider Case III, taking first the special case in which $p = 1$.

Lemma 15. **(I)** *is true when*

$$p = 1, \quad q \geqq 1, \quad r = 1, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1. \tag{6.6.1}$$

We define $\boldsymbol{a}_n$ and $\boldsymbol{b}_n$ as in § 6.2, so that now

$$\boldsymbol{a}_n = n^{\alpha-1}a_n, \; b_n = n^{\beta-\frac{1}{q}}b_n, \; A = \Sigma\,\boldsymbol{a}_n, \; B^q = \Sigma\,\boldsymbol{b}_n^q.$$

Then

$$C = \Sigma\, n^{\gamma-1}c_n = \Sigma\, n^{\alpha+\beta-2} \sum_{\mu+\nu=n} a_\mu b_\nu$$
$$= \Sigma\,\Sigma\,(\mu+\nu)^{\alpha+\beta-2}\,\mu^{-\alpha+1}\,\nu^{-\beta+\frac{1}{q}}\,\boldsymbol{a}_\mu\,\boldsymbol{b}_\nu.$$

If $q = 1$, the coefficient of $\boldsymbol{a}_\mu\,\boldsymbol{b}_\nu$ is

$$\frac{\mu^{1-\alpha}\,\nu^{1-\beta}}{(\mu+\nu)^{2-\alpha-\beta}} < 1,$$

and

$$\boldsymbol{C} \leqq \Sigma\,\boldsymbol{a}_\mu\,\Sigma\,\boldsymbol{b}_\nu = A\,B.$$

If $q > 1$, the coefficient of $\boldsymbol{a}_\mu$ is

$$\varphi_\mu = \mu^{-\alpha+1}\sum_\nu (\mu+\nu)^{\alpha+\beta-2}\,\nu^{-\beta+\frac{1}{q}}\,\boldsymbol{b}_\nu$$
$$\leqq \mu^{-\alpha+1}\,B\Big(\sum_\nu \nu^{\varrho}(\mu+\nu)^{\sigma}\Big)^{\frac{1}{q'}},$$

where

$$\varrho = q'\left(\frac{1}{q} - \beta\right), \quad \sigma = q'(\alpha + \beta - 2).$$

Now

$$\varrho > q'\left(\frac{1}{q} - 1\right) = -1$$

and

$$\varrho + \sigma = q'\left(\alpha - \frac{1}{q'} - 1\right) < -1,$$

so that

$$\sum_{\nu} \nu^{\varrho}(\mu + \nu)^{\sigma} < K\mu^{\varrho+\sigma+1} = K\mu^{(\alpha-1)q'}.$$

Hence

$$\varphi_{\mu} \leqq K B,$$

and so

$$C \leqq K B \sum a_{\mu} = K A B.$$

The argument applies normally to the case $q = \infty$.

6.7. We now consider the general case.

Lemma 16. **(I)** *is true when*

$$p \geqq 1, \quad r = p, \quad \alpha < 1, \quad \beta < 1.$$

We may suppose, after Lemma 15, that $p > 1$. The argument covers the wider range

(6.7.1) $$p \geqq 1, \quad p \leqq r \leqq q, \quad \alpha < 1, \quad \beta < \beta_0$$

(with the normal changes when $p = 1$, $p' = \infty$; when $r = p$, $\beta_0 = 1$).

In Lemma 14 take

$$\tau = r, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$$

(and so $s = \infty$ when $r = p$). Then

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{\sigma} = 1 - \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau} = 1 - \frac{1}{p};$$

and the simplest choice of t and σ is

$$t = \infty, \quad \sigma = p'.$$

We have then

$$P = 1, \quad Q = \frac{q}{r} \geqq 1, \quad R = 1,$$

$$\mathsf{A} = r\left(\alpha + \frac{h}{p'} - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right), \quad \mathsf{B} = r\left(\beta + \frac{k}{p'}\right);$$

and we require

(6.7.2) $$\mathsf{A} < 1, \quad \mathsf{B} < 1.$$

If we took $h = k = -1$, we should have

$$\mathsf{A} = r\left(\alpha - \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) = r(\alpha - 1) + 1 < 1$$

and

$$\mathsf{B} = r\left(\beta - \frac{1}{p'}\right) < r\left(\beta_0 - \frac{1}{p'}\right) = r\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} + \frac{1}{r}\right) = 1.$$

We can therefore choose $h > -1$, $k > -1$ so that the conditions (6. 7. 2) are satisfied. We have then $\mathbf{I}\,(P, Q, R, \mathsf{A}, \mathsf{B})$, by Lemma 15, and $\mathbf{I}\,(p, q, r, \alpha, \beta)$ by Lemma 14.

6. 8. The conditions (6. 7. 1) are very nearly the same as those of Case V or Case VI; but the argument fails when $\beta = \beta_0$, which is the critical (and most difficult) value of β in these cases. We shall however find it useful, when we come to consider the 'abnormal' cases, to have proved here rather more than is actually required for Lemma 16, viz. that **(I)** is true under conditions (6. 7. 1).

There is a similar argument which succeeds when

(6. 8. 1) $$p \geqq 1,\ \pi \geqq 1,\ q \leqq r,\ \alpha < \alpha_0,\ \beta < \beta_0,$$

and which also will be useful to us later. Take

$$\tau = r,\ \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r},\ \ \frac{1}{t} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$$

(and so $t = \infty$ if $r = q$). Then $s \geqq p$, $t \geqq q$, $\tau > 0$. If now

$$\frac{1}{\sigma} = 1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{\pi},$$

we have $\sigma > 0$ (since $\pi \geqq 1$), and

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\tau} = 1.$$

These values give

$$P = Q = R = 1$$

and

$$\mathsf{A} = r\left(\alpha + h\left(1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right),\ \mathsf{B} = r\left(\beta + k\left(1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right).$$

If we took $h = -1$, we should have

$$\mathsf{A} = 1 + r\left(\alpha - 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) = 1 + r\,(\alpha - \alpha_0) < 1;$$

and similarly $k = -1$ gives $\mathsf{B} < 1$. We can therefore choose $h > -1$, $k > -1$ so that $\mathsf{A} < 1$, $\mathsf{B} < 1$. It follows that **(I)** is true under conditions (6. 8. 1).

Case IV.

6. 9. Lemma 17. **(I)** *is true when*

$$\pi \leqq r \leqq p,\ \alpha < 1,\ \beta < 1.$$

The case $r = \pi$ is covered by Lemma 11 if $\pi \geqq 1$ and by Lemma 12 if $\pi < 1$. The case $r = p$ is covered by Lemma 16. The full lemma accordingly follows from Lemma 1.

6.10. It will be convenient to sum up here what we have proved so far.

Suppose first that $p = \infty$. The results of § 5 shew that **(I)** can then be true only when

$$p = q = r = \pi = \infty.$$

(I) then asserts that

$$a_n = O(n^{-\alpha}),\ b_n = O(n^{-\beta})$$

imply

$$c_n = O(n^{-\gamma}) = O(n^{1-\alpha-\beta}).$$

This is true if $\alpha < 1$, $\beta < 1$, and otherwise false.

We may therefore suppose p finite. Then § 5 and § 6 together shew that **(I)** is true when (2.1.2) is satisfied, and otherwise false, except perhaps in the special case (5.7.2). This case falls usually under (2.1.3), but under (2.1.2) when $p = q = r = 1$, $\alpha_0 = \beta_0 = 1$. Then, if we take $\alpha = \beta = 1$, **(I)** asserts that

$$\Sigma a_n = A, \quad \Sigma b_n = B$$

imply

$$C = \Sigma c_n \leqq K A B,$$

and this is true (with $K = 1$ and with equality). This disposes of the abnormal case (iii c).

We have therefore proved everything in the theorem which falls under (2.1.2) or Cases I—IV.

7.

Cases V—IX of truth (ordinary cases).

7.1. The characteristic of Cases V—IX is the occurrence of a condition of the type $\alpha \leqq \alpha_0$ or $\beta \leqq \beta_0$. In these cases we may, after Lemma 2, suppose $\alpha = \alpha_0$ or $\beta = \beta_0$, and we denote these reduced cases by $V_0, \ldots$. Cases V—VIII are the most difficult cases of the theorem, and depend upon a lemma which Pólya and we have proved elsewhere and which lies rather deeper than any theorem to which we have yet appealed.

Throughout § 7 we confine ourselves to ordinary cases, *i. e.* we suppose

$$1 < p \leqq q < \infty,\ r < \infty.$$

The lemma to which we have referred is

Lemma 18. *If*

(7.1.1) $$h > 1,\ 0 < \mu < \frac{1}{h},$$

(7.1.2) $$l = \frac{h}{1-\mu h},\quad \frac{1}{h} - \frac{1}{l} = \mu,$$

(7.1.3. $$u_0 = 0,\ \Sigma u_n^h = U^h,$$

(7.1.4) $$U_n^{(\mu)} = \sum_{s<n} s^{\mu-1} u_{n-s},$$

then

(7.1.5) $$\Sigma (U_n^{(\mu)})^l \leqq H U^l,$$

where

$$H = H(h, \mu) = H(h, l)\ ^{9}).$$

7.2. We write

(7.2.1) $$a_n = n^{\alpha - \frac{1}{p}} a_n, \quad b_n = n^{\beta - \frac{1}{q}} b_n, \quad c_n = n^{\gamma - \frac{1}{r}} c_n,$$

so that

(7.2.2) $$A^p = \Sigma a_n^p, \quad B^q = \Sigma b_n^q, \quad C^r = \Sigma c_n^r$$

and

(7.2.3) $$c_n = \sum_{s<n} s^{-\beta + \frac{1}{q}} (n-s)^{-\alpha + \frac{1}{p}} b_s a_{n-s}.$$

We write also

(7.2.4) $$c_{n,1} = \sum_{s \leqq \frac{1}{2} n}, \quad c_{n,2} = \sum_{\frac{1}{2} n \leqq s < n}$$

(with the same summand), and

(7.2.5) $$c_{n,1} = n^{\gamma - \frac{1}{r}} c_{n,1}, \quad c_{n,2} = n^{\gamma - \frac{1}{r}} c_{n,2}.$$

Then

$$c_n \leqq c_{n,1} + c_{n,2}$$

and

$$C^r = \Sigma c_n^r \leqq K (C_1^r + C_2^r),$$

where

(7.2.6) $$C_1^r = \Sigma c_{n,1}^r, \quad C_2^r = \Sigma c_{n,2}^r.$$

It is enough to prove that

(7.2.7) $$C_1 \leqq K A B$$

and

(7.2.8) $$C_2 \leqq K A B,$$

and we shall consider these inequalities separately.

7.3. We have

(7.3.1) $$c_{n,1} = n^{\gamma - \frac{1}{r}} c_{n,1} \leqq K n^{\gamma - \frac{1}{r}} n^{-\alpha + \frac{1}{p}} \sum_{s \leqq \frac{1}{9} n} s^{-\beta + \frac{1}{q}} b_s a_{n-s}$$

$$\leqq K n^{\beta - \beta_0} \sum_{s<n} s^{-\beta + \frac{1}{q}} b_s a_{n-s};$$

---

9) Hardy, Littlewood, and Pólya [6], Theorem 5. For the corresponding theorem for integrals, see Hardy and Littlewood [3], Theorem 3, F. Riesz [9], Zygmund [12] and Hardy, Littlewood, and Pólya [7], Theorem 383.

and similarly

$$c_{n,2} \leqq K n^{\alpha-\alpha_0} \sum_{s<n} (n-s)^{-\alpha+\frac{1}{p}} b_s a_{n-s} \tag{7.3.2}$$

$$= K n^{\alpha-\alpha_0} \sum_{s<n} s^{-\alpha+\frac{1}{p}} a_s b_{n-s}.$$

It is to be observed that (apart from their incidence in K) there is no α in (7.3.1) and no β in (7.3.2).

7.4. Lemma 19. *Suppose that*

$$l > h > 1, \quad k > 1, \tag{7.4.1}$$

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} < 1 + \frac{1}{l}, \tag{7.4.2}$$

$$x = 1 + \frac{1}{l} - \frac{1}{h} - \frac{1}{k} > 0, \tag{7.4.3}$$

$$w_n = \sum_{s<n} s^{-x} u_{n-s} v_s, \tag{7.4.4}$$

$$\Sigma u_n^h = U^h, \quad \Sigma v_n^k = V^k, \quad \Sigma w_n^l = W^l. \tag{7.4.5}$$

Then

$$W \leqq H U V, \tag{7.4.6}$$

where $H = H(h,k,l)$.

We observe first that, since $l > h$,

$$0 < x < 1 - \frac{1}{k} = \frac{1}{k'}. \tag{7.4.7}$$

We write

$$w_n = \Sigma \left(s^{-xk'} u_{n-s}^t\right)^{\frac{1}{k'}} \left(u_{n-s}^h v_s^k\right)^{\frac{1}{y}} \left(v_s^k\right)^{\frac{1}{z}}, \tag{7.4.8}$$

where t is for the moment undetermined and

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{h} - \frac{t}{h\,k'}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{k} - \frac{1}{h} + \frac{t}{h\,k'}, \tag{7.4.9}$$

so that

$$\frac{t}{k'} + \frac{h}{y} = 1, \quad \frac{k}{y} + \frac{k}{z} = 1, \quad \frac{1}{k'} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1. \tag{7.4.10}$$

If

$$t = k' \tag{7.4.11}$$

then

$$z = k, \quad \frac{1}{y} = 0, \quad y = \infty. \tag{7.4.12}$$

On the other hand, in order that

$$\frac{1}{y} > 0, \quad \frac{1}{z} > 0 \tag{7.4.13}$$

we must have

$$t < k', \quad t > \frac{k-h}{h\,k} h\,k' = \frac{k-h}{k-1},$$

i. e.

$$\frac{k-h}{k-1} < t < \frac{k}{k-1}. \tag{7.4.14}$$

7.5. Suppose first that (7.4.11), and so (7.4.12), is satisfied. Then

$$w_n = \Sigma\,(s^{-xk'}\,u_{n-s}^{k'})^{\frac{1}{k'}}\,(v_s^k)^{\frac{1}{k}} \tag{7.5.1}$$

$$\leqq (\Sigma\, s^{-xk'}\,u_{n-s}^{k'})^{\frac{1}{k'}}\,(\Sigma\, v_s^k)^{\frac{1}{k}} = V\,(\Sigma\, s^{\mu-1}\,u_{n-s}^{k'})^{\frac{1}{k'}},$$

where

$$\mu = 1 - xk' \tag{7.5.2}$$

so that, after (7.4.7),

$$0 < \mu < 1.$$

Let

$$u_n = u_n^{k'}, \tag{7.5.3}$$

so that

$$u_n^h = u_n^P,\ U^h = \Sigma\, u_n^P, \tag{7.5.4}$$

where

$$P = \frac{h}{k'}. \tag{7.5.5}$$

In order that $P > 1$, it is necessary and sufficient that $h > k'$ or

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} < 1. \tag{7.5.6}$$

If

$$Q = \frac{l}{k'} > \frac{h}{k'} = P \tag{7.5.7}$$

then

$$\frac{1}{P} - \frac{1}{Q} = k'\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{l}\right) = k'\left(1 - x - \frac{1}{k}\right) = 1 - xk' = \mu,$$

by (7.5.2), and $0 < \mu < \frac{1}{P}$. Hence, when (7.5.6) is satisfied, we may apply Lemma 18, with P, Q for h, l; and we obtain

$$W^l = \Sigma\, w_n^l \leqq V^l \sum_n \Big(\sum_{s<n} s^{\mu-1}\,u_{n-s}\Big)^Q$$

$$= V^l\,\Sigma\,(U_n^{(\omega)})^Q \leqq K\,V^l\,(\Sigma\, u_n^P)^{\frac{Q}{P}}$$

$$= K\,V^l\,(\Sigma\, u_n^h)^{\frac{l}{h}} = K\,(U\,V)^l.$$

This is (7.4.6), but the proof is valid only when h and k satisfy (7.5.6).

7.6. When

$$1 \leqq \frac{1}{h} + \frac{1}{k} < 1 + \frac{1}{l}, \tag{7.6.1}$$

the argument is less simple. We choose t so as to satisfy (7.4.14) and certain other inequalities which will appear in the sequel.

We define μ again by (7.5.2), but now take

$$u_n = u_n^t; \tag{7.6.2}$$

and write

$$d_n = \sum_{s<n} u_{n-s}^h v_s^k, \tag{7.6.3}$$

so that

$$\Sigma d_n = \sum_n \sum_{s<n} u_{n-s}^h v_s^k = U^h V^k. \tag{7.6.4}$$

By (7.4.8), (7.5.2), (7.6.3) and Hölder's inequality,

$$\begin{aligned} w_n &= \Sigma (s^{\mu-1} u_{n-s})^{\frac{1}{k'}} (u_{n-s}^h v_s^k)^{\frac{1}{y}} (v_s^k)^{\frac{1}{z}} \\ &\leqq (U_n^{(\mu)})^{\frac{1}{k'}} d_n^{\frac{1}{y}} \Big(\sum_{s<n} v_s^k \Big)^{\frac{1}{z}} \\ &\leqq V^{\frac{k}{z}} d_n^{\frac{1}{y}} (U_n^{(\mu)})^{\frac{1}{k'}}, \end{aligned}$$

$$W^l = \Sigma w_n^l \leqq V^{\frac{kl}{z}} \Sigma d_n^{\frac{l}{y}} (U_n^{(\mu)})^{\frac{l}{k'}} \tag{7.6.5}$$

We assume provisionally that

$$\frac{l}{y} < 1, \tag{7.6.6}$$

which is true, after (7.4.9), if

$$\frac{l}{h} - \frac{lt}{hk'} < 1,$$

i. e. if

$$t > \Big(\frac{l}{h} - 1\Big) \frac{hk'}{l} = \frac{l-h}{l} k'. \tag{7.6.7}$$

We have then, again by Hölder's inequality,

$$\begin{aligned} W^l &\leqq V^{\frac{kl}{z}} (\Sigma d_n)^{\frac{l}{y}} \Big(\Sigma (U_n^{(\mu)})^{\frac{l}{k'} \frac{y}{y-l}} \Big)^{\frac{y-l}{y}} \\ &= V^{\frac{kl}{z}} \cdot U^{\frac{hl}{y}} V^{\frac{kl}{y}} \cdot N^{\frac{y-l}{y}}, \end{aligned} \tag{7.6.8}$$

where

$$N = \Sigma (U_n^{(\mu)})^{\frac{ly}{k'(y-l)}}. \tag{7.6.9}$$

7.7. Now

$$u_n^P = u_n^{Pt} = u_n^h, \tag{7.7.1}$$

where

$$P = \frac{h}{t} > 1 \tag{7.7.2}$$

if

$$t < h. \tag{7.7.3}$$

Assuming this to be true, and defining Q by

$$Q = \frac{l\,y}{k'(y-l)}, \tag{7.7.4}$$

we have

$$\frac{1}{P} - \frac{1}{Q} = \frac{t}{h} - \frac{k'(y-l)}{l\,y} = \frac{t}{h} - k'\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{h} + \frac{t}{h\,k'}\right)$$

$$= -k'\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{h}\right) = 1 - x\,k' = \mu.$$

We can again apply Lemma 18, with P, Q for h, l; and we obtain

$$N = \Sigma\,(U_n^{(u)})^Q \leqq K\,(\Sigma\,u_n^P)^{\frac{Q}{P}} \tag{7.7.5}$$

$$= K\,(\Sigma\,u_n^h)^{\frac{l\,y\,t}{h\,k'(y-l)}} = K\,U^{\frac{l\,y\,t}{k'(y-l)}}.$$

Finally, combining (7.6.8) and (7.7.5), we obtain

$$W^l \leqq K\,V^{\frac{k\,l}{z}} \cdot U^{\frac{h\,l}{y}}\,V^{\frac{k\,l}{y}} \cdot U^{\frac{l\,t}{k'}} = K\,(U\,V)^l,$$

by (7.4.10).

The proof demands that t shall satisfy (7.4.14), (7.6.7), and (7.7.3), and it remains to prove that such a choice of t is possible. The conditions are

$$\frac{k-h}{k-1} < t < k', \quad \frac{l-h}{l}\,k' < t < h;$$

and it is necessary and sufficient that

$$\mathrm{Max}\left(\frac{k-h}{k-1}, \frac{l-h}{l}\,k'\right) < \mathrm{Min}\,(k', h). \tag{7.7.6}$$

If we examine the four inequalities contained in (7.7.6), we find that one is satisfied whenever $h > 0$ and $k > 1$, one whenever $h > 1$ and $k > 1$, and one whenever $l > h > 0$ and $k > 1$; while the fourth is

$$\frac{l-h}{l}\,k' < h,$$

and reduces to (7.4.2) when $h > 0$ and $k > 1$. Hence all the inequalities are true under the conditions of Lemma 19; and this completes the proof of the lemma.

It is to be observed that the proof of the lemma is considerably easier when (7.5.6) is satisfied and we can use the argument of § 7.5. We shall refer to this case as Case (a) and to the more difficult case defined by (7.6.1) as Case (b).

Discussion of C_1.

7.8. In each of Cases V–IX we have to consider C_1 and C_2 separately. We begin by considering C_1 in all five cases.

In the reduced case V_0, we have

(7.8.1) $$\pi > 1,\ 1 < p < r \leqq q < \infty,\ \alpha < 1,\ \beta = \beta_0$$

and

$$c_{n,1} \leqq K \sum s^{-x} b_s a_{n-s},$$

where

(7.8.2) $$x = \beta_0 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 0\ ^{10}).$$

If we take

$$h = p,\ k = q,\ l = r,\ u_n = a_n,\ v_n = b_n,$$

then, since $\pi > 1$, the conditions of case (a) of Lemma 19 are satisfied, and

(7.8.3) $$C_1 = \left(\sum c_{n,1}^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqq KW \leqq KUV = KAB.$$

In Case VI_0 the proof of (7.8.3) in the same, except that $\pi \leqq 1$ and so

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} \geqq 1,$$

and we must use the more difficult case (b) of Lemma 19.

In case VII_0 we have

(7.8.4) $$\pi \geqq 1,\ 1 < p \leqq q < r < \infty,\quad \alpha = \alpha_0,\quad \beta = \beta_0.$$

We take $h, k, \ldots$ as before, and the argument is still valid; we use case (a) of Lemma 19 when $\pi > 1$ and case (b) when $\pi = 1$.

In Case $VIII_0$

(7.8.5) $$\pi < 1,\ 1 < p \leqq q < r < \frac{\pi}{1-\pi},\quad \alpha = \alpha_0,\quad \beta = \beta_0.$$

Here

$$x = 1 - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{r} > 0,$$

and we can still use case (b) of Lemma 19. Hence we obtain (7.8.3) from Lemma 19 in all these four cases.

There remains Case IX_0, in which

$$r = \frac{\pi}{1-\pi},\quad \alpha = \alpha_0,\quad \beta = \beta_0.$$

---

[10]) $x = 0$ in the exceptional case $p = 1$, $q = r$, excluded at present [*i. e.* in (7.8.1)].

In this case $x = 0$, and the proof is simpler and does not depend on Lemmas 18 and 19. We have in fact

$$c_{n,1} \leqq K \sum b_s a_{n-s} = K \sum (a_{n-s}^p)^{\frac{1}{q'}} (b_s^q)^{\frac{1}{p'}} (b_s^q a_{n-s}^p)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leqq K (\sum a_{n-s}^p)^{\frac{1}{q'}} (\sum b_s^q)^{\frac{1}{p'}} (\sum b_s^q a_{n-s}^p)^{\frac{1}{r}},$$

$$c_{n,1}^r \leqq K A^{\frac{pr}{q'}} B^{\frac{qr}{p'}} \sum_{s<n} b_s^q a_{n-s}^p,$$

$$C_1^r \leqq K A^{\frac{pr}{q'}} B^{\frac{qr}{p'}} \sum_n \sum_{s<n} b_s^q a_{n-s}^p$$

$$= K A^{\frac{pr}{q'}} B^{\frac{qr}{p'}} A^p B^q = K (A B)^r,$$

which is (7.8.3) [11]).

Discussion of C_2.

7.9. When we come to C_2, a distinction appears between Cases V and VI on the one hand and Cases VII, VIII and IX on the other. The last three cases are (apart from the inequality $p \leqq q$, which is irrelevant here) symmetrical as between p, α, α_0 and q, β, β_0, so that C_2 may be discussed in the same way as C_1. In Cases V and VI an independent discussion is necessary. This does not depend on the difficult argument of §§ 7.4—7.7, but proceeds rather on the lines of § 6.5, though it is not actually covered by the argument of that section.

We have in fact, after (7.3.2),

$$c_{n,2} \leqq K n^{\alpha-\alpha_0} \delta_n, \tag{7.9.1}$$

where

$$\delta_n = \sum_{s<n} s^{-\alpha+\frac{1}{p}} a_s b_{n-s}. \tag{7.9.2}$$

Here

$$\delta_n = \sum_{s<n} (s^{-k})^{\frac{1}{p'}} (a_s^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (s^h a_s^p b_{n-s}^r)^{\frac{1}{r}} \tag{7.9.3}$$

$$\leqq A^{1-\frac{p}{r}} (\sum_{s<n} s^{-k})^{\frac{1}{p'}} (\sum_{s<n} s^h a_s^p b_{n-s}^r)^{\frac{1}{r}},$$

if h and k are chosen to satisfy

$$\frac{k}{p'} - \frac{h}{r} = \alpha - \frac{1}{p}$$

[11]) The argument is that of Young [10, 11].

or

$$k = -\frac{p'}{p} + p'\left(\alpha + \frac{h}{r}\right) = 1 - p' + p'\left(\alpha + \frac{h}{r}\right) \tag{7.9.4}$$

$$= 1 - p'\left(1 - \alpha - \frac{h}{r}\right).$$

From (7.9.4) it follows that

$$k < 1 \tag{7.9.5}$$

if $h = 0$ or if h is small and positive; and then (7.9.3) gives

$$\delta_n \leqq K n^{\frac{1-k}{p'}} A^{1-\frac{p}{r}} \Big(\sum_{s<n} s^h a_s^p b_{n-s}^r\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{7.9.6}$$

We now write

$$a_n^p = \xi_n, \qquad b_n^r = \eta_n. \tag{7.9.7}$$

Then (7.9.1) and (7.9.6) give

$$c_{n,2}^r \leqq K A^{r-p} n^{-\varrho} \sum_{s<n} s^h \xi_s \eta_{n-s}, \tag{7.9.8}$$

where

$$\varrho = -r(\alpha - \alpha_0) - \frac{1-k}{p'} r \tag{7.9.9}$$

$$= -r\left(\alpha - 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) - r\left(1 - \alpha - \frac{h}{r}\right) = 1 - \frac{r}{q} + h.$$

We now distinguish two cases.

(a) If $r = q$, we take $h = 0$, and so $\varrho = 0$. Then

$$\sum_n c_{n,2}^r \leqq K A^{r-p} \sum_n \sum_{s<n} \xi_s \eta_{n-s}$$

$$\leqq K A^{r-p} \sum_{s,t} \xi_s \eta_t = K A^{r-p} A^p B^r = K (A B)^r.$$

(b) If $r < q$, we take h small and positive. Then

$$\sum_n c_{n,2}^r \leqq K A^{r-p} \sum_n \sum_{s<n} n^{-\varrho} s^h \xi_s \eta_{n-s} \tag{7.9.10}$$

$$\leqq K A^{r-p} \sum_{s,t} s^h (s+t)^{-\varrho} \xi_s \eta_t.$$

The coefficient of $s^h \xi_s$ in the double series is

$$\sum_t (s+t)^{-\varrho} \eta_t \leqq \Big(\sum_t \eta_t^{\frac{q}{r}}\Big)^{\frac{r}{q}} \Big(\sum_t (s+t)^{-\frac{\varrho q}{q-r}}\Big)^{1-\frac{r}{q}}.$$

Here the first factor is $\big(\sum b_n^q\big)^{\frac{r}{q}} = B^r$. The second factor is less than

$$K s^{\frac{q-r}{q} - \varrho} = K s^{-h},$$

provided that

$$\frac{\varrho q}{q-r} > 1$$

or
$$\varrho > 1 - \frac{r}{q};$$
and this is true because h is positive. It therefore follows from (7.9.10) that
$$\sum_n c_{n,2}^r \leqq K A^{r-p} B^r \sum_s \xi_s = K A^{r-p} B^r A^p = K (A B)^r.$$

7.10. This disposes of C_2 in Cases V and VI. In the remaining cases no independent discussion is required. We have therefore completed the proof of the theorem, except for the exceptional cases which fall under Cases V—IX.

8.

Cases V—IX of truth (exceptional cases).

8.1. We have now to analyse the exceptional cases. After § 6.10, we may suppose p finite, and ignore the case $p = q = r = 1$, which falls under III.

(i) Case V. Here $\pi > 1$, $p < r \leqq q$. Since $\pi > 1$, $p > 1$. Hence the only exceptional possibilities are

(i, 1) $\qquad 1 < p < r < q = \infty,$

(i, 2) $\qquad 1 < p < r = q = \infty.$

Case (i, 1) is normal, the conditions for truth being $\alpha < 1$, $\beta \leqq \beta_0$. The argument of § 6.7 proves the result true when $\alpha < 1$, $\beta < \beta_0$; and those of § 5 prove it false when $\alpha \geqq 1$ or $\beta > \beta_0$. In the critical case $\alpha < 1$, $\beta = \beta_0$, we require the discussion of Case V in § 7, modified to cover the case $q = \infty$, or $k = \infty$, $k' = 1$. The modifications required are normal.

Case (i, 2) is a sub-case of the abnormal case (iii a) of the theorem, which belongs to Case VII when $q < \infty$, but to Case V when $q = \infty$, $\alpha_0 = 1$. The normal condition for truth would be
$$\alpha < 1, \quad \beta \leqq \beta_0 = 1 - \frac{1}{p},$$
while actually we require $\alpha < 1$, $\beta < \beta_0$. The result is true when $\alpha < 1$, $\beta < \beta_0$, by the argument of § 6.7, and false when $\alpha \geqq 1$ or $\beta > \beta_0$, by the arguments of § 5. To prove it false when $\alpha < 1$, $\beta = \beta_0$, requires a new example. We take
$$a_n = n^{\frac{1}{p} - \alpha} (N - n)^{-\frac{1}{p}} \quad (n < N), \quad a_n = 0 \quad (n \geqq N),$$
and $b_n = n^{-\frac{1}{p'}}$. Then
$$A^p = \sum_1^{N-1} n^{-1} \cdot n \cdot (N - n)^{-1} \sim \log N, \quad B = \operatorname{Max} (n^\beta b_n) = 1,$$

and

$$c_N > \sum_{\frac{1}{2}N}^{N-1} n^{\frac{1}{p}-\alpha}(N-n)^{-1} > K N^{\frac{1}{p}-\alpha}\log N = K N^{-\gamma}\log N,$$

so that

$$C > K \log N.$$

Since $p > 1$, $C \leqq K A B$ is false for sufficiently large N.

8.2. Case VI. There are four exceptional cases, viz.

(ii, 1) $\quad p = 1, \quad 1 < r < q < \infty,$

(ii, 2) $\quad p = 1, \quad 1 < r = q < \infty,$

(ii, 3) $\quad p = 1, \quad 1 < r < q = \infty,$

(ii, 4) $\quad p = 1, \quad r = q = \infty.$

If $q = \infty$, p is necessarily 1, since $\pi \leqq 1$. Of these cases, (ii, 1) and (ii, 3) cover the abnormal case (iii b) of the theorem, and (ii, 2) and (ii, 4) cover the abnormal case (iii c) [12].

Consider first case (ii, 1). The normal condition would be $\alpha < 1$, $\beta \leqq \beta_0$; but that actually required is $\alpha < 1$, $\beta < \beta_0$. It follows from § 6.7 that **(I)** is true under these last conditions, and from § 5 that it is false if $\alpha \geqq 1$ or $\beta > \beta_0$. We require a new example to prove its falsity when

$$\alpha < 1, \quad \beta = \beta_0 = \frac{1}{r}.$$

In this case **(I)** would assert: if

$$\sum n^{\alpha-1} a_n = A, \quad \sum n^{\frac{q}{r}-1} b_n^q = B^q, \quad \sum n^{\alpha r - r} c_n^r = C^r,$$

then $C \leqq K A B$. We take $a_N = N^{1-\alpha}$, the remaining a_n zero, and

$$b_n = n^{-\frac{1}{r}} \quad (n < 2N), \qquad b_n = 0 \quad (n \geqq 2N).$$

Then $A = 1$ and

$$B^q = \sum_{n<2N} n^{-1} \sim \log N.$$

If $N < n < 2N$, c_n includes the term $a_N b_{n-N}$, so that

$$c_n \geqq \frac{N^{1-\alpha}}{(n-N)^{\frac{1}{r}}}.$$

Hence

$$C^r \geqq \sum_{N+1}^{2N-1} n^{\alpha r - r} N^{r-\alpha r} \frac{1}{n-N} > K \log N,$$

---

[12]) Apart from the special case $p = q = r = 1$, already accounted for.

It is the case (iii b) which we overlooked in [1]. We were not then contemplating infinite values of the parameters, so that case (iii a) did not arise.

and

$$K(\log N)^{\frac{1}{r}} \leqq C \leqq KAB \leqq K(\log N)^{\frac{1}{q}}$$

is false when N is large.

This accounts for case (ii, 1), and case (ii. 3) requires only a normal variation of the argument with $q = \infty$.

In case (ii, 2) the normal condition would be $\alpha < 1$, $\beta \leqq \beta_0$. Actually we require only $\alpha \leqq 1$, $\beta \leqq \beta_0$. **(I)** is false, after § 5, if $\alpha > 1$ or $\beta > \beta_0$, and it is enough to prove it true when

$$\alpha = 1, \quad \beta = \beta_0 = \frac{1}{r} = \frac{1}{q}.$$

(I) then asserts that

$$\Sigma a_n = A, \quad \Sigma b_n^q = B^q$$

imply

$$C^q = \Sigma c_n^q \leqq K(AB)^q;$$

and in fact

$$c_n = \sum_{s<n} a_s b_{n-s} = \sum_{s<n} a_s^{\frac{q-1}{q}} a_s^{\frac{1}{q}} b_{n-s} \leqq (\sum_{s<n} a_n)^{\frac{q-1}{q}} (\sum_{s<n} a_s b_{n-s}^q)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_n c_n^q \leqq A^{q-1} \sum_n \sum_{s<n} a_s b_{n-s}^q \leqq A^{q-1} \sum_{s,t} a_s b_t^q = A^{q-1}(AB^q) = (AB)^q.$$

The variation of the argument in case (ii, 4), when $q = \infty$, is normal (and the result trivial).

This completes the discussion of case VI, and of all the abnormal cases except (iii a).

8.3. Case VII. Since $\pi \geqq 1$, p cannot be 1 unless $q = \infty$, which is here impossible. Hence there is only one case to consider, viz.

(iii, 1) $$1 < p \leqq q < r = \infty.$$

If $\pi = 1$, $q = p'$, then $\alpha_0 = \frac{1}{p}$, $\beta_0 = \frac{1}{q}$. In the critical case $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, **(I)** becomes

$$\operatorname{Max} c_n \leqq (\Sigma a_n^p)^{\frac{1}{p}} (\Sigma b_n^{p'})^{\frac{1}{p'}},$$

a trivial consequence of Hölder's inequality. This case is therefore normal.

When $\pi > 1$, we encounter the abnormal case (iii a) of the theorem. The normal condition would be $\alpha \leqq \alpha_0$, $\beta \leqq \beta_0$. In fact we require $\alpha < \alpha_0$, $\beta < \beta_0$. It follows from § 6.8 that (I) is true then, and we require an example to prove it false when $\alpha = \alpha_0$, $\beta < \beta_0$, or $\alpha < \alpha_0$, $\beta = \beta_0$.

It is enough to consider the first of these alternatives. We have then

$$\alpha = \alpha_0 = 1 - \frac{1}{q}, \qquad \beta < \beta_0 = 1 - \frac{1}{p},$$

so that

$$\gamma = \beta - \frac{1}{q}.$$

We suppose N large and odd, and define the a_n and b_n of § 6.2 by

$$a_n = a_{N-n} = n^{-\frac{1}{p}} (\log n)^{-\varrho} \qquad (2 \leqq n \leqq N-2),$$

$$b_n = b_{N-n} = n^{-\frac{1}{q}} (\log n)^{-\sigma} \qquad (2 \leqq n \leqq N-2),$$

and $a_n = b_n = 0$ for other values of n. Then

$$c_N = \sum_{n<N} a_n b_{N-n} = \sum_{n<N} n^{\frac{1}{p}-\alpha} a_n \; (N-n)^{\frac{1}{q}-\beta} b_{N-n}$$

$$> K N^{\frac{1}{q}-\beta} \sum_{n<\frac{1}{2}N} n^{\frac{1}{p}-\alpha} \cdot n^{-\frac{1}{p}} (\log n)^{-\varrho} \cdot n^{-\frac{1}{q}} (\log n)^{-\sigma}$$

$$= K N^{\frac{1}{q}-\beta} \sum_{n<\frac{1}{2}N} n^{-1} (\log n)^{-\varrho-\sigma} > K N^{\frac{1}{q}-\beta} (\log N)^{1-\varrho-\sigma},$$

provided that

$$\varrho + \sigma < 1. \tag{8.3.1}$$

Also

$$A^p < \sum n^{-1} (\log n)^{-p\varrho} < K, \qquad B^q < \sum n^{-1} (\log n)^{-q\sigma} < K$$ [13])

if

$$p\varrho > 1, \qquad q\sigma > 1. \tag{8.3.2}$$

If (8.3.1) and (8.3.2) are both satisfied, then

$$C = \operatorname{Max} (n^\gamma c_n) \geqq N^{\beta-\frac{1}{q}} c_N > K (\log N)^{1-\varrho-\sigma}$$

is certainly not less than $K A B$ for large N. Finally, since

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1,$$

it is possible to choose ϱ and σ to satisfy (8.3.1) and (8.3.2).

8.4. *Cases* VIII *and* IX. The only exceptional possibility is $p = 1$, and then $q = \frac{\pi}{1-\pi}$, so that r cannot be greater than q. There are therefore no exceptional cases.

We have thus exhausted all possible cases, and the proof is finished.

[13]) If ϱ and σ are fixed, so as to satisfy (8.3.1) and (8.3.2).

9.

Special cases.

9.1. If $a_n = b_n$ for all n, and the parameters have the appropriate values, then

$$p = q,\ \alpha = \beta,\ \gamma = 2\alpha - 1,\ \pi = \tfrac{1}{2}p,\ \alpha_0 = \beta_0 = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r},$$

and **(I)** is

(9.1.1: **I***) $$C \leqq K A^2.$$

The theorem then becomes

Theorem 2. (i) (*Ordinary and exceptional cases*). *It is necessary for the truth of* **(I*)** *that*

(9.1.2) $$p \geqq 1.$$

(ii) (*Ordinary cases*). *It is necessary and sufficient for the truth of* **(I*)**, *in an ordinary case, that* p *should satisfy* (9.1.2) [*so that* $p > 1$] *and one or other of*

(9.1.3) $$\tfrac{1}{2}p \leqq r \leqq p, \qquad \alpha < 1,$$

(9.1.4) $$p \geqq 2, \qquad r > p, \qquad \alpha \leqq \alpha_0,$$

(9.1.5) $$p < 2, \qquad p < r \leqq \frac{p}{2-p}, \qquad \alpha \leqq \alpha_0.$$

(iii) (*Exceptional cases*). *The only case in which* (I*) *is true when* $p = \infty$ *is the case*

$$r = p = \infty, \qquad \alpha < 1.$$

This is a normal case of (9.1.3).

There are two exceptional cases which are abnormal.

(iii e) *If* $p > 2$, $r = \infty$, *then* $\alpha \leqq \alpha_0$ *in* (9.1.4) *must be replaced by* $\alpha < \alpha_0$.

(iii f) *If* $p = 1$, $r = 1$, *then* $\alpha < 1$ *in* (9.1.3) *must be replaced by* $\alpha \leqq 1$.

There is only one thing to be added to the proof of Theorem 1. When we have to prove (I) or (I*) true, Theorem 1 includes Theorem 2; when we have to prove it false, our 'Gegenbeispiel' must be one symmetrical in a_n and b_n. We may leave it to the reader to verify that the examples which we have constructed satisfy this condition, the only case in which any difficulty arises being that considered in detail in § 5.2.

The case $r = 1$.

9.2. If $r = 1$, and **(I)** is true, then

$$\pi \leqq r = 1 \leqq p,$$

and so, by (2.1.2), $\alpha < 1$ and $\beta < 1$, except in the special case $p = q = r = 1$, when it is enough that $\alpha \leqq 1$ and $\beta \leqq 1$.

In this case (I) becomes

$$\Sigma\Sigma(\mu+\nu)^{\alpha+\beta-2}\mu^{\frac{1}{p}-\alpha}\nu^{\frac{1}{q}-\beta}a_\mu b_\nu \leqq K(\Sigma a_\mu^p)^{\frac{1}{p}}(\Sigma b_\nu^q)^{\frac{1}{q}}.$$

If we write

$$\lambda = 2-\frac{1}{\pi}, \qquad \alpha-\frac{1}{p}=\gamma, \qquad \beta-\frac{1}{q}=\delta,$$

then

$$0<\lambda\leqq 1, \qquad \gamma<\frac{1}{p'}, \qquad \delta<\frac{1}{q'}.$$

We thus obtain

Theorem 3. *If*

$$p\geqq 1, \qquad q\geqq 1, \qquad \frac{1}{\pi}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqq 1, \qquad \lambda=2-\frac{1}{\pi},$$

then, in order that

$$\sum\sum\frac{a_\mu b_\nu}{\mu^\gamma\nu^\delta(\mu+\nu)^{\lambda-\gamma-\delta}}\leqq K(\Sigma a_\mu^p)^{\frac{1}{p}}(\Sigma b_\nu^q)^{\frac{1}{q}},$$

it is necessary and sufficient that

$$\gamma<\frac{1}{p'}, \qquad \delta<\frac{1}{q'};$$

except when $p=q=1$, *when it is necessary and sufficient that*

$$\gamma\leqq 0, \qquad \delta\leqq 0.$$

When $\pi=1$, $\gamma=\delta=0$, we obtain

$$\sum\sum\frac{a_\mu b_\nu}{\mu+\nu}\leqq K(\Sigma a_\mu^p)^{\frac{1}{p}}(\Sigma b_\nu^q)^{\frac{1}{q}}.$$

In this case more is known, the best possible value of K being $\pi\operatorname{cosec}\frac{\pi}{p}$. The case $p=q=2$ is Hilbert's double series theorem (apart from the determination of K).

The case $r=\pi$.

9.3. The conditions for the truth of **(I)** when $r=\pi$ are $\alpha<1$, $\beta<1$; and this is true both when (i) $\pi\geqq 1$ and when (ii) $\pi<1$, though the method of proof is quite different in the two cases. A further difference between the two cases appears when we analyse the question further, since in case (i) it is (with certain reservations) possible to find the best value of K[14]).

There are some interesting special cases.

(a) If

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{p}, \qquad \beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{q},$$

[14]) Hardy and Littlewood [4].

then $r\gamma - 1 = 0$. In this case p and q must be greater than 2, and **(I)** becomes

$$(9.3.1) \qquad (\Sigma c_n^{\pi})^{\frac{1}{\pi}} \leqq K (\Sigma n^{\frac{1}{2}p} a_n^p)^{\frac{1}{p}} (\Sigma n^{\frac{1}{2}q} b_n^q)^{\frac{1}{q}} \quad (p > 2,\ q > 2).$$

This inequality is false when $p = q = 2$. If $p = q = 4$, $\pi = 2$, we obtain

$$(9.3.2) \qquad (\Sigma c_n^2)^2 \leqq K \Sigma n^2 a_n^4 \Sigma n^2 b_n^4,$$

an inequality which we shall refer to again later.

(b) When

$$\alpha = 1 - \frac{1}{p}, \qquad \beta = 1 - \frac{1}{q},$$

we obtain

$$(9.3.3) \qquad (\Sigma n^{\pi-2} c_n^{\pi})^{\frac{1}{\pi}} \leqq K (\Sigma n^{p-2} a_n^p)^{\frac{1}{p}} (\Sigma n^{q-2} b_n^q)^{\frac{1}{q}};$$

this is true for $p \geqq 1$, $q \geqq 1$. When $p = q = 4$, we obtain (9.3.2) again. When $p = q = 2$, $\pi = 1$, we obtain Hilbert's theorem.

The cases $\alpha = \beta = 0$ and $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ are also of some interest.

The case $r = \dfrac{\pi}{1-\pi}$.

9.4. If $\pi < 1$, $r = \dfrac{\pi}{1-\pi}$, then $\alpha_0 = \dfrac{1}{p}$, $\beta_0 = \dfrac{1}{q}$. The most striking case is the case $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ which gives

$$(9.4.1) \qquad (\Sigma c_n^{\frac{\pi}{1-\pi}})^{\frac{1-\pi}{\pi}} \leqq K (\Sigma a_n^p)^{\frac{1}{p}} (\Sigma b_n^q)^{\frac{1}{q}};$$

this is true for $p \geqq 1$, $q \geqq 1$, $\pi < 1$, and, apart from the constant, is Young's inequality. The right value of K is in fact 1.

The case $\alpha = \dfrac{1}{p}$, $\beta = \dfrac{1}{q}$.

9.5. In this case $\gamma = \dfrac{1-\pi}{\pi}$, and **(I)** is

$$(9.5.1) \qquad (\Sigma n^{\frac{r}{\pi}-r-1} c_n^r)^{\frac{1}{r}} \leqq K (\Sigma a_n^p)^{\frac{1}{p}} (\Sigma b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

The conditions $\alpha < 1$, $\beta < 1$ are satisfied when $p > 1$, so that **(I)** is true for $p > 1$, $\pi \leqq r \leqq p$.

The conditions $\alpha \leqq \alpha_0$ and $\beta \leqq \beta_0$ both reduce to

$$\frac{1}{r} \geqq \frac{1}{\pi} - 1.$$

This is certainly satisfied if $\pi \geqq 1$, while if $\pi < 1$ it is

$$r \leqq \frac{\pi}{1-\pi}.$$

It is also satisfied when $\pi \geqq 1$, $r = \infty$. Hence **(I)** is true for

$$p > 1, \qquad \pi \leqq r \leqq \frac{\pi}{1-\pi} \ (\pi < 1), \qquad \pi \leqq r \leqq \infty \ (\pi \geqq 1).$$

It is also true when $p = 1$, $r = q$, but in no other case in which $p = 1$.

The cases $r = \pi$ and $r = \frac{\pi}{1-\pi}$ overlap with cases considered already. Other cases are

$$\sum n \left(\frac{c_n}{n}\right)^p \leqq K \sum a_n^p \sum b_n^p \qquad (p \geqq 1), \tag{9.5.2}$$

$$\left(\sum \frac{c_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \leqq K \left(\sum a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_n^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (p > 1, \ r \geqq 1). \tag{9.5.3}$$

The cases $r = p < q$, $p < r = q$.

9.6. The most interesting inequalities falling under this heading are

$$\sum n^{\frac{p}{q}-p} c_n^p \leqq K \sum a_n^p \left(\sum b_n^q\right)^{\frac{p}{q}}, \tag{9.6.1}$$

$$\sum n^{\frac{q}{p}-q} c_n^q \leqq K \left(\sum a_n^p\right)^{\frac{q}{p}} \sum b_n^q, \tag{9.6.2}$$

$$\sum c_n^q \leqq K \left(\sum a_n^p\right)^{\frac{q}{p}} \sum n^{q-\frac{q}{p}} b_n^q. \tag{9.6.3}$$

We state these for $1 < p < q < \infty$, without analysing the exceptional cases.

It should be observed that the inequality

$$\sum c_n^p \leqq K \sum n^{p-\frac{p}{q}} a_n^p \left(\sum b_n^q\right)^{\frac{p}{q}},$$

which is very similar to (9.6.3), is false. It corresponds to the case

$$r = p < q, \qquad \alpha = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \qquad \beta = \frac{1}{q},$$

and is false because $\alpha > 1$.

The case $p = q = r$.

9.7. When $p = q = r$, **(I)** is

$$\sum n^{p\alpha+p\beta-p-1} c_n^p \leqq K \sum n^{p\alpha-1} a_n^p \sum n^{p\beta-1} b_n^p, \tag{9.7.1}$$

and the conditions are

$$\alpha < 1, \ \beta < 1 \quad (p > 1); \qquad \alpha \leqq 1, \ \beta \leqq 1 \quad (p = 1).$$

One case is (9.5.2).

We have considered this case in detail elsewhere [15]). It is interesting because (a) we can (with certain reservations) determine K, and (b) we can pick out the cases of equality in the corresponding integral theorem.

---

[15]) Hardy and Littlewood [5].

As special cases we mention

$$\sum n c_n^p \leqq K \sum n^{\frac{1}{2}p} a_n^p \sum n^{\frac{1}{2}p} b_n^p \qquad (p > 2), \tag{9.7.2}$$

$$\sum c_n^p \leqq K \sum n^{\frac{1}{2}(p-1)} a_n^p \sum n^{\frac{1}{2}(p-1)} b_n^p \qquad (p \geqq 1). \tag{9.7.3}$$

The case $a_n = b_n$, $r = 2$, $\alpha = \beta = \frac{3}{4}$.

9.8. This is a very special sub-case of the 'symmetrical' case considered in § 9.1. It is particularly interesting on account of its function-theoretic applications.

Here

$$C^2 = \sum c_n^2 = \sum (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_n a_0)^2.$$

If $f(z) = \sum a_n z^n$ then $f^2(z) = \sum c_n z^n$, and $C < \infty$ is a necessary and sufficient condition that

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\varrho e^{i\theta})|^4 \, d\theta$$

should be bounded for $\varrho < 1$, or that $f(z)$ should belong to the 'complex class L^4'. It is a sufficient condition that any function $g(z) = \sum u_n z^n$ with $|u_n| \leqq a_n$ should belong to L^4.

If $2 \leqq p \leqq 4$, then $\pi = \frac{1}{2}p \leqq r \leqq p$, and $\alpha = \frac{3}{4} < 1$. Hence (9.1.3) shows that **(I)** is true.

If $p < 2$ then $r > p$. Hence, in order that **(I)** should be true we must, after (9.1.5), have

$$p < 2 \leqq \frac{p}{2-p}$$

or

$$\tfrac{4}{3} \leqq p < 2;$$

and then

$$\alpha_0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{p}, \qquad \alpha = \frac{3}{4} \leqq \alpha_0.$$

Combining our results, we obtain

Theorem 4. *In order that*

$$\sum c_n^3 \leqq K \Big(\sum n^{\frac{3}{4}p-1} a_n^p \Big)^{\frac{4}{p}}, \tag{9.8.1}$$

for all a_n, it is necessary and sufficient that

$$\tfrac{4}{3} \leqq p \leqq 4.$$

If $p = \frac{4}{3}$ we obtain

$$\sum c_n^3 \leqq K \Big(\sum a_n^{\frac{4}{3}} \Big)^3; \tag{9.8.2}$$

if $p = 4$,

$$\sum c_n^3 \leqq K \sum n^2 a_n^4; \tag{9.8.3}$$

and if $p = 2$,

$$\Sigma c_n^2 \leqq K\left(\Sigma n^{\frac{1}{2}} a_n^2\right). \tag{9.8.4}$$

It follows that the convergence of any of the series

$$\Sigma |u_n|^{\frac{4}{3}}, \quad \Sigma n^2 |u_n|^4, \quad \Sigma n^{\frac{1}{2}} |u_n|^2 \tag{9.8.5}$$

is a sufficient condition that $g(z) = \Sigma u_n z^n$ should belong to L^4.

These are all special cases of known theorems, the first due, substantially, to Young[16]) and the others to ourselves[17]). In order to obtain the more complete theorems in which the number 4 is replaced by an arbitrary even integer $2k$, it is necessary to generalise Theorems 1 and 2 in the direction explained in § 3.1 (iv)[18]).

The case $q = \infty$.

9.9. When $q = \infty$, $n^\beta b_n \leqq B$ and b_n is $O(n^{-\beta})$. The most interesting case is that in which

$$b_n = n^{-\beta} = n^{\omega-1}.$$

In this case

$$c_n = \sum_{s<n} (n-s)^{\omega-1} a_s = a_n^{(\omega)}$$

is substantially the Cesàro or Riesz sum of the a_n of order $\omega - 1$, and

$$a_n^{(\omega)} = n^{-\omega} a_n^{(\omega)}$$

the corresponding mean.

It is easy to see that $\omega \geqq 0$ in any case of truth. In the first place, $\beta < 1$ is $\omega > 0$. Next

$$\beta_0 = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

and $\pi = p$, so that $r \geqq p$ in all cases of truth. Hence $\beta_0 \leqq 1$, and $\beta_0 < 1$ except when $p = r$. It follows that $\omega \geqq 0$, and $\omega > 0$ except perhaps in the special case just mentioned.

If $1 < p < r < \infty$, we obtain

$$\Sigma n^{r\alpha-1} \left(a_n^{(\omega)}\right)^r \leqq K\left(\Sigma n^{p\alpha-1} a_n^p\right)^{\frac{r}{p}}, \tag{9.9.1}$$

for

$$\alpha < 1, \quad \omega \geqq \frac{1}{p} - \frac{1}{r}. \tag{9.9.2}$$

In particular, when $\omega = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, we have[19])

$$\Sigma \left(a_n^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\right)^r \leqq K\left(\Sigma a_n^p\right)^{\frac{r}{p}}. \tag{9.9.3}$$

---

[16]) Young [10, 11].

[17]) Hardy and Littlewood [2].

[18]) There are extensions to general q, but these require additional weapons.

[19]) This is the theorem of Hardy, Littlewood, and Pólya quoted in [9]).

If $1 < p = r < \infty$, then

$$\sum n^{p\alpha-1}\left(a_n^{(\omega)}\right)^p \leqq K \sum n^{p\alpha-1} a_n^p \tag{9.9.4}$$

for $\alpha < 1$, $\omega > 0$. In particular

$$\sum \left(a_n^{(\omega)}\right)^p \leqq K \sum a_n^p \tag{9.9.5}$$

for $\omega > 0$.

If $1 = p < r < \infty$, we are in the abnormal case (iii b), and must alter (9.9.2) to

$$\alpha < 1, \quad \omega > 1 - \frac{1}{r}.$$

The case $r = p = 1$ falls normally under (9.9.4).

The cases $p > 1$, $r = \infty$ and $p = 1$, $r = \infty$ are examples of the abnormal cases (iii a) and (iii d) respectively.

References.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood.

[1] Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions. Journ. f. Math. 157 (1927), S. 141—158.

[2] Two inequalities. Journ. Lond. Math. Soc. 2 (1927), p. 196—201.

[3] Some properties of fractional integrals (I). Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 566—606.

[4] Some more inequalities. Journ. Lond. Math. Soc. 3 (1928), p. 294—299.

[5] Some more integral inequalities. Tôhoku Math. Journ. 37 (1933), p. 151—159.

G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya.

[6] The maximum of a certain bilinear form. Proc. London Math. Soc. (2), 25 (1926), p. 265—282.

[7] *Inequalities* (Cambridge 1934).

K. Knopp.

[8] Über Summen der Form $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$. Rendiconti Palermo 32 (1911), p. 95—110.

F. Riesz.

[9] Sur une inégalité intégrale. Journ. London Math. Soc. 5 (1930), p. 162—168.

W. H. Young.

[10] Sur la généralisation du théorème de Parseval. Compt. Rend. 155 (1912), p. 30—33.

[11] On the determination of the summability of a function by means of its Fourier constants. Proc. London Math. Soc. (2), 12 (1913), p. 71—88.

A. Zygmund.

[12] On an integral inequality. Journ. London Math. Soc. 8 (1933), p. 175—178.

(Eingegangen am 29. September 1934.)

Eine projektive Kennzeichnung der den Geraden äquivalenten Kurvensysteme*).

Von

Karl Heinrich Berger in Freiburg i. Br.

Einleitung.

Wenn sich eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung eineindeutig und stetig in die Differentialgleichung der Geraden überführen lassen soll, so muß sie notwendig der gegenüber Punkttransformationen invarianten Klasse

$$y'' - f^3 \cdot (y')^3 + 3 f^2 \cdot (y')^2 - 3 f^1 \cdot y' + f^0 = 0 \tag{I}$$

angehören. Zwischen den Koeffizienten $f^k = f^k(x, y)$ einer solchen Differentialgleichung müssen dann überdies noch gewisse Beziehungen bestehen. Die Herleitung dieser für die Transformierbarkeit notwendigen und hinreichenden Bedingungen kann auf verschiedene Weise erfolgen.

So treten sie auf als Invarianten der Klasse (I), die für unsern besonderen Fall verschwinden müssen, bei R. Liouville[1]), A. Tresse[2]) und A. Koppisch[3]). Als Grundlage für eine Reihe „textilgeometrischer" Fragen hat G. Thomsen[4]) die Bestimmung derselben Invarianten mit Hilfe des Ricci-Kalküls vorgenommen.

Durchsichtiger ist wohl ihre Ableitung als Integrationsbedingungen, wie sie sich bei S. Lie[5]) findet und in § 1 kurz skizziert werden soll (unabhängig vom Lieschen Weg).

Die Transformierbarkeit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung auf die Form $y'' = 0$ ist gleichbedeutend mit der Abbildbarkeit ihrer

---

*) Diese Arbeit ist von der Naturwissenschaftlich-Mathematischen Fakultät der Universität Heidelberg als Inaugural-Dissertation angenommen worden.

[1]) R. Liouville, „Sur quelques équations . . .", Journ. de l'Ec. Polyt. Cah. 57, Paris 1887, und „Mémoire sur les invariants . . .", ebenda Cah. 59, 1889.

[2]) A. Tresse, „Détermination des invariants ponctuels . . .", Preisschrift d. Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. 1896.

[3]) A. Koppisch, „Zur Invariantentheorie d. gew. Differentialgl. zweiter Ordnung", Dissert. Greifswald 1905.

[4]) G. Thomsen, Topol. Fragen der Differentialgeometrie XVI. Hamb. Abhdlg., Bd. VII. Leipzig 1930.

[5]) S. Lie, „Klassifikation und Integration . . ." III. § 1. Archiv for Mathematik . . ., Kristiania 1883, und Gesammelte Abhandlungen V, 1, S. 362—370. Leipzig 1924.

Integralkurven auf die Geraden der Ebene. Wegen der geforderten Eineindeutigkeit und Stetigkeit bestehen dann zwischen diesen Integralkurven sämtliche Beziehungen der ebenen projektiven Geometrie; sie sind den Geraden „topologisch äquivalent".

Das eigentliche Ziel dieser Abhandlung besteht nun darin, eine einfache projektive Beziehung zwischen den Integralkurven von (I) festzustellen, die die Abbildbarkeit auf die Geraden (und damit alle übrigen projektiven Beziehungen) nach sich zieht. Nach § 2 wird das der perspektive Pappus-Pascalsche Satz leisten.

Unsere Untersuchungen müssen wir sinngemäß auf solche einfach zusammenhängende Bereiche ($\mathfrak{E}$) beschränken, wo durch zwei Punkte genau eine Integralkurve festgelegt ist. Die Voraussetzungen über die f^k in (I) verbürgen in jedem Falle die Existenz solcher Bereiche[6]).

Für die Anregung zu dieser Abhandlung und wertvolle Ratschläge bin ich Herrn H. Liebmann in Heidelberg zu größtem Dank verpflichtet.

§ 1.

Die Transformation einer Differentialgleichung auf die Form $y'' = 0$.

Die Abbildungsfunktionen

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

seien in ($\mathfrak{E}$) als stetig, viermal partiell differenzierbar und eineindeutig mit nirgends verschwindender Funktionaldeterminante vorausgesetzt.

Die partielle Differentiation nach x und y wird durch untere Indizes 1, bzw. 2 angedeutet. Ferner wird für die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_k & v_k \end{vmatrix}, \qquad (i, k = 1, 2, 11, 12, \ldots)$$

das Symbol

$$(i, k) = -(k, i)$$

angewandt, für das Rechen- und Differentiationsregeln sofort aus der ursprünglichen Bedeutung abzuleiten sind. Insbesondere bedeutet $D = (1, 2)$ die Funktionaldeterminante.

Durch

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

werden den Kurven

$$y = y(x)$$

der (x, y)-Ebene Kurven

$$u = u(x, y(x)), \quad v = v(x, y(x))$$

in der (u, v)-Ebene zugeordnet.

---

[6]) E. Picard, „Traité d'analyse" t. III. chap. V. f. Paris 1896. M. Fukuhara, „Quelques recherches sur les équations différentielles du second ordre". Japanese Journal ..., 5, Tokio 1928.

Einer zweigliedrigen Kurvenschar eines Bereiches ($\mathfrak{E}$) der (x, y)-Ebene soll nun eineindeutig die Gesamtheit der Geraden der (u, v)-Ebene zugeordnet sein:

$$\begin{vmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{vmatrix} = 0 \qquad (x \text{ ist Parameter}).$$

In diese Form der Differentialgleichung der Geraden ist nunmehr einzuführen:

$$u' = u_1 + u_2 y', \qquad v' = v_1 + v_2 y',$$
$$u'' = u_{11} + 2u_{12} y' + u_{22}(y')^2 + u_2 y'', \quad v'' = v_{11} + 2v_{12} y' + v_{22}(y')^2 + v_2 y'',$$

woraus sich folgende Gleichung ergibt:

$$\text{(II)} \qquad (1,2)\,y'' + (2,22)\,(y')^3 + [(1,22) + 2(2,12)]\,(y')^2 + [(2,11) + 2(1,12)]\,y' + (1,11) = 0.$$

Diesen Bau muß eine Differentialgleichung $y'' = F(x, y, y')$ haben, wenn ihre Integralkurven den Geraden der Ebene entsprechen sollen.

Ist umgekehrt eine Gleichung (I), die wir uns mit einem nichtverschwindenden Faktor D multipliziert denken, vorgegeben, so läßt sich der für die Abbildbarkeit auf die Geraden notwendige und hinreichende Bau der einzelnen Koeffizienten $f^k(x, y)$ sofort durch Koeffizientenvergleich — $D\,(\text{I}) \equiv (\text{II})$ — ermitteln. Und hieraus lassen sich dann unter Berücksichtigung der aus $D = (1,2)$ durch Differentiation folgenden Beziehungen

$$D_1 = (1,12) - (2,11),$$
$$D_2 = (1,22) - (2,12)$$

die Klammerausdrücke $(1, r\,s)$ und $(2, r\,s)$ einzeln durch f^k, D, D_1 und D_2 ausdrücken:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} (1,2) &= D, \\ (1,11) &= D f^0, \\ (1,12) &= -D f^1 + \tfrac{1}{3} D_1, \\ (2,11) &= -D f^1 - \tfrac{2}{3} D_1, \\ (1,22) &= D f^2 + \tfrac{2}{3} D_2, \\ (2,12) &= D f^2 - \tfrac{1}{3} D_2, \\ (2,22) &= -D f^3. \end{aligned}$$

Aus den Definitionsgleichungen

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} u_1 v_{rs} - v_1 u_{rs} &= (1, r\,s), \\ u_2 v_{rs} - v_2 u_{rs} &= (2, r\,s) \end{aligned}$$

folgt dann mit Rücksicht auf (1) und nach Einführung der zweckmäßigen Substitution

$$D = e^{3L}$$

für die zweiten partiellen Ableitungen von u und v:

$$(3)\quad \begin{aligned} u_{11} &= (2L_1 + f^1)\,u_1 + f^0\,u_2, \\ u_{12} &= (L_2 - f^2)\,u_1 + (L_1 - f^1)\,u_2, \\ u_{22} &= f^3\,u_1 + (2L_2 + f^2)\,u_2; \\ v_{11} &= (2L_1 + f^1)\,v_1 + f^0\,v_2, \\ v_{12} &= (L_2 - f^2)\,v_1 + (L_1 - f^1)\,v_2, \\ v_{22} &= f^3\,v_1 + (2L_2 + f^2)\,v_2. \end{aligned}$$

Die Paare von Verträglichkeitsforderungen für (3)

$$u_{112} - u_{121} = 0, \quad u_{122} - u_{221} = 0,$$
$$v_{112} - v_{121} = 0, \quad v_{122} - v_{221} = 0,$$

in denen alle höheren Ableitungen von u und v nach (3) durch die ersten ersetzt sind, führen wegen $(1, 2) \neq 0$ zu dem System

$$(4)\quad \begin{aligned} L_{11} &= (L_1)^2 + f^1 L_1 + f^0 L_2 + [-2(f^1)^2 + 2f^0 f^2 + f_2^0 + f_1^1], \\ L_{12} &= L_1 L_2 - f^2 L_1 - f^1 L_2 + [f^1 f^2 - f^0 f^3 - f_2^1 - f_1^2], \\ L_{22} &= (L_2)^2 + f^3 L_1 + f^2 L_2 + [-2(f^2)^2 + 2f^3 f^1 + f_1^3 + f_2^2]. \end{aligned}$$

Die Verträglichkeitsbedingungen

$$L_{112} - L_{121} = 0, \quad L_{122} - L_{221} = 0$$

für (4) endlich enthalten lediglich noch die f^k und ihre Ableitungen, sind also die gesuchten Transformationsbedingungen:

$$(5)\quad \begin{aligned} &f_{22}^0 + 2f_{12}^3 + f_{11}^2 + 3f^2 f_2^0 + 3f_2^2 f^0 - 3f^1 f_1^2 - 6f^1 f_2^1 + 2f^0 f_1^3 + f_1^0 f^3 = 0, \\ &f_{11}^3 + 2f_{12}^2 + f_{22}^1 + 3f^1 f_1^3 + 3f_1^1 f^3 - 3f^2 f_2^1 - 6f^2 f_1^2 + 2f^3 f_2^0 + f_2^3 f^0 = 0, \end{aligned}$$

die (unabhängig von speziellen x, y) identisch erfüllt sein müssen.

Diese notwendigen Bedingungen sind für Teilgebiete auch hinreichend (Integrabilitätsbedingungen)[7]. In einer gewissen (von der Struktur der f^k abhängigen) Umgebung eines Punktes (x^0, y^0) aus $(\mathfrak{E})$ ist mit dem Bestehen von (5) auch (4) integrabel, und durch jede Lösung L von (4) wird auch (3) integrabel, wobei die Nebenbedingung

$$u_1 v_2 - v_1 u_2 = D = e^{3L}$$

zu beachten ist.

---

[7]) (5) ist z. B. erfüllt für konstante f^k, für die lineare Form:

$$y'' - 3[f^{11} y + f^{10}]\,y' + [(f^{11})^2 (y)^3 + (3f^{10} f^{11} - f_1^{11})(y)^2 + f^{01} y + f^{00}] = 0,$$
$$(f^{ik} = f^{ik}(x)),$$

zu der die Besselsche Differentialgleichung gehört, sowie für

$$y'' + 3f^2(y) \cdot (y')^2 - 3f^1(x) \cdot y' = 0.$$

Der Bau dieser Differentialgleichung ist notwendig und hinreichend dafür, daß sich die Integralkurven allein durch Normierung der Achsen, die sich durch Quadraturen finden läßt, als Geraden darstellen.

Durch $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ werden dann den Integralkurven einer Umgebung von (x^0, y^0) die Geraden der entsprechenden Umgebung des Bildpunktes (u^0, v^0) zugeordnet, so daß sich dann also die Integralkurven von (I) um (x^0, y^0) in der Form

$$a\,u(x, y) + b\,v(x, y) + c = 0$$

(bei entsprechender Festsetzung des Variabilitätsbereichs der Parameter a, b, c) darstellen.

Wir fassen zusammen:

Bei Beschränkung auf einen Bereich $(\mathfrak{E})$ der (x, y)-Ebene, in dem durch zwei beliebige Punkte genau eine Integralkurve geht, läßt sich eine zweifach unendliche Schar von Integralkurven aus einer gewissen Umgebung eines Punktes (x^0, y^0) dann und nur dann eineindeutig analytisch in die Geraden des entsprechenden Bildbereichs der (u, v)-Ebene überführen, wenn ihre Differentialgleichung die Form (I) hat:

$$y'' - f^3(y')^3 + 3f^2(y')^2 - 3f^1 y' + f^0 = 0,$$

deren Koeffizienten $f^k = f^k(x, y)$ die Relationen (5) erfüllen:

$$f^0_{22} + 2f^1_{12} + f^2_{11} + 3f^2 f^0_2 + 3f^3_2 f^0 - 3f^1 f^3_1 - 6f^1 f^1_2 + 2f^0 f^3_1 + f^0_1 f^3 = 0,$$
$$f^3_{11} + 2f^2_{12} + f^1_{22} + 3f^1 f^3_1 + 3f^1_1 f^3 - 3f^2 f^1_2 - 6f^2 f^3_1 + 2f^3 f^0_2 + f^3_2 f^0 = 0.$$

§ 2.

Eine projektive Kennzeichnung der Abbildbarkeit auf die Geraden.

Sind die in § 1 hergeleiteten Bedingungen (5) erfüllt, so bestehen zwischen den Integralkurven von (I) die Beziehungen der ebenen projektiven Geometrie.

Wir fragen nun umgekehrt:

Welche projektive Beziehung zwischen den Integralkurven einer beliebigen Differentialgleichung (I) charakterisiert die Abbildbarkeit auf die Geraden der Ebene?

Da nur solche Bereiche $(\mathfrak{E})$ in Betracht kommen können, in denen durch zwei Punkte genau eine Kurve festgelegt ist, so können wir im folgenden mit der reduzierten Form

$$\text{(III)} \qquad y'' = 6\,p(x, y)\,y' - 6\,q(x, y)\,(y')^2$$

operieren, auf die sich (I) unter dieser Voraussetzung stets bringen läßt.

Führt man nämlich die von zwei Punkten (Polen) dieses Bereichs ausgehenden Integralkurven von (I) als Parameterlinien $\bar{x} = \text{const.}$, $\bar{y} = \text{const.}$ ein, so müssen durch diese Punkttransformation, die ja nicht aus der Klasse (I) herausführt, die f^0 und f^3 entsprechenden Glieder identisch verschwinden, da nur dann $\bar{x} = \text{const.}$ und $\bar{y} = \text{const.}$ Integralkurven sein können. Deuten wir schließlich noch die Parameter $\bar{x}, \bar{y}$ als

kartesische Koordinaten x, bzw. y, so haben wir die Form (III) erreicht. Zu ihren Integralkurven zählen die Geraden $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, die jedoch nicht als Büschel verwendet werden dürfen; sie müßten sonst bei der Abbildung auf die Geraden der (u, v)-Ebene wieder in Büschel übergehen, was eine unerlaubte einschränkende Zusatzforderung ist[8]).

Da sich (III) nicht allgemein integrieren läßt, so müssen die Integralkurven durch Reihenentwicklungen dargestellt werden. Wir beschränken uns auf Untersuchungen „im Kleinen"; dabei werden wir die Glieder von höherer als vierter Ordnung unberücksichtigt lassen können.

Man wird nun das Bestehen einer möglichst einfachen projektiven Beziehung fordern, die als charakteristisch für die Abbildbarkeit auf die Geraden dann anzusehen ist, wenn die für ihr Bestehen *notwendigen* Bedingungen auch *hinreichen* für das Bestehen der Bedingungen (5). Diese stellen sich für (III) dar in der Form

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} 2p_{12} + q_{11} - 6pq_1 - 12pp_2 &= 0, \\ 2q_{12} + p_{22} - 12qq_1 - 6qp_2 &= 0. \end{aligned}$$

Wir werden — in sinngemäßer Übertragung — das Bestehen des „Viereckssatzes" fordern:

Bedeuten g^1, g^2 Geraden, die von einem Punkte G, s^1, s^2, s^3 Geraden, die von einem andern Punkte S ausgehen, so liegen die Diagonalschnittpunkte

$$(g^1 \times s^1)\,(g^2 \times s^2) \times (g^1 \times s^2)\,(g^2 \times s^1)$$

und

$$(g^1 \times s^2)\,(g^2 \times s^3) \times (g^1 \times s^3)\,(g^2 \times s^2)$$

auf einer Geraden g^3 durch G.

Dieser Satz ist nichts anderes als der perspektive Pappus-Pascal. Er kann auch als Spezialfall des Desarguesschen Satzes von den perspektiven Dreiecken aufgefaßt werden, bei denen speziell je eine Ecke auf einer Seite des andern Dreiecks liegt.

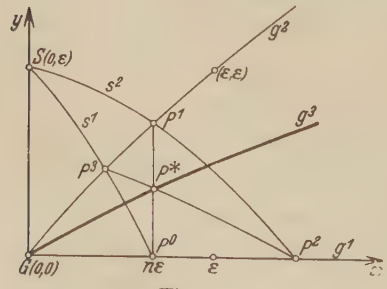


Fig. 1.

Unserer Untersuchung legen wir folgenden Plan zugrunde (Fig. 1):

Als Zentrum G der g-Kurven wird der im Regularitätsgebiet beliebig zu wählende Nullpunkt angenommen. g^1 ist die x-Achse, g^2 die Kurve durch $(0, 0)$ und $(\varepsilon, \varepsilon)$. Als Zentrum S verwenden wir den Punkt $(0, \varepsilon)$. Von da soll die Kurve s^1 nach dem Punkt $(n\varepsilon, 0)$,

[8]) Vgl. Anmerkung am Schluß des Paragraphen.

wobei $0 < n < 1$ ist, gehen. s^2 wählen wir so, daß die Diagonale $(g^1 \times s^1)\,(g^2 \times s^2)$ die Ordinate $n\,\varepsilon$ ist.

Die durch den Diagonalenschnittpunkt und $G\,(0,0)$ gehende Integralkurve g^3 muß, wofern der Viereckssatz bestehen soll, festgelegt sein *unabhängig* von n. (Daß diese Fassung mit der ursprünglichen Formulierung gleichbedeutend ist, läßt sich durch mehrmalige Anwendung der letzteren leicht verifizieren.)

Die Integralkurve durch die Punkte $(0,0)$ und (ξ, η), wo (ξ, η) einer infinitesimalen Umgebung des Nullpunktes angehört, ist folgendermaßen darzustellen:

$$y = r\,x + R^{11}\,x\,(x-\xi) + R^{12}\,x\,((x)^2 - (\xi)^2) + R^{21}\,(x)^2\,(x-\xi) + R^{13}\,x\,((x)^3 - (\xi)^3) + R^{22}\,(x)^2\,((x)^2 - (\xi)^2) + R^{31}\,(x)^3\,(x-\xi) + \ldots.$$

Für $x = 0$ ist $y = 0$; aus der andern Randbedingung folgt

$$r = \frac{\eta}{\xi}.$$

Zur Bestimmung der übrigen Koeffizienten R^{ik} ist zu berücksichtigen, daß die Kurve der Differentialgleichung

$$y'' = 6\,(p_0 + p_1\,x + p_2\,y + \tfrac{1}{2}\,(p_{11}\,(x)^2 + 2\,p_{12}\,x\,y + p_{22}\,(y)^2) + \ldots)\,y' - 6\,(q_0 + q_1\,x + q_2\,y + \tfrac{1}{2}\,(q_{11}\,(x)^2 + 2\,q_{12}\,x\,y + q_{22}\,(y)^2) + \ldots)\,(y')^2$$

genügen muß.

$$y = r\,x + R^{11}\,x\,(x-\xi) + R^{12}\,x\,((x)^2 - (\xi)^2) + R^{21}\,(x)^2\,(x-\xi) + R^{13}\,x\,((x)^3 - (\xi)^3) + R^{22}\,(x)^2\,((x)^2 - (\xi)^2) + R^{31}\,(x)^3\,(x-\xi)$$

$$y' = r + 2\,R^{11}\,x - R^{11}\,\xi + 3\,(R^{12} + R^{21})\,(x)^2 - 2\,R^{21}\,x\,\xi - R^{12}\,(\xi)^2 + 4\,(R^{13} + R^{22} + R^{31})\,(x)^3 - 3\,R^{31}\,(x)^2\,\xi - 2\,R^{22}\,x\,(\xi)^2 - R^{13}\,(\xi)^3$$

$$y'' = 2\,R^{11} + 6\,(R^{12} + R^{21})\,x - 2\,R^{21}\,\xi + 12\,(R^{13} + R^{22} + R^{31})\,(x)^2 - 6\,R^{31}\,x\,\xi - 2\,R^{22}\,(\xi)^2.$$

Andererseits ist

$$y'' = 6\,\{p_0 + p_1\,x + p_2\,[r\,x + R^{11}\,x\,(x-\xi)] + \tfrac{1}{2}\,(p_{11}\,(x)^2 + 2\,p_{12}\,x\,[r\,x] + p_{22}\,[r\,x]^2)\}$$
$$\{r + 2\,R^{11}\,x - R^{11}\,\xi + 3\,(R^{12} + R^{21})\,(x)^2 - 2\,R^{21}\,x\,\xi - R^{12}\,(\xi)^2\}$$
$$- \{6\,q_0 + q_1\,x + q_2\,[r\,x + R^{11}\,x\,(x-\xi)] + \tfrac{1}{2}\,(q_{11}\,(x)^2 + 2\,q_{12}\,x\,[r\,x] + q_{22}\,[r\,x]^2)\}$$
$$\cdot\,\{(r)^2 + 4\,r\,R^{11}\,x - 2\,r\,R^{11}\,\xi + (4\,(R^{11})^2 + 6\,r\,(R^{12} + R^{21}))\,(x)^2 - 4\,((R^{11})^2 + r\,R^{21})\,x\,\xi + ((R^{11})^2 - 2\,r\,R^{21})\,(\xi)^2\}.$$

Durch Koeffizientenvergleich (unter Berücksichtigung der Tatsache, daß ξ beliebig in einer gewissen Umgebung festzusetzen war) ergibt sich für die R^{ik}:

$$r = \frac{\eta}{\xi}$$

$$R^{11} = 3r[p_0 - r q_0],$$

$$R^{12} = r[p_1 - 3(p_0)^2 + (p_2 - q_1 + 9 p_0 q_0) r - (q_2 + 6(q_0)^2)(r)^2],$$

$$R^{21} = 9r[(p_0)^2 - 3 p_0 q_0 r + 2(q_0)^2 (r)^2],$$

$$\begin{aligned} R^{13} = \tfrac{3}{2} r[&\tfrac{1}{6} p_{11} - p_0 p_1 \\ &+ (p_0 q_1 - 2 p_0 p_2 + 2 p_1 q_0 - 6(p_0)^2 q_0 + \tfrac{1}{6}(2 p_{12} - q_{11})) r \\ &+ (12 p_0 (q_0)^2 + 2 p_0 q_2 + 3 p_2 q_0 - 2 q_0 q_1 + \tfrac{1}{6}(p_{22} - 2 q_{12}))(r)^2 \\ &- (3 q_0 q_2 + 6(q_0)^3 + \tfrac{1}{6} q_{22})(r)^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{22} = 3r[&p_0 p_1 - 3(p_0)^3 + (24(p_0)^3 q_0 + p_0 p_2 - p_0 q_1 - 2 q_0 p_1) r \\ &+ (2 q_0 q_1 - 2 q_0 p_2 - p_0 q_2 - 42 p_0 (q_0)^2)(r)^2 + (2 q_0 q_2 + 21 (q_0)^3)(r)^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{31} = 3r[&6(p_0)^3 + p_0 p_1 + (2 p_0 p_2 - 2 p_0 q_1 - q_0 p_1 - 42(p_0)^2 q_0) r \\ &+ (72 p_0 (q_0)^2 - 3 p_0 q_2 - 2 q_0 p_2 + 2 q_0 q_1)(r)^2 + (3 q_0 q_2 - 36 (q_0)^3)(r)^3]. \end{aligned}$$

Glieder höherer als vierter Ordnung werden bei der vorliegenden Untersuchung nicht benötigt.

Da bei Vertauschung der Variabeln die Differentialgleichung

$$y'' = 6 p y' - 6 q (y')^2$$

übergeht in

$$\ddot{x} = 6 q \dot{x} - 6 p (\dot{x})^2,$$

so ergeben sich die Koeffizienten T^{ik} für die inverse Darstellung

$$x = t y + \sum_{1}^{3}{}_{i,k} T^{ik} (y)^i ((y)^k - (\eta)^k) \qquad (i + k \leqq 4)$$

derselben Integralkurven durch $(0, 0)$ und (ξ, η) aus den entsprechenden R^{ik} dadurch, daß $t = \frac{\xi}{\eta}$ an die Stelle von r tritt, und daß p und q, sowie die Differentiationsindizes 1 und 2 sich vertauschen. Also

$$t = \frac{\xi}{\eta},$$

$$T^{11} = 3t[q_0 - t p_0],$$

. . . . . .

Soll die Integralkurve nicht vom Nullpunkt, sondern vom Punkt (α, β) ausgehen, so ist dieser Fall durch sinngemäße Translation auf den vorigen zurückzuführen. Dabei ändert sich der Bau der Differentialgleichung nicht; lediglich die Koeffizienten ändern ihre Werte in leicht zu übersehender Weise.

Wir bemerken, daß in der vierten Größenordnung alle Koeffizienten von $(n)^k$ die Struktur haben

$$K \equiv F(p_0, q_0) + (a^{10} p_0 + b^{10} q_0) p_1 + (a^{20} p_0 + b^{20} q_0) p_2 + (c^{10} p_0 + d^{10} q_0) q_1 + (c^{20} p_0 + d^{20} q_0) q_2 + a^{11} p_{11} + a^{12} p_{12} + a^{22} p_{22} + b^{11} q_{11} + b^{12} q_{12} + b^{22} q_{22}, \qquad (a^{ik}, b^{ik}, \ldots \text{ sind Konstanten}).$$

Im ganzen Verlauf der folgenden Rechnung werden sie diese Form beibehalten, wie sich dabei stets zeigen läßt. Die zu erwartenden Bedingungen für den Viereckssatz (unter der vierten Ordnung sind keine Bedingungen möglich) werden daher ebenfalls diesen Bau haben. Diese Bedingungen werden hergeleitet für die Werte der Funktionen p, q und deren Ableitungen im Nullpunkt. Dieser darf jeder reguläre Punkt des Bereiches sein, so daß die ursprünglich für festgehaltene Werte von $p, q, \ldots$ hergeleiteten Beziehungen allgemein für die Funktionen p, q und deren Ableitungen gelten müssen. In der Bezeichnung ist nicht ausdrücklich unterschieden, da Mißverständnisse wohl nicht zu befürchten sind.

Berücksichtigen wir nun, daß für

$$p_2 = q_1 = 0$$

die Viereckforderung a fortiori erfüllt ist, da $p_2 = q_1 = 0$ für die Bedingungen (A) hinreicht, so kommen wir zu dem Schluß, daß in den Bedingungen der Form K alle Glieder, die nicht p_2, q_1 und deren partielle Ableitungen enthalten, identisch 0 sein werden. Sie können daher bei der Rechnung außer acht gelassen werden.

Es bleibt also nur die Form

$$a^{12} p_{12} + a^{22} p_{22} + b^{11} q_{11} + b^{12} q_{12} + (a^{20} p_0 + b^{20} q_0) p_2 + (c^{10} p_0 + d^{10} q_0) q_1.$$

Zunächst wird die Rechnung nur mit partiellen Ableitungen *zweiter* Ordnung durchgeführt, also ohne p_2 und q_1.

Für die Entwicklung

$$y - \beta^1 = r(x - \alpha^1) + \sum R^{ik} (x - \alpha^1)^i \left((x - \alpha^1)^k - (\alpha^2 - \alpha^1)^k\right)$$

der Kurve durch (α^1, β^1) und (α^2, β^2) bleiben somit nur die Koeffizienten

$$\text{(R)} \qquad \begin{aligned} r &= \frac{\beta^2 - \beta^1}{\alpha^2 - \alpha^1} \\ R^{11} &= 3r\left[p_{12}\alpha^1\beta^1 + \tfrac{1}{2} p_{22} (\beta^1)^2 - \left(\tfrac{1}{2} q_{11} (\alpha^1)^2 + q_{12} \alpha^1 \beta^1\right) r\right] \\ R^{12} &= r\left[p_{12}\beta^1 + \left((p_{12} - q_{11})\alpha^1 + (p_{22} - q_{12})\beta^1\right) r - q_{12}\alpha^1 (r)^2\right] \\ R^{13} &= \tfrac{1}{4} (r)^2 \left[2 p_{12} - q_{11} + (p_{22} - 2 q_{12}) r\right] \end{aligned}$$

und für die inverse Darstellung

$$x - \alpha^1 = t(y - \beta^1) + \sum T^{ik} (y - \beta^1)^i \left((y - \beta^1)^k - (\beta^2 - \beta^1)^k\right)$$

entsprechend

$$t = \frac{\alpha^2 - \alpha^1}{\beta^2 - \beta^1}$$

$$(T) \qquad \begin{aligned} T^{11} &= 3\,t\,[\tfrac{1}{2}\,q_{11}\,(\alpha^1)^2 + q_{12}\,\alpha^1\,\beta^1 - (p_{12}\,\alpha^1\,\beta^1 + \tfrac{1}{2}\,p_{22}\,(\beta^1)^2)\,t] \\ T^{12} &= t\,[q_{12}\,\alpha^1 + ((q_{11} - p_{12})\,\alpha^1 + (q_{12} - p_{22})\,\beta^1)\,t - p_{12}\,\beta^1\,(t)^2] \\ T^{13} &= \tfrac{1}{4}\,(t)^2\,[2\,q_{12} - p_{22} + (q_{11} - 2\,p_{12})\,t]. \end{aligned}$$

Die Herleitung der für den Viereckssatz notwendigen Bedingungen wird sich dann folgendermaßen gestalten:

Das Zentrum des g^i-Büschels ist der Punkt $(0, 0)$, das des s^i-Büschels der Punkt $(0, \varepsilon)$.

Für g^1 wählen wir die Integralkurve

$$(g^1): \qquad y = 0,$$

für g^2 die Kurve durch $(0, 0)$ und $(\varepsilon, \varepsilon)$, also wegen $r = 1$ nach (R):

$$(g^2): \qquad y = x + \tfrac{1}{4}\,(p_{22} + 2\,p_{12} - q_{11} - 2\,q_{12})\,x\,((x)^3 - (\varepsilon)^3).$$

Die s-Kurven mit dem Zentrum S $(0, \varepsilon)$ werden nach $(y - \varepsilon)$ entwickelt mit den Koeffizienten aus (T).

s^1 sei die Kurve von $(0, \varepsilon)$ nach $P^0\,(n\,\varepsilon, 0)$ mit $t = -n$:

$$\begin{aligned} (s^1): \qquad x = &-n\,(y - \varepsilon) - \tfrac{3}{2}\,(n)^2\,p_{22}\,(\varepsilon)^2\,(y - \varepsilon)\,y \\ &+ (n)^2\,[q_{12} - p_{22} + p_{12}\,n]\,\varepsilon\,(y - \varepsilon)\,((y - \varepsilon)^2 - (\varepsilon)^2) \\ &+ \tfrac{1}{4}\,(n)^2\,[2\,q_{12} - p_{22} + (2\,p_{12} - q_{11})\,n]\,(y - \varepsilon)\,((y - \varepsilon)^3 - (-\varepsilon)^3). \end{aligned}$$

Zur Ermittelung des Schnittpunktes P^3 von g^2 mit s^1 setzen wir aus (g^2) y in (s^1) ein und lösen die in x biquadratische Gleichung vermittelst des Ansatzes

$$x^3 = h^1\,\varepsilon + h^2\,(\varepsilon)^2 + h^3\,(\varepsilon)^3 + h^4\,(\varepsilon)^4$$

von Größenordnung zu Größenordnung fortschreitend auf. Dabei ergibt sich:

$$h^1 = \frac{n}{n+1}$$

$$h^2 = h^3 = 0$$

$$\begin{aligned} h^4 = \frac{(n)^2}{4\,(n+1)^4}\,&[(2\,p_{12} + q_{11})\,(n)^3 + (3\,p_{22} + 4\,p_{12} + 2\,q_{11} + 2\,q_{12})\,(n)^2 \\ &+ (3\,p_{22} + 4\,p_{12} - 2\,q_{11} - 2\,q_{12})\,n + (p_{22} + 2\,p_{12} - q_{11} - 2\,q_{12})]. \end{aligned}$$

Aus (g^2) folgt dann y^3, so daß sich für P^3 die Koordinaten ergeben:

$$\begin{aligned} x^3 = \frac{n}{n+1}\,\varepsilon + \frac{(n)^2}{4\,(n+1)^4}\,&[(2\,p_{12} + q_{11})\,(n)^3 + (3\,p_{22} + 4\,p_{12} + 2\,q_{11} + 2\,q_{12})\,(n)^2 \\ &+ (3\,p_{22} + 4\,p_{12} - 2\,q_{11} - 2\,q_{12})\,n + (p_{22} + 2\,p_{12} - q_{11} - 2\,q_{12})]\,(\varepsilon)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^3 = \frac{n}{n+1}\,\varepsilon + \frac{n}{4\,(n+1)^4}\,&[(2\,p_{12} + q_{11})\,(n)^4 + (3\,p_{22} + 4\,p_{12} + 2\,q_{11} + 2\,q_{12})\,(n)^3 \\ &+ (-2\,p_{12} + q_{11} + 4\,q_{12})\,(n)^2 + (-2\,p_{22} - 4\,p_{12} + 2\,q_{11} + 4\,q_{12})\,n \\ &+ (-p_{22} - 2\,p_{12} + q_{11} + 2\,q_{12})]\,(\varepsilon)^4. \end{aligned}$$

Wir richten es nun so ein, daß die eine Diagonale $(P^0 P^1)$ des Vierecks die Ordinate $x^0 = x^1 = n\varepsilon$ ist, und haben demgemäß über s^2 bereits verfügt. s^2 läuft von $(0, \varepsilon)$ durch $P^1(x^1, y^1)$. y^1 aus (g^2):

$$x^1 = n\varepsilon$$

$$y^1 = n\varepsilon + \tfrac{1}{4}(p_{22} + 2p_{12} - q_{11} - 2q_{12})\, n\,((n)^3 - 1)\,(\varepsilon)^4.$$

s^2 ist wie s^1 nach $(y - \varepsilon)$ zu entwickeln. Dabei ist

$$t = \frac{x^1}{y^1 - \varepsilon} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{n((n)^2 + n + 1)}{4}(p_{22} + 2p_{12} - q_{11} - 2q_{12})\,(\varepsilon)^3\right),$$

also nach (T):

$$\begin{aligned}(s^2):\ x = {} & \left[\frac{n}{n-1} - \frac{(n)^2((n)^2 + n + 1)}{4(n-1)}(p_{22} + 2p_{12} - q_{11} - 2q_{12})\,(\varepsilon)^3\right](y - \varepsilon) \\ & - \frac{3}{2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \cdot p_{22}\,(\varepsilon)^2\,(y - \varepsilon)\,(y - y^1) \\ & + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2\left[q_{12} - p_{22} - p_{12}\frac{n}{n-1}\right]\varepsilon\,(y - \varepsilon)\,((y - \varepsilon)^2 - (y^1 - \varepsilon)^2) \\ & + \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\left[2q_{12} - p_{22} + (q_{11} - 2p_{12})\frac{n}{n-1}\right](y - \varepsilon)\,((y - \varepsilon)^3 \\ & - (y^1 - \varepsilon)^3).\end{aligned}$$

Für $y = 0$ ergibt sich daraus der vierte Punkt P^2 des Vierecks:

$$\begin{aligned}x^2 = {} & -\frac{n}{n-1}\varepsilon + \frac{(n)^2}{4(n-1)^3}[-(p_{22} + 2q_{11} + 2q_{12})(n)^3 + (2p_{12} + 3q_{11})(n)^2 \\ & + (-2p_{12} + q_{11} + 4q_{12})n + (p_{22} + 2p_{12} - q_{11} - 2q_{12})](\varepsilon)^4\end{aligned}$$

$$y^2 = 0.$$

Die andere Diagonale des Vierecks ist die durch P^2 und P^3 bestimmte Kurve, die wir nach $(x - x^2)$ entwickeln mit

$$\begin{aligned}r = {} & \frac{y^3}{x^3 - x^2} \\ = {} & \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{16(n+1)^3(n-1)}[-(p_{22} + 2q_{11} + 2q_{12})(n)^6 \\ & + (-4p_{22} + 4p_{12} - 4q_{11} + 8q_{12})(n)^5 + (-3p_{22} + 8p_{12} + 2q_{11} - 6q_{12})(n)^4 \\ & + (-9p_{22} - 8p_{12} + 14q_{11} + 14q_{12})(n)^3 + (4p_{22} + 12p_{12} + 6q_{11})(n)^2 \\ & + (9p_{22} + 12p_{12} + 2q_{11} + 2q_{12})n + (4p_{22} + 4p_{12} - 2q_{11})](\varepsilon)^3.\end{aligned}$$

Diese Diagonale

$$\begin{aligned}y = {} & r(x - x^3) + R^{11}(x - x^2)(x - x^3) + R^{12}(x - x^2)((x - x^2)^2 - (x^3 - x^2)^2 \\ & + R^{13}(x - x^2)((x - x^2)^3 - (x^3 - x^2)^3)\end{aligned}$$

schneidet die andere Diagonale

$$x = n\varepsilon$$

des Vierecks im Punkte $x^* = n\varepsilon$, y^* aus der Kurve $(P^2 P^3)$ — nach Zusammenfassung und Kürzen von $(n+1)^2(n-1)$ —

$$x^* = n\varepsilon$$

$$y^* = \frac{n\varepsilon}{2} + \frac{n(\varepsilon)^4}{32((n)^2-1)}[(p_{22}+4p_{12}-2q_{11}-2q_{12})(n)^5 - (p_{22}+2q_{12})(n)^4 - 2(p_{22}-2q_{11})(n)^3 - 2(p_{22}+4p_{12}-2q_{11}-6q_{12})(n)^2 + 4(p_{22}+2p_{12}-q_{11}-2q_{12})].$$

Um die geforderte Invarianz der Kurve g^3 möglichst einfach analytisch zu formulieren, benutzen wir die Tatsache, daß in unserem betrachteten Bereich jeder Kurve umkehrbar eindeutig in jedem ihrer Punkte die Tangentenrichtung zugeordnet ist. Danach ist mit der Viereckforderung für g^3 gleichbedeutend die Bedingung, daß die Anfangsrichtung von g^3 im Nullpunkt von n unabhängig sein muß:

$$\frac{\partial}{\partial n} y'(0,0) = 0.$$

(g^3): $$y = r^* x + R^{*13} x((x)^3 - (x^*)^3).$$

Die Anfangsrichtung im Nullpunkt ist

$$y'_{x=0} = r^* - R^{*13}(x^*)^3.$$

Dabei ist, nach teilweiser Ausführung der Division durch $((n)^2-1)$:

$$r^* = \frac{y^*}{x^*} = \frac{1}{2} + \frac{(\varepsilon)^3}{32}[(p_{22}+4p_{12}-2q_{11}-2q_{12})(n)^3 - \frac{1}{(n)^2-1}\{(p_{22}+2q_{12})(n)^4 + (p_{22}-4p_{12}-2q_{11}+2q_{12})(n)^3 + 2(p_{22}+4p_{12}-2q_{11}-6q_{12})(n)^2 - 4(p_{22}+2p_{12}-q_{11}-2q_{12})\}]$$

$$R^{*13} = \tfrac{1}{32}[2(2p_{12}-q_{11}) + (p_{22}-2q_{12})].$$

Für die Anfangsrichtung der g^3-Kurve bleibt also:

$$y'_{x=0} = \frac{1}{2} - \frac{(\varepsilon)^3}{32}\frac{1}{(n)^2-1}[(p_{22}+2q_{12})(n)^4 + (p_{22}-4p_{12}-2q_{11}+2q_{12})(n)^3 + 2(p_{22}+4p_{12}-2q_{11}-6q_{12})(n)^2 - 4(p_{22}+2p_{12}-q_{11}-2q_{12})].$$

Die Forderung $\frac{\partial}{\partial n} y' = 0$ ergibt danach:

$$2(p_{22}+2q_{12})(n)^5 + (p_{22}+2q_{12}-2(q_{11}+2p_{12}))(n)^4 - 4(p_{22}+2q_{12})(n)^3 - 3(p_{22}+2q_{12}-2(q_{11}+2p_{12}))(n)^2 + 4(p_{22}+2q_{12})n \equiv 0.$$

Als Bedingungen folgen also:

(G′)
$$2p_{12} + q_{11} = 0,$$
$$2q_{12} + p_{22} = 0.$$

Damit ist zunächst einmal die Existenz von Bedingungen aus dem Viereckssatz gesichert. Sie stimmen, abgesehen von den bei ihrer Herleitung nicht berücksichtigten Gliedern p_2 und q_1, überein mit den ana-

lytisch abgeleiteten notwendigen und hinreichenden Abbildbarkeitsbedingungen

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} 2p_{12} + q_{11} - 6pq_1 - 12pp_2 &= 0, \\ 2q_{12} + p_{22} - 12qq_1 - 6qp_2 &= 0. \end{aligned}$$

Um die Untersuchung abzuschließen, müßte also die Herleitung von (G′) durch Hinzunahme der Glieder p_2 und q_1 zu (G) ergänzt werden (andere als diese Glieder können nach der oben gemachten Überlegung nicht in die Bedingungen gelangen). Das würde eine starke Komplizierung der Rechenarbeit bedeuten, die durch folgende Überlegung vermieden werden kann.

Aus den Koeffizienten und dem Gang der Rechnung ist die Struktur der vollständigen Bedingungen (G) bekannt; (G) hat den Bau

$$\text{(G)} \qquad \begin{aligned} &\text{(1)} \quad 2p_{12} + q_{11} + (a^1 p + b^1 q - 6p)q_1 + (a^2 p + b^2 q - 12p)p_2 = 0, \\ &\text{(2)} \quad 2q_{12} + p_{22} + (b^2 p + a^2 q - 12q)q_1 + (b^1 p + a^1 q - 6q)p_2 = 0. \end{aligned}$$

Eine Bedingung von (G) zieht bei Vertauschung der Variabeln die andere, zu ihr symmetrische, nach sich. Würde die rechnerische Herleitung zu (G^1) ein von (G^2) verschiedenes ($G^{2\prime}$) ergeben, so hätten wir es eben mit zwei unter sich wieder symmetrischen Bedingungspaaren (G^1, G^2) und ($G^{1\prime}$, $G^{2\prime}$) zu tun. Es genügt die Betrachtung des obigen Falles von (G).

Die Bedingungen (G) sind als *notwendige* Bedingungen für das Bestehen des Vierecksatzes (bis zur vierten Größenordnung einschließlich) abgeleitet worden, dürfen also naturgemäß nicht enger sein als die für die Abbildbarkeit auf die Geraden *notwendigen und hinreichenden* Bedingungen (A).

Wir behaupten nun:

Die Bedingungen (G) sind mit (A) *identisch*, d. h.

$$a^1 = a^2 = b^1 = b^2 = 0 \qquad (a^i,\ b^i = \text{const.}).$$

Beweis: Wir nehmen an, die Behauptung wäre falsch, also

$$|a^1| + |a^2| + |b^1| + |b^2| > 0.$$

Dann aber müßte für den Fall, daß p und q (A) erfüllen, der Vierecksatz also besteht, gleichzeitig (als notwendige Bedingung für den Vierecksatz) auch (G) erfüllt sein, was zu den Nebenbedingungen

$$\text{(N)} \qquad \begin{aligned} (a^1 p + b^1 q)q_1 + (a^2 p + b^2 q)p_2 &= 0, \\ (b^2 p + a^2 q)q_1 + (b^1 p + a^1 q)p_2 &= 0 \end{aligned}$$

führt. Diese aus (G) resultierenden Nebenbedingungen (N) bedeuten aber in jedem Falle eine Einschränkung von (A), was natürlich ein Widerspruch ist.

Ebenso zeigen die Reihenentwicklungen der Funktionen p und q um den beliebig angenommenen Nullpunkt, daß dort beliebige (endliche) Werte p_0, q_0, p_2, q_1 vorgeschrieben werden können, auch wenn insbesondere die Bedingungen (A) erfüllt sein sollen. Dem würde aber ebenfalls das Bestehen von Nebenbedingungen (N) widersprechen.

Die Annahme $|a^1| + |a^2| + |b^1| + |b^2| > 0$ war also falsch!

Es muß gelten

$$a^1 = a^2 = b^1 = b^2 = 0,$$

womit die Behauptung (G) $\equiv$ (A) bewiesen ist.

Damit gilt der Satz:

> Wenn „im Kleinen" die Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Klasse (I) den *Viereckssatz* (den perspektiven Pappus-Pascal) erfüllen, dann läßt sich diese zweigliedrige Schar umkehrbar eindeutig in die Geraden der Ebene überführen.

Das Ergebnis dieses Paragraphen führt speziell auch zu einer neuen Formulierung eines bekannten Satzes der Flächentheorie.

Zu der Klasse (I) gehören auch die Differentialgleichungen der geodätischen Linien, wenn unter x und y Parameterlinien auf der Fläche verstanden werden. Da nun die Flächen konstanten Krümmungsmaßes die einzigen sind, die sich auf die Ebene geodätisch abbilden lassen, d. h. deren Geodäten in die Geraden der Ebene überführbar sind[9]), so können wir den Satz so aussprechen:

Wenn zwischen den geodätischen Linien einer Fläche im Kleinen der *Viereckssatz* besteht, so hat die Fläche *konstantes* Krümmungsmaß.

Anmerkung. Unter Verwendung der Scharen $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ aus der Gleichung (III) als g- und s-Kurven führt bei einer ähnlichen Anordnung wie in Fig. 2 der Viereckssatz zu der Forderung, daß die Ordinaten der Punkte

$$(2\,3) \times (5\,6') \quad \text{und} \quad (3\,4) \times (6'\,1)$$

gleich sein müssen, woraus dann schon in der *dritten* Ordnung folgt:

$$p_2 = q_1 = 0.$$

Doch beruht das lediglich auf der unerlaubten Verwendung von $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ als *Büschel*.

---

[9]) Vgl. H. Liebmann, „Zwei charakteristische Eigenschaften der Flächen konstanten Krümmungsmaßes", Math. Zeitschr. 13 (1922), S. 10 ff.

Aus der entsprechenden Anordnung (Fig. 2) für den gewöhnlichen Pappus-Pascal, wo die Pascal-Linie PL parallel zur x-Achse durch den Punkt I: $(1\,2) \times (4\,5)$ festgelegt ist und der Punkt 6 danach auf zwei Wegen bestimmt wird, ergeben sich nämlich keine Bedingungen. Der Punkt 6 wird zuerst bestimmt als Schnittpunkt von (5 II) mit $y = -t\varepsilon$, sodann als Schnittpunkt von (1 III) mit $y = -t\varepsilon$. In beiden Fällen ergeben sich (bis zur dritten Ordnung einschließlich) für 6 dieselben Werte, so daß also bis zu dieser Ordnung aus dem Pappus-Pascal keine Bedingungen folgen. Wir haben dabei ja auch nicht $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ als *Büschel* verwendet.

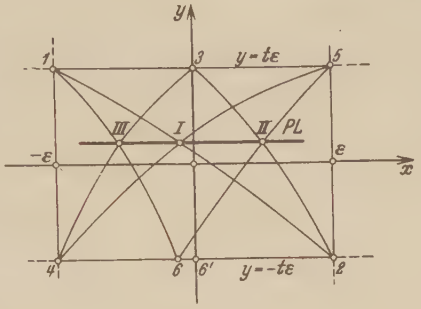


Fig. 2.

Die zusätzliche Forderung, daß 6 auf der y-Achse liegen solle, also mit 6′ zusammenfällt, führt natürlich zu $p_2 = q_1 = 0$, da dann ja wieder der unerlaubte perspektive Fall eintritt.

$p_2 = q_1 = 0$ ist gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei der Abbildung auf die Geraden der (u, v)-Ebene $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ in Büschel übergehen, also insbesondere auf $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ abgebildet werden können (vgl. hierzu das letzte Beispiel in Fußnote [7]).

(Eingegangen am 28. September 1934.)

Über die Verzweigung der Lösung einer Integro-Differentialgleichung aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.

Von

Karl Maruhn in Leipzig.

Einleitung.

Zu den interessantesten Aufgaben, die uns in der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten entgegentreten, gehört das Studium der „Verzweigungsfiguren". Die Untersuchung insbesondere, ob es in der Nachbarschaft einer Gleichgewichtsfigur, die in eine bekannte lineare Reihe eingebettet ist, weitere neue, dieser nicht angehörige Figuren gibt, ob sich ferner diese letzteren ihrerseits ebenfalls zu einer linearen Reihe zusammenschließen, die in die Ausgangsfigur einmündet, zeigt uns einen Weg, bisher noch nicht bekannte Figuren des Gleichgewichts aufzufinden. Die Untersuchungen von Liapounoff über die den homogenen Flüssigkeitsellipsoiden benachbarten Figuren bilden hierfür ein Beispiel.

Lichtenstein[1]) hat in seinen grundlegenden Abhandlungen, aufbauend auf die Untersuchungen von Herrn E. Schmidt[2]) zur Theorie der Integralgleichungen, bis ins einzelne eine Methode entwickelt, wie die oben genannten Aufgaben zu behandeln sind. Leider sind die weitaus meisten speziellen Probleme infolge großer rechnerischer Schwierigkeiten nur sehr schwer zugänglich. Es soll daher in dieser Arbeit unser Ziel sein, an dem einfachsten Beispiel, nämlich an der von der Winkelgeschwindigkeit ω abhängigen linearen Reihe der unbegrenzten, mit homogener Flüssigkeit erfüllten Zylinderkörper kreisförmigen Normalschnittes, die genannten Methoden zu erproben. *Es findet sich, daß in der Tat von gewissen, zu abzählbar unendlich vielen Werten $\omega^{(n)}$ der Winkelgeschwindigkeit gehörigen Zylindern, für hinreichend kleine Werte des zugrunde liegenden Parameters*

[1]) Vgl. vor allem L. Lichtenstein, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin 1933, wo die gesamte Theorie zusammenfassend dargestellt ist und sich auch der Hinweis auf die zahlreichen Originalabhandlungen findet. Vgl. auch S. 90, wo auf das hier behandelte Problem hingewiesen wird.

[2]) Vgl. E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen, Math. Annalen 65 (1908), S. 370—399.

lineare Reihen neuer unbegrenzter homogener oder schwach inhomogener Zylinder abzweigen, deren Normalschnitte keine Kreise sind und die je nach dem Werte von $\omega^{(n)}$, $n = 2, 3, \ldots$ *Symmetrielinien besitzen*[3]). Allerdings ließ sich auf dem in § 1 beschrittenen Wege nicht zeigen, daß diese abzweigenden stetigen Scharen von der Änderung der Winkelgeschwindigkeit, $\omega_1 - \omega$, als Parameter abhängen. Es wäre daher etwa denkbar, daß jede zu derselben Schar gehörige Figur der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\omega^{(n)}$ entspricht.

Die Existenz einer von $\omega_1 - \omega$ ($|\omega_1 - \omega|$ hinreichend klein) abhängigen linearen Reihe wird für allgemeines ω_n infolge auftretender rechnerischer Schwierigkeiten nicht gezeigt werden, doch ließ sich diese Aufgabe in § 2 ohne große Mühe für den Fall $n = 2$ behandeln, wo die lineare Reihe der elliptischen Zylinder von der der Kreiszylinder abzweigt.

Eine Übertragung aller dieser Betrachtungen auf mit beliebig stark inhomogener Flüssigkeit erfüllte Kreiszylinder soll einer späteren Behandlung vorbehalten bleiben.

§ 1.

Existenz linearer Reihen von Zylindern, deren Querschnitte keine Kreise sind, in der Nachbarschaft der Kreiszylinder.

1. Die Untersuchung der Figuren des Gleichgewichts in der Nachbarschaft eines mit inkompressibler Flüssigkeit der konstanten Dichte f erfüllten (unendlich langen) Zylinderkörpers mit der z-Achse als Achse und dem kreisförmigen Normalschnitt K (Rand Σ, Radius R) in der Ebene $z = 0$ führt[4]) auf die Integro-Differentialgleichung

$$\psi(\tau)\,\zeta(\tau) + 2\int_{\Sigma} f'\,\zeta(\sigma')\log\frac{R}{\varrho}\,d\sigma' = s(r) - r^2\lambda - 2\alpha\int_{K}\chi(r')\frac{d\tau'}{\varrho}$$

$$-\frac{\alpha}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \ldots) - 2r\lambda\zeta - \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 - \lambda\zeta^2 - \frac{1}{\varkappa}(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots): \tag{1}$$

$$x_1 = x\left(1 + \frac{\zeta}{r}\right), \quad y_1 = y\left(1 + \frac{\zeta}{r}\right), \quad \varrho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2,$$

$$\varrho_1^2 = (x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2.$$

---

[3]) Vgl. hierzu L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin 1931, insbes. S. 47—54, wo ein zuerst von Herrn Levi-Civita behandeltes hydrodynamisches Problem auf ein System von Integralgleichungen zurückgeführt wird, deren eine einen ganz ähnlichen Bau und entsprechend auch ähnliche Behandlung aufweist, wie die in der vorliegenden Arbeit. — Der Fall $\omega^{(1)} = 0$ liefert keine neuen Figuren.

[4]) Vgl. l. c. [1]), S. 89 f., ferner S. 105 ff.

Dabei ist τ der Punkt (x, y) in $K + \Sigma$, $d\tau' = dx'\,dy'$, σ' ein Punkt auf Σ, $d\sigma'$ sein Bogenelement, $\varkappa\psi(\tau) = -2\varkappa f\pi r + \omega^2 r$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\varkappa$ die Gaußsche Gravitationskonstante,

$$U^{(\nu)}(\tau) = \frac{2\varkappa}{\nu!}\int_K f'\left[\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\left\{\log\frac{R}{\varrho_t}\cdot\frac{\partial(x_t', y_t')}{\partial(x', y')}\right\}\right]_{t=0} d\tau',$$

$$\mathfrak{W}^{(\nu)} = \frac{2\varkappa}{\nu!}\int_K \chi'\left[\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\left\{\log\frac{R}{\varrho_t}\,\frac{\partial(x_t', y_t')}{\partial(x', y')}\right\}\right]_{t=0} d\tau';$$

überdies ist auf Σ:

$$U^{(\nu)}(\sigma) = \frac{2\varkappa}{\nu!}\int_\Sigma f'\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial t^{\nu-1}}\left\{(\zeta'\cos\varphi_t' - \zeta\cos\vartheta_t')\log\frac{R}{\varrho_t}\,d\sigma_t'\right\}\right]_{t=0} d\sigma'.$$

Hierzu einige Erläuterungen: Man denke sich in der üblichen Weise den Normalschnitt $K_1 + \Sigma_1$ der gesuchten Konfiguration dem Kreisbereich $K + \Sigma$ zugeordnet. Der Normalschnitt Σ_{r1} einer jeden Niveaufläche des Gesamtpotentials der gesuchten Konfiguration entspricht umkehrbar eindeutig und stetig dem Kreise $\Sigma_r (x^2 + y^2 = r^2)$, ein Punkt P auf Σ_r dem Schnittpunkt P_1 der Normalen (ν) zu Σ_r in P mit Σ_{r1} und insbesondere der Kreismittelpunkt O sich selbst. Der Abstand $\overline{PP_1}$, positiv in der Richtung der Außennormalen gerechnet, heiße ζ. Die Winkelgeschwindigkeit der gesuchten Konfiguration betrage

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + 2\varkappa\lambda}, \tag{2}$$

die Dichte möge in $K_1 + \Sigma_1$ auf Σ_{r1} den Wert $f + \alpha\chi(r)$ annehmen, unter α einen dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Wert, unter $\chi(r)$ eine in $\langle 0, R\rangle$ stetige, allenfalls abteilungsweise stetige Funktion von r verstanden, die in den Stetigkeitsintervallen eine stetige Ableitung erster Ordnung besitzt, die ihrerseits einer H-Bedingung genügt. Die Größe $s(r)$ bezeichnet einen auf Σ_{r1} konstanten, dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Wert. Was schließlich die Ausdrücke $U^{(n)}$ und $\mathfrak{W}^{(n)}$ angeht, so denken wir uns zwischen Σ und Σ_1 bzw. Σ_r und Σ_{r1} die einparametrige Flächenschar Σ_t bzw. $\Sigma_{rt} (0 \leqq t \leqq 1)$ geschaltet. Dem Punkte (x, y) auf $\Sigma_r (0 < r \leqq R)$ entspricht der Punkt (x_t, y_t) auf $\Sigma_{rt} (\Sigma_R = \Sigma,\ \Sigma_{Rt} = \Sigma_t)$:

$$x_t = x\left(1 + \frac{t\zeta}{r}\right), \quad y_t = y\left(1 + \frac{t\zeta}{r}\right), \quad \varrho_t^2 = (x_t - x_t')^2 + (y_t - y_t')^2. \tag{3}$$

Ferner ist, unter (ν') bzw. (ν) die Außennormale in (x', y') bzw. (x, y) zu Σ_r verstanden, φ_t' bzw. ϑ_t' der von der Außennormalen zu Σ_{rt} in (x_t', y_t') mit (ν') bzw. (ν) eingeschlossene Winkel. $d\sigma_{rt}$ ist das Bogenelement auf Σ_{rt}.

Unser Ziel ist, $\zeta = \zeta(x, y) = \zeta(\tau)$ in $K + \Sigma$ als Ortsfunktion zu bestimmen. Diese sei dort stetig und besitze stetige partielle Ableitungen der ersten Ordnung. Es sei, unter ε_0 einen hinreichend kleinen positiven Wert verstanden,

$$\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right| \leqq \varepsilon_0, \quad |\zeta| \leqq \sqrt{2}\,\varepsilon_0 r. \tag{4}$$

2. Wir verlangen weiter, daß die von Σ_{r_1} umschlossene Fläche denselben Flächeninhalt besitzt wie der von Σ_r umschlossene Kreis. Insbesondere soll also auch der Inhalt von K_1 gleich demjenigen von K sein. Es muß daher, wie man leicht erkennt, die Beziehung

$$\int_0^1 dt \int_{\Sigma_{rt}} \zeta' \cos\varphi_t' \, d\sigma_{rt}' = 0 \tag{5}$$

bestehen. Verstehen wir weiter unter φ' den Polarwinkel des Punktes (x', y'), so läßt sich wegen

$$\cos\varphi_t' \, d\sigma_{rt}' = (A_t' \cos\varphi' + B_t' \sin\varphi') \, d\sigma_r',$$

$$\begin{aligned} A_t' &= \frac{\partial (y' + t\zeta' \sin\varphi')}{\partial \sigma_r'} = \frac{1}{r}\left(r\cos\varphi' + t\zeta'\cos\varphi' + t\frac{\partial \zeta'}{\partial \varphi'}\sin\varphi'\right), \\ B_t' &= -\frac{\partial (x' + t\zeta'\cos\varphi')}{\partial \sigma_r'} = \frac{1}{r}\left(r\sin\varphi' + t\zeta'\sin\varphi' - t\frac{\partial \zeta'}{\partial \varphi'}\cos\varphi'\right), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt \int_{\Sigma_{rt}} \zeta' \cos\varphi_t' \, d\sigma_{rt}' &= \int_0^1 dt \int_{\Sigma_r} \zeta' \, d\sigma_r' + \frac{1}{r}\int_0^1 t\,dt \int_{\Sigma_r} \zeta'^2 \, d\sigma_r' \\ &= \int_{\Sigma_r} \zeta' \, d\sigma_r' + \frac{1}{2r}\int_{\Sigma_r} \zeta'^2 \, d\sigma_r' \end{aligned} \tag{7}$$

die Gleichung (5) in der Gestalt

$$\int_{\Sigma_r} \zeta' \, d\sigma_r' + \frac{1}{2r}\int_{\Sigma_r} \zeta'^2 \, d\sigma_r' = 0 \tag{8}$$

schreiben.

Fassen wir jetzt wieder unsere Ausgangsgleichung (1) ins Auge und lassen darin den Punkt (τ) gegen einen Randpunkt (σ) rücken, so nimmt (1) die Gestalt

$$\begin{aligned} \psi(\sigma)\zeta(\sigma) + 2\int_\Sigma f'\zeta' \log\frac{R}{\varrho}\, d\sigma' &= s(R) - R^2\lambda - 2\alpha\int_K \chi' \frac{d\tau'}{\varrho(\sigma,\tau')} \\ &- \frac{\alpha}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \ldots) - 2R\lambda\zeta - \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 - \lambda\zeta^2 \\ &- \frac{1}{\varkappa}(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots) \end{aligned} \tag{9}$$

an. Rückt andererseits (τ) gegen O, so ergibt sich

$$(10)\quad 0 = s(0) - 2\alpha \int_K \chi' \frac{d\tau'}{r'} - \frac{\alpha}{\varkappa}({}_0\mathfrak{W}^{(1)} + {}_0\mathfrak{W}^{(2)}) - \frac{1}{\varkappa}({}_0U^{(2)} + {}_0U^{(3)} + \ldots);$$

ziehen wir dies von (1) ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(11)\qquad \psi(\tau)\zeta(\tau) + 2\int_\Sigma f'\zeta' \log\frac{R}{\varrho}\,d\sigma' &= s(r) - s(0) - r^2\lambda \\ &- 2\alpha\int_K \chi'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r'}\right)d\tau' - \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 - \lambda\zeta^2 - 2r\lambda\zeta \\ &- \frac{\alpha}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(1)} - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - \ldots) \\ &- \frac{1}{\varkappa}(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots - {}_0U^{(2)} - {}_0U^{(3)} - \ldots),\end{aligned}$$

unter ${}_0\mathfrak{W}^{(n)}$ und ${}_0U^{(n)}$ die betreffenden Integralausdrücke, im Nullpunkt genommen, verstanden.

Aus (9) findet sich nunmehr, wegen

$$(12)\qquad \int_\Sigma d\sigma \int_\Sigma \zeta' \log\frac{R}{\varrho}\,d\sigma' = \int_\Sigma \zeta'\,d\sigma' \int_\Sigma \log\frac{R}{\varrho}\,d\sigma = 0,$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}(13)\qquad \int_\Sigma \zeta\,d\sigma &= \frac{1}{\psi(\sigma)}\Big[2\pi R s(R) - 2\pi R^3\lambda - 4\pi R\alpha\int_K \chi'\frac{d\tau'}{\varrho(\sigma,\tau')} \\ &- \int_\Sigma d\sigma\Big\{\frac{\alpha}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \ldots) + \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 + \lambda\zeta^2 \\ &+ 2R\lambda\zeta + \frac{1}{\varkappa}(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots)\Big\}\Big],\end{aligned}$$

woraus mit Rücksicht auf (8)

$$\begin{aligned}(14)\qquad s(R) &= R^2\lambda + 2\alpha\int_K \chi'\frac{d\tau'}{\varrho} + \frac{1}{2\pi R}\int_\Sigma d\sigma\Big\{\frac{\alpha}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \ldots) \\ &+ \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 + \lambda\zeta^2 + 2R\lambda\zeta + \frac{1}{\varkappa}(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots)\Big\} \\ &- \frac{\psi(\sigma)}{4\pi R^2}\int_\Sigma \zeta^2\,d\sigma\end{aligned}$$

folgt. In analoger Weise ergibt sich aus (10) und (8), wegen $\psi(\tau) = \psi(r)$ und

$$\int_{\Sigma_r} d\sigma_r \int_{\Sigma} \zeta' \log\frac{R}{\varrho}\, d\sigma' = \int_{\Sigma} \zeta'\, d\sigma' \int_{\Sigma_r} \log\frac{R}{\varrho}\, d\sigma_r = 0,$$

(15)
$$s(r) - s(0) = r^2\lambda + 2\alpha \int_K \chi'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r'}\right) d\tau'$$
$$+ \frac{1}{2\pi r}\int_{\Sigma_r} d\sigma_r \left\{\frac{\alpha}{\varkappa}\left(\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(1)} - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - \ldots\right)\right.$$
$$+ \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 + \lambda\zeta^2 + 2r\lambda\zeta + \frac{1}{\varkappa}\left(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots\right.$$
$$\left.\left. - {}_0U^{(2)} - {}_0U^{(3)} - \ldots\right)\right\} - \frac{\psi(r)}{4\pi r^2}\int_{\Sigma_r} \zeta^2\, d\sigma_r.$$

Wegen (10) erkennt man leicht, daß für $r \to R$ die Beziehung (15) in (14) übergeht. Tragen wir nunmehr die Ausdrücke (14) und (15) in die Gleichungen (9) und (11) ein, so erhalten diese die endgültige Gestalt:

(16)
$$\psi(\sigma)\zeta(\sigma) + 2\int_{\Sigma} f'\zeta' \log\frac{R}{\varrho}\, d\sigma' = \frac{1}{2\pi R}\int_{\Sigma} d\sigma \left\{\frac{\alpha}{\varkappa}\left(\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \ldots\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 + \lambda\zeta^2 + 2R\lambda\zeta + \frac{1}{\varkappa}\left(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots\right)\right\}$$
$$- \frac{\psi(\sigma)}{4\pi R^2}\int_{\Sigma} \zeta^2\, d\sigma - \frac{\alpha}{\varkappa}\left(\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \ldots\right)$$
$$- \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 - \lambda\zeta^2 - 2R\lambda\zeta - \frac{1}{\varkappa}\left(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots\right),$$

(17)
$$\psi(r)\zeta(\tau) = -2\int_{\Sigma} f'\zeta' \log\frac{R}{\varrho}\, d\sigma' + \frac{1}{2\pi r}\int_{\Sigma_r} d\sigma_r \left\{\frac{\alpha}{\varkappa}\left(\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \ldots\right.\right.$$
$$\left. - {}_0\mathfrak{W}^{(1)} - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - \ldots\right) + \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 + \lambda\zeta^2 + 2r\lambda\zeta$$
$$\left. + \frac{1}{\varkappa}\left(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots - {}_0U^{(2)} - {}_0U^{(3)} - \ldots\right)\right\}$$
$$- \frac{\psi(r)}{4\pi r^2}\int_{\Sigma_r} \zeta^2\, d\sigma_r - \frac{\alpha}{\varkappa}\left(\mathfrak{W}^{(1)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(1)} - \ldots\right)$$
$$- \frac{\omega^2}{2\varkappa}\zeta^2 - \lambda\zeta^2 - 2r\lambda\zeta - \frac{1}{\varkappa}\left(U^{(2)} + \ldots - {}_0U^{(2)} - \ldots\right).$$

Unter Berücksichtigung von

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{\Sigma_r} {}_0\mathfrak{W}^{(\nu)}\, d\sigma_r = {}_0\mathfrak{W}^{(\nu)}, \qquad \frac{1}{2\pi r}\int_{\Sigma_r} {}_0U^{(\nu)}\, d\sigma_r = {}_0U^{(\nu)}$$

erkennt man sogleich, daß für $r \to R$ die Gleichung (17) in die Gleichung (16) übergeht.

3. Wie man weiß, hat die homogene Integralgleichung

$$\psi(\sigma)\,\zeta(\sigma) + 2\int_{\Sigma} f'\,\zeta' \log\frac{R}{\varrho}\,d\sigma' = 0, \quad \varkappa\,\psi(\sigma) = -2\pi\varkappa f R + \omega^2 R \tag{18}$$

dann und nur dann Nullösungen, wenn wir

$$\omega = \omega^{(n)} = \left(2\pi\varkappa f\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}, \quad \text{somit} \quad \psi(\sigma) = -\frac{2\pi f R}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

annehmen. Nur diese Fälle werden uns im folgenden beschäftigen, da uns die Gleichungen (16) und (17) im Falle $\omega \neq \omega^{(n)}$, wie leicht ersichtlich, die Lösung $\zeta(\tau) = 0$ in ganz $K + \Sigma$, das heißt die Anfangskonfiguration liefern. Die Gleichung (18), der wir noch wegen (19) die Gestalt

$$\zeta(\sigma) - \frac{n}{\pi R}\int_{\Sigma} \zeta' \log\frac{R}{\varrho}\,d\sigma' = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

geben können, besitzt die in der üblichen Weise normierten Nullösungen

$$\frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}}, \quad \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\pi R}}, \tag{21}$$

unter (R, φ) den Punkt (σ) auf Σ verstanden. Setzen wir

$$\begin{aligned} \frac{n}{\pi R}\log\frac{R}{\varrho} &= \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}}\frac{\cos n\varphi'}{\sqrt{\pi R}} + \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\pi R}}\frac{\sin n\varphi'}{\sqrt{\pi R}} + N(\sigma,\sigma') \\ &= \frac{1}{\pi R}\cos n(\varphi - \varphi') + N(\sigma,\sigma'), \end{aligned} \tag{22}$$

so hat nach bekannten Sätzen die Integralgleichung

$$\zeta(\sigma) - \int_{\Sigma} N(\sigma,\sigma')\,\zeta'\,d\sigma' = 0, \qquad N(\sigma,\sigma') = N(\sigma',\sigma) \tag{23}$$

keine Nullösungen. Wegen (22) und (19) schreiben wir nunmehr die Integro-Differentialgleichung (16) in der Form

$$\begin{aligned} \zeta(\sigma) - \int_{\Sigma} N(\sigma,\sigma')\,\zeta'\,d\sigma' &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}}(r_1\cos n\varphi + r_2\sin n\varphi) \\ &- \frac{n}{4\pi^2 f R^2}\int_{\Sigma} d\sigma\Big\{\frac{\alpha}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(1)} + \ldots) + \frac{\pi f(n-1)}{n}\zeta^2 + \lambda\zeta^2 + 2R\lambda\zeta \\ &+ \frac{1}{\varkappa}(U^{(2)} + \ldots)\Big\} + \frac{1}{4\pi R^2}\int_{\Sigma}\zeta^2\,d\sigma + \Big(\frac{\alpha}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(1)} + \ldots) \\ &+ \frac{\pi f(n-1)}{n}\zeta^2 + \lambda\zeta^2 + 2R\lambda\zeta + \frac{1}{\varkappa}(U^{(2)} + \ldots)\Big)\frac{n}{2\pi f R} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}}(r_1\cos n\varphi + r_2\sin n\varphi) + \Pi\{\lambda, \alpha; \zeta\}, \end{aligned} \tag{24}$$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_{\Sigma}\zeta'\cos n\varphi'\,d\sigma', \qquad r_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_{\Sigma}\zeta'\sin n\varphi'\,d\sigma'.$$

Wie man weiß, ist es hier möglich, $K_1 + \Sigma_1$ derart zu orientieren, daß $r_2 = 0$ wird[5]). Schreiben wir für r_1 noch kürzer r, so erhalten wir statt (24)

$$\zeta(\sigma) - \int_{\Sigma} N(\sigma, \sigma')\,\zeta'\,d\sigma' = \frac{r\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}} + \Pi\{\lambda, \alpha; \zeta\}. \tag{25}$$

Die geeignete Kombination von (25) und (17) gibt uns nach der von Lichtenstein angegebenen Methode[6]) zur Auflösung derartiger Integro-Differentialgleichungen die in einem (hinreichend kleinen) Bereich der $|\alpha|, |r|, |\lambda|$ für alle (τ) in $K + \Sigma$ konvergierende Entwicklung

$$\zeta(\tau) = \Sigma a_{\nu_1\nu_2\nu_3} \lambda^{\nu_1} \alpha^{\nu_2} r^{\nu_3}, \qquad \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geqq 1, \tag{26}$$

deren Koeffizienten in $K + \Sigma$ stetige Funktionen von x, y sind, die dort beschränkte, höchstens mit Ausnahme des Koordinatenursprungs stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Die unendliche Reihe (26) kann gliedweise differentiiert werden. Man erkennt aus (25) leicht, daß gewiß

$$a_{100}(\sigma) = a_{010}(\sigma) = 0, \qquad a_{001}(\sigma) = \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}} \tag{27}$$

ist. Setzen wir nunmehr (26) in die „Verzweigungsgleichung"

$$r = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \int_{\Sigma} \zeta(\sigma') \cos n\varphi'\,d\sigma' \tag{28}$$

ein, so nimmt diese die Gestalt

$$r\,\mathfrak{P}(\lambda, \alpha, r) = 0 \tag{29}$$

an, unter $\mathfrak{P}$ eine mit λ, α, r verschwindende Potenzreihe verstanden; denn man erkennt ohne weiteres, daß sämtliche Glieder der Verzweigungsgleichung den Faktor r enthalten. Darum ist gewiß $r = 0$, somit $\zeta(\tau) = 0$, auch hier eine Lösung des Problems.

Die erste Annäherung $\zeta_1(\sigma)$ von $\zeta(\sigma)$ ist, wie man leicht erkennt,

$$\zeta_1(\sigma) = \frac{r\cos n\,\psi}{\sqrt{\pi R}}. \tag{30}$$

Die Glieder zweiten Grades in r, λ, α in (26) stimmen mit denjenigen in $\zeta_2(\sigma)$, der zweiten Annäherung, überein, da die Approximationen dritter und höherer Ordnung nur in den Gliedern höherer als zweiter Ordnung Änderungen hervorrufen. Bezeichnet daher $\mathfrak{H}(\sigma, \sigma')$ den zu $N(\sigma, \sigma')$ gehörigen lösenden Kern, so können wir wegen

$$\int_{\Sigma} \mathfrak{H}(\sigma, \sigma') \cos n\,\varphi'\,d\sigma' = 0 \tag{31}$$

---

[5]) Vgl. l. c. [1]), S. 63.

[6]) Vgl. l. c. [1]), S. 105ff. Wegen der in unserem Falle fehlenden von ζ freien Glieder wird die Auflösung noch etwas vereinfacht.

die Glieder zweiten Grades in (29) dadurch bestimmen, daß wir in dem Ausdruck

$$(32)\quad \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_{\Sigma}\zeta_2(\sigma)\cos n\varphi\, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_{\Sigma}\left[\frac{r\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}} + \Pi\{\lambda, \alpha; \zeta_1\}\right]\cos n\varphi\, d\sigma$$

die Glieder zweiten Grades aufsuchen. Speziell interessiert uns der Koeffizient A von $r\lambda$. Wir finden

$$(33)\quad \mathsf{A} = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_{\Sigma} 2R\cdot\frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}}\cdot\frac{n}{2\pi f R}\cdot\cos n\varphi\, d\sigma = \frac{n}{f\pi} > 0.$$

Es läßt sich daher (29), nach Division durch r, in der Gestalt

$$(34)\quad \mathsf{A}\lambda + \mathfrak{P}_1(\lambda, \alpha, r) = 0$$

schreiben, unter $\mathfrak{P}_1$ die Potenzreihe $\mathfrak{P}$ ohne das Glied $\mathsf{A}\lambda$ verstanden. Wegen (33) ist (34) nach λ auflösbar, und es ergibt sich

$$(35)\quad \lambda = \mathfrak{p}(\alpha, r),$$

unter $\mathfrak{p}$ wiederum eine mit α und r verschwindende Potenzreihe verstanden. Wir haben damit λ derart bestimmt, daß die Verzweigungsgleichung (28) erfüllt ist. Setzen wir diesen Wert in (26) ein, so erfüllt $\zeta(\tau)$ gewiß (16) und (17). Wir haben eine von den Parametern r und α abhängige lineare Reihe zylindrischer Gleichgewichtsfiguren gefunden, die

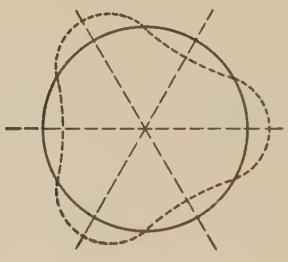


Fig. 1.

Fig. 2.

für $r = 0$ in den zu $\omega^{(n)}$ gehörigen gegebenen Kreiszylinder einmündet. Die einzelnen Figuren sind Zylinder, deren Normalschnitte n Symmetriegerade besitzen. In Fig. 1 und 2 ist dies an den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ veranschaulicht. Für $n = 1$ ($\omega = 0$) ergeben sich keine neuen Figuren[7]), sondern dieser Fall entspricht einer Verschiebung des Normalschnittes längs der x-Achse. Für $n = 2$ ($\omega^{(2)} = \sqrt{\pi\varkappa f}$) zweigen von der linearen Reihe der Kreiszylinder Zylinder elliptischen Normalschnittes ab.

[7]) Vgl. hierzu die in Vorbereitung befindliche Abhandlung von Herrn E. Hölder, Zur Theorie inhomogener Gleichgewichtsfiguren, 2. Mitteilung, wo dies in dem analogen räumlichen Fall der ruhenden Kugel gezeigt wird.

Integriert man (17) beiderseits über Σ_r, so erkennt man ferner ohne Mühe, daß für $0 \leqq r \leqq R$

$$\int_{\Sigma_r} \zeta \, d\sigma_r = -\frac{1}{2r} \int_{\Sigma_r} \zeta^2 \, d\sigma_r$$

ist, also gewiß (8) und damit die Forderung erfüllt ist, daß Σ_r und Σ_{r1} gleiche Flächen umschließen.

§ 2.

Die linearen Reihen in Abhängigkeit von λ; Durchführung für $n = 2$.

Es läßt sich aus den vorangehenden Betrachtungen nicht ersehen, ob bei festgehaltenem α eine von λ abhängige Schar sich finden läßt. Wir werden im folgenden erkennen, daß die Entscheidung hierüber die Heranziehung der dritten Approximation erforderlich macht.

Wir legen nunmehr unseren Betrachtungen die Gleichung (25) zugrunde, wobei wir der Einfachheit halber $\alpha = 0$ annehmen wollen und beginnen mit der Berechnung der Integralausdrücke $U^{(2)}$ und $U^{(3)}$. Es ist unter Benutzung der in (6) eingeführten Ausdrücke A_t und B_t mit $r = R$

$$\begin{aligned}(36)\qquad U^{(\nu)}(\sigma) = \frac{2\varkappa f R}{\nu!} \int_0^{2\pi} \Big[&(\zeta' \cos\varphi' - \zeta \cos\varphi) \Big\{ A_t' \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial t^{\nu-1}} \Big(\log \frac{R}{\varrho_t}\Big) \\ &+ \binom{\nu-1}{1} \frac{\partial A_t'}{\partial t} \frac{\partial^{\nu-2}}{\partial t^{\nu-2}} \Big(\log \frac{R}{\varrho_t}\Big) \Big\} \\ &+ (\zeta' \sin\varphi' - \zeta \sin\varphi) \Big\{ B_t' \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial t^{\nu-1}} \Big(\log \frac{R}{\varrho_t}\Big) \\ &+ \binom{\nu-1}{1} \frac{\partial B_t'}{\partial t} \frac{\partial^{\nu-2}}{\partial t^{\nu-2}} \Big(\log \frac{R}{\varrho_t}\Big) \Big\} \Big]_{t=0} d\varphi'.\end{aligned}$$

Es findet sich durch eine leichte Rechnung

$$\begin{aligned}(37)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(-\log \varrho_t) = -\frac{1}{\varrho_t^2} \Big\{ &\Big[x\Big(1 + \frac{t\zeta}{R}\Big) - x'\Big(1 + \frac{t\zeta'}{R}\Big)\Big]\Big[\frac{x\zeta}{R} - \frac{x'\zeta'}{R}\Big] \\ &+ \Big[y\Big(1 + \frac{t\zeta}{R}\Big) - y'\Big(1 + \frac{t\zeta'}{R}\Big)\Big]\Big[\frac{y\zeta}{R} - \frac{y'\zeta'}{R}\Big]\Big\},\end{aligned}$$

somit ist wegen

$$(38)\qquad \varrho^2 = 2R^2[1 - \cos(\varphi - \varphi')],$$

$$\begin{aligned}\Big[\frac{\partial}{\partial t}(-\log \varrho_t)\Big]_{t=0} &= -\frac{R}{\varrho^2} \{(\cos\varphi - \cos\varphi')(\zeta \cos\varphi - \zeta' \cos\varphi') \\ &\qquad + (\sin\varphi - \sin\varphi')(\zeta \sin\varphi - \zeta' \sin\varphi')\} \qquad (39) \\ &= -\frac{R(\zeta + \zeta')}{\varrho^2}[1 - \cos(\varphi - \varphi')] = -\frac{\zeta + \zeta'}{2R}\end{aligned}$$

und

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\log \varrho_t)\right]_{t=0} = \frac{2}{\varrho^4}\left\{(x-x')\left(\frac{x\zeta}{R}-\frac{x'\zeta'}{R}\right)+(y-y')\left(\frac{y\zeta}{R}-\frac{y'\zeta'}{R}\right)\right\}^2$$
$$-\frac{1}{\varrho^2}\left\{\left(\frac{x\zeta}{R}-\frac{x'\zeta'}{R}\right)^2+\left(\frac{y\zeta}{R}-\frac{y'\zeta'}{R}\right)^2\right\}$$

(40)
$$= \frac{2R^2(\zeta+\zeta')^2}{\varrho^4}[1-\cos(\varphi-\varphi')]^2-\frac{1}{\varrho^2}[\zeta^2+\zeta'^2$$
$$-2\zeta\zeta'\cos(\varphi-\varphi')]$$
$$= \frac{(\zeta+\zeta')^2}{2R^2}-\frac{(\zeta-\zeta')^2}{\varrho^2}-\frac{\zeta\zeta'}{R^2} = \frac{\zeta^2+\zeta'^2}{2R^2}-\frac{(\zeta-\zeta')^2}{\varrho^2}.$$

Nunmehr folgt aus (36)

$$\frac{1}{2\varkappa f}U^{(2)} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\{\zeta'\cos\varphi'-\zeta\cos\varphi\}\Big\{-\frac{(\zeta+\zeta')\cos\varphi'}{2}+\Big(\zeta'\cos\varphi'$$
$$+\frac{d\zeta'}{d\varphi'}\sin\varphi'\Big)\log\frac{R}{\varrho}\Big\}+\{\zeta'\sin\varphi'-\zeta\sin\varphi\}\Big\{-\frac{(\zeta+\zeta')\sin\varphi'}{2}$$

(41)
$$+\Big(\zeta'\sin\varphi'-\frac{d\zeta'}{d\varphi'}\cos\varphi'\Big)\log\frac{R}{\varrho}\Big\}\Big]d\varphi'$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[-\frac{\zeta'(\zeta+\zeta')}{2}+\frac{\zeta(\zeta+\zeta')}{2}\cos(\varphi-\varphi')$$
$$+\Big\{\zeta'^2-\zeta\zeta'\cos(\varphi-\varphi')+\zeta\frac{d\zeta'}{d\varphi'}\sin(\varphi-\varphi')\Big\}\log\frac{R}{\varrho}\Big]d\varphi'^{8}),$$

und wegen

$$\int_0^{2\pi}\Big\{\zeta'\cos(\varphi-\varphi')-\frac{d\zeta'}{d\varphi'}\sin(\varphi-\varphi')\Big\}\log\frac{R}{\varrho}\,d\varphi'$$

(42)
$$= \int_0^{2\pi}\Big\{\frac{d}{d\varphi'}\Big(-\zeta'\sin(\varphi-\varphi')\Big\}\log\frac{R}{\varrho}\,d\varphi' = \int_0^{2\pi}\frac{R^2\zeta'\sin^2(\varphi-\varphi')}{\varrho^2}d\varphi'$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\zeta'[1+\cos(\varphi-\varphi')]\,d\varphi'$$

ist schließlich

(43)
$$\frac{1}{2\varkappa f}U^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\Big[2\zeta'^2\log\frac{R}{\varrho}-2\zeta\zeta'-\zeta'^2\Big]d\varphi'.$$

---

[8]) Man beachte, daß wir hier nur die Funktion ζ auf Σ betrachten, somit ζ von φ allein abhängt.

Weiterhin ist

$$\frac{1}{2\varkappa f}U^{(3)} = \frac{R}{6}\int_0^{2\pi}\Big[\{\zeta'\cos\varphi' - \zeta\cos\varphi\}\Big\{\Big(\frac{\zeta^2+\zeta'^2}{2R^2} - \frac{(\zeta-\zeta')^2}{\varrho^2}\Big)\cos\varphi'$$
$$- \frac{\zeta+\zeta'}{R^2}\Big(\zeta'\cos\varphi' + \frac{d\zeta'}{d\varphi'}\sin\varphi'\Big)\Big\} + \{\zeta'\sin\varphi' - \zeta\sin\varphi\}\Big\{\Big(\frac{\zeta^2+\zeta'^2}{2R^2}$$
$$- \frac{(\zeta-\zeta')^2}{\varrho^2}\Big)\sin\varphi' - \frac{\zeta+\zeta'}{R^2}\Big(\zeta'\sin\varphi' - \frac{d\zeta'}{d\varphi'}\cos\varphi'\Big)\Big\}\Big]d\varphi'$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{\zeta'(\zeta^2+\zeta'^2)}{2R} - \frac{R\zeta'(\zeta-\zeta')^2}{\varrho^2} - \frac{\zeta'^2(\zeta+\zeta')}{R}$$
(44)
$$- \frac{\zeta(\zeta^2+\zeta'^2)\cos(\varphi-\varphi')}{2R} + \frac{R\zeta(\zeta-\zeta')^2\cos(\varphi-\varphi')}{\varrho^2}$$
$$+ \frac{\zeta\zeta'(\zeta+\zeta')\cos(\varphi-\varphi')}{R} - \zeta\frac{d\zeta'}{d\varphi'}\frac{(\zeta+\zeta')\sin(\varphi-\varphi')}{R}\Big]d\varphi'$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{\zeta'(\zeta^2+\zeta'^2)}{2R} - \frac{\zeta(\zeta-\zeta')^2}{2R} + \frac{R(\zeta-\zeta')^3}{\varrho^2} - \frac{\zeta'^2(\zeta+\zeta')}{R}$$
$$- \frac{(\zeta^3-2\zeta^2\zeta'-\zeta\zeta'^2)\cos(\varphi-\varphi')}{2R} - \zeta\frac{d\zeta'}{d\varphi'}\frac{(\zeta+\zeta')\sin(\varphi-\varphi')}{R}\Big]d\varphi',$$

und wegen

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\zeta'}{d\varphi'}\sin(\varphi-\varphi')\,d\varphi' = \int_0^{2\pi}\zeta'\cos(\varphi-\varphi')\,d\varphi',$$
(45)
$$\int_0^{2\pi}\zeta'\frac{d\zeta'}{d\varphi'}\sin(\varphi-\varphi')\,d\varphi' = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\zeta'^2\cos(\varphi-\varphi')\,d\varphi',$$

erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{2\varkappa f}U^{(3)} = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{-\zeta^3+3\zeta^2\zeta'-3\zeta\zeta'^2-\zeta'^3}{2R} + \frac{R(\zeta-\zeta')^3}{\varrho^2}\Big]d\varphi'. \tag{46}$$

Wegen

$$\zeta_1 = \frac{r\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}},$$
$$\zeta_1^2 = \frac{r^2}{2\pi R} + \frac{r^2\cos 2n\varphi}{2\pi R},$$
(47)
$$\int_0^{2\pi}U^{(2)}\{\zeta_1\}\cos n\varphi\,d\varphi = 0.$$
$$\int_0^{2\pi}\zeta_1^2\cos n\varphi\,d\varphi = 0$$

sehen wir mit Rücksicht auf (32) sogleich, daß in der Verzweigungsgleichung (28) neben den Gliedern mit r auch die mit r^2 fehlen. Wir müssen uns daher noch mit der Bestimmung des Gliedes mit r^3 befassen. Es genügt, in Analogie zu unseren Betrachtungen bei der zweiten Approximation, den Ausdruck

$$(48)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_{\Sigma}\zeta_3(\sigma)\cos n\varphi\, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_{\Sigma}\left[\frac{r\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}} + \Pi\{\lambda;\zeta_2\}\right]\cos n\varphi\, d\sigma$$

zu untersuchen, da in diesem die Glieder bis zum dritten Grade einschließlich mit den entsprechenden der rechten Seite in (28) übereinstimmen.

Es gilt zunächst ζ_2 zu finden. Wegen

$$\begin{aligned}\Pi\{\lambda;\zeta_1\} &= \frac{r^2(n-1)\cos 2n\varphi}{4\pi R^2} + \frac{r^2\cos 2n\varphi}{8\pi R^2} + \frac{n\lambda r\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}\,.\,\pi f}\\ &\quad + \frac{r^2}{4\pi R^2} + \Lambda\{\lambda;r\}\qquad (49)\\ &= \frac{r^2}{4\pi R^2} + \frac{r^2(2n-1)\cos 2n\varphi}{8\pi R^2} + \frac{n\lambda r\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}\,.\,\pi f} + \Lambda\{\lambda;r\}\end{aligned}$$

finden wir

$$(50)\quad \zeta_2 = \frac{r\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}} + \frac{r^2}{4\pi R^2} + \frac{r^2(2n-1)\cos 2n\varphi}{4\pi R^2} + \frac{n\lambda r\cos n\varphi}{\pi f\sqrt{\pi R}} + \Lambda_1\{\lambda;r\},$$

wobei in Λ, Λ_1 die Gesamtheit der Glieder dritten und höheren Grades vereinigt ist. Nunmehr bestimmen wir den Koeffizienten k von r^3 in $\Pi\{\lambda;\zeta_2\}$. Man prüft leicht nach, daß wegen

$$\begin{aligned}\cos n\varphi\cos 2n\varphi &= \tfrac{1}{2}(\cos n\varphi + \cos 3n\varphi),\\ \cos^3 n\varphi &= \tfrac{3}{4}\cos n\varphi + \tfrac{1}{4}\cos 3n\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k &= \frac{(n-1)\cos n\varphi}{4\pi R^3\sqrt{\pi R}} + \frac{(2n-1)(n-1)}{8\pi R^3\sqrt{\pi R}}(\cos n\varphi + \cos 3n\varphi) + \frac{\cos n\varphi}{4\pi R^2\sqrt{\pi R}}\\ &\quad + \frac{(2n-1)\cos 3n\varphi}{24\pi R^3\sqrt{\pi R}} + \frac{(2n-1)\cos n\varphi}{8\pi R^3\sqrt{\pi R}} - \frac{n\cos n\varphi}{4\pi R^3\sqrt{\pi R}}\\ &\quad - \frac{n}{6\pi R^3\sqrt{\pi R}}\left(\frac{3}{4}\cos n\varphi + \frac{1}{4}\cos 3n\varphi\right) - \frac{n\cos n\varphi}{4\pi R^3\sqrt{\pi R}}\qquad (51)\\ &\quad + \frac{n}{6\pi^2 R\sqrt{\pi R}}\int_0^{2\pi}\frac{(\cos n\varphi - \cos n\varphi')^3}{\varrho^2}\,d\varphi'\\ &= \frac{\cos n\varphi}{8\pi R^3\sqrt{\pi R}}(2n^2 - 4n) + \frac{\cos 3n\varphi}{24\pi R^3\sqrt{\pi R}}(6n^2 - 8n + 2)\\ &\quad + \frac{n}{6\pi^2 R\sqrt{\pi R}}\int_0^{2\pi}\frac{(\cos n\varphi - \cos n\varphi')^3}{\varrho^2}\,d\varphi'\end{aligned}$$

ist.

Wir setzen von nun an speziell $n = 2$, da wegen des zuletzt in (51) hingeschriebenen Integrals die allgemeine Behandlung große rechnerische Schwierigkeiten darbietet. Es ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi')^3}{\varrho^2} d\varphi' = \frac{1}{2R^2} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi')^3}{1 - \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi'$$

$$= \frac{2}{R^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\varphi + \varphi') \sin^2(\varphi - \varphi') (\cos 2\varphi - \cos 2\varphi')}{1 - \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi'$$

(52)
$$= \frac{2}{R^2} \int_0^{2\pi} (\cos 2\varphi - \cos 2\varphi') \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2(\varphi + \varphi')\right) (1 + \cos(\varphi - \varphi')) d\varphi'$$

$$= \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} (\cos 2\varphi - \cos 2\varphi') (1 + \cos(\varphi - \varphi') - \cos 2(\varphi + \varphi') - \cos(\varphi - \varphi') \cos 2(\varphi + \varphi')) d\varphi'$$

$$= \frac{2\pi \cos 2\varphi}{R^2} + \frac{\pi \cos 2\varphi}{R^2} = \frac{3\pi \cos 2\varphi}{R^2}.$$

Alles in allem findet sich für $n = 2$ wegen (51) und (52)

(53)
$$\frac{1}{\sqrt{\pi R}} \int_\Sigma k \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\pi R^3} = k_1 > 0.$$

Wegen (34) und (53) hat daher für $n = 2$ nach Kürzung mit r die Verzweigungsgleichung die Gestalt

(54)
$$\mathsf{A}\lambda + k_1 r^2 + \mathfrak{P}_2(\lambda, r) = 0,$$

unter $\mathfrak{P}_2$ eine Potenzreihenentwicklung verstanden, in der die Glieder mit r, r^2 und λ fehlen. Wegen $\mathsf{A} > 0$, $k_1 > 0$ erhalten wir für r in der Umgebung von $\lambda = 0$ zwei Entwicklungen der Form

(55)
$$r^{(1)} = \left(-\frac{\mathsf{A}\lambda}{k_1}\right)^{1/2} + \mathfrak{P}_3\left\{\left(-\frac{\mathsf{A}\lambda}{k_1}\right)^{1/2}\right\},$$
$$r^{(2)} = -\left(-\frac{\mathsf{A}\lambda}{k_1}\right)^{1/2} + \mathfrak{P}_4\left\{\left(-\frac{\mathsf{A}\lambda}{k_1}\right)^{1/2}\right\},$$

unter $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ gewisse im Nullpunkt verschwindende, mit der zweiten Potenz ihrer Veränderlichen beginnende Potenzreihen verstanden. Es gehen daher von der betrachteten Figur für $\lambda < 0$ zwei „Arme“ neuer Gleichgewichtsfiguren aus.

(Eingegangen am 30. Oktober 1934.)

Über die Stammfunktion einer stetigen Funktion.

Von

Hermann Schmidt in Jena.

Der Satz, daß jede stetige Funktion $f(x)$ als Ableitung einer Funktion $F(x)$ (Stammfunktion) angesehen werden kann, wird gewöhnlich auf dem Umweg über die Summendefinition des bestimmten Integrals bewiesen[1]). Da es sich aber doch um eine aus der *Differential*rechnung zwangsläufig hervorgehende Fragestellung handelt, erscheint ein lediglich deren Hilfsmittel benutzender Beweis erwünscht; einen solchen habe ich in einer Anfängervorlesung im Sommerhalbjahr 1934 vorgetragen und möchte ihn hier kurz mitteilen[2]).

Satz. $f(x)$ sei in $a \leqq x \leqq b$ stetig. Dann gibt es eine daselbst differenzierbare Funktion $F(x)$ mit der Ableitung $F'(x) = f(x)$.

Beweis. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt unmittelbar die Existenz einer Folge $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ stetiger, stückweise linearer (oder konstanter) Funktionen, die in $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig gegen $f(x)$ strebt[3]) (geometrisch: einer Folge von zusammenhängenden Streckenzügen, die die Kurve $y = f(x)$ gleichmäßig approximieren). Zu jedem $f_n(x)$ kann man aber ohne weiteres eine Stammfunktion $F_n(x)$ angeben, die stückweise quadratisch (oder auch linear bzw. konstant) ist (deren geometrisches Bild also aus endlich vielen Parabelbögen und geradlinigen Strecken zusammengesetzt ist). Wir können und wollen es überdies so einrichten, daß für eine feste innere Stelle ξ, z. B. $\xi = \frac{1}{2}(a + b)$, des Intervalls der Wert $F_n(\xi) = \eta$ für alle n der nämliche ist. Alsdann folgt aber aus einem wohlbekannten Hilfs-

[1]) Vgl. z. B. Mangoldt-Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, 3 (1933), Nr. 34, Satz 4.

[2]) Auch in der neuen Landauschen „Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung" (Groningen 1934) ist der Beweis unseres Satzes (dort Satz 344, Beweis „möglichst einfach" aber doch „einer der schwersten des ganzen Buches") so geführt, daß die *Bezeichnung* „bestimmtes Integral" nicht vorkommt; der *Sache* nach wird aber mit dem oberen Darbouxschen Integral gearbeitet, das hierzu als deus ex machina eingeführt wird. Dabei wird übrigens (im Anschluß an eine nicht näher bezeichnete Arbeit von Poli) auf die Benutzung der gleichmäßigen Stetigkeit verzichtet, worauf es uns hier nicht ankommt.

[3]) Dies wird z. B. in dem so überaus einfachen Lebesgueschen Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes verwertet (Bulletin des sciences mathématiques (2) 22 (1898), S. 278), welch letzterer selbst aber für unseren Zweck nicht herangezogen zu werden braucht.

satz über die Differentiation von Funktionenfolgen[4]), daß die Folge $F_n(x)$ im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $F(x)$ strebt, welche die Ableitung $f(x)$ besitzt, w. z. b. w.

Zusatz. Zum Übergang zu einem offenen (nun nicht mehr notwendig beschränkten) Intervall j schöpfe man dieses durch eine Folge ineinanderliegender abgeschlossener Intervalle j_k mit dem gemeinsamen Innenpunkt ξ aus und konstruiere zu jedem von ihnen die oben erklärte Stammfunktion $F(x) = F(x; j_k)$; in jedem Punkt $x < j$ sind dann unendlich viele $F(x; j_k)$ erklärt, die aber wegen $F(\xi; j_k) = \eta$ alle übereinstimmen, also eine einheitliche Stammfunktion in j definieren.

---

[4]) Beweise mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung z. B. bei Mangoldt-Knopp, 2 (1932), Nr. 97, Satz 3 oder Landau, a. a. O. Satz 233. Die früher wohl meist üblichen Beweise mittels bestimmter Integrale [vgl. z. B. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik 3 (1922), Nr. 43] sind natürlich hier nicht brauchbar.

(Eingegangen am 7. November 1934.)

Über p-fach symmetrische schlichte Funktionen.

Von

Erwin Pflanz in Stuttgart.

Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der Menge $\mathfrak{S}_p$ der in $|z| < 1$ regulären, schlichten, normierten, p-fach symmetrischen Funktionen $f(z)$, d. h. mit denjenigen schlichten Funktionen, deren Potenzreihenentwicklung um $z = 0$ von der Form ist

$$f(z) = z + c_1 z^{p+1} + c_2 z^{2p+1} + \ldots + c_n z^{np+1} + \ldots,$$

wo p positiv ganz ist.

Mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$ werde die Menge der in $|z| < 1$ regulären, schlichten, normierten Funktionen $s(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ bezeichnet. Es ist natürlich

$$\mathfrak{S}_p < \mathfrak{S}.$$

Die Ergebnisse sind für allgemeines p aufgestellt; für $p = 1$ ergeben sich für beliebige $s(z)$ aus $\mathfrak{S}$ gewisse Abschätzungen wieder, von denen ausgegangen wurde. Es werden hauptsächlich die folgenden Tatsachen gebraucht: Für $s(z)$ aus $\mathfrak{S}$ gilt

$$(1) \qquad \left| z \frac{s''}{s'}(z) - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leqq \frac{4r}{1-r^2}\ ^{1}),$$

$$(2) \qquad \frac{1}{(1+r)^2} \leqq \left| \frac{s(z)}{z} \right| \leqq \frac{1}{(1-r)^2}\ ^{2}) \quad |z| \leqq r,\ 0 \leqq r < 1,$$

$$(3) \qquad \frac{1-r}{1+r} \leqq \left| z \frac{s'}{s}(z) \right| \leqq \frac{1+r}{1-r}\ ^{3}),$$

$$(4) \qquad R_k = 2 - \sqrt{3} = 0{,}26\ldots\ ^{4}),$$

$$(5) \qquad R_s = \operatorname{Tg} \frac{\pi}{4} = 0{,}65\ldots\ ^{5}),$$

wo R_k und R_s die Rundungs- bzw. die Sternschranke der $s(z)$ bezeichnen.

Im Hilfssatz des § 1 wird gezeigt, daß sich zu jeder $s(\mathfrak{z})$ aus $\mathfrak{S}$ eindeutig eine Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$ mit $\mathfrak{z} = z^p$ konstruieren läßt und

---

[1]) Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2, S. 76.

[2]) Vgl. [1]), S. 78.

[3]) R. Nevanlinna, Über die konforme Abbildung von Sterngebieten, Oeversikt av Finska Vet. soc. Forh. 63 (1920—1921).

[4]) Vgl. [1]), S. 81.

[5]) H. Grunsky, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 43 (1933), S. 140.

umgekehrt; für solche „zugeordnete" Funktionen ergeben sich die für diese Arbeit grundlegenden Identitäten des Satzes 1

$$z\frac{f'}{f}(z) = \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}),$$

$$z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z) + 1 = p\left\{\mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}) + 1\right\}.$$

In Satz 2 wird hieraus gefolgert, daß Abschätzungen von

$$\Re\left\{z\frac{s''}{s'}(z) - z\frac{s'}{s}(z)\right\} \quad \text{bzw.} \quad J\left\{z\frac{s''}{s'}(z) - z\frac{s'}{s}(z)\right\}$$

der $s(z)$ aus $\mathfrak{S}$, gültig in gewissem Kreis $|z| \leqq r$, leicht angebbare Ungleichungen für $\Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\}$ bzw. $J\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\}$ der $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$ im gleichen Kreis ergeben und umgekehrt. Unter Anwendung von Satz 1 erhält man in Satz 3 Abschätzungen für $z\frac{s''}{s'}(z) - z\frac{s'}{s}(z)$, desgleichen in Satz 4 für

$$z\frac{f''}{f'}(z) + (p-1)\,z\frac{f'}{f}(z).$$

In § 2 werden die Sternschranke R_{sp} und die Rundungsschranke R_{kp} der $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$ und ihr Zusammenhang mit R_s und R_k untersucht. Satz 5 besagt, daß

$$R_{sp} = \sqrt[p]{R_s}$$

ist. Es strebt also

$$R_{sp} \to 1 \qquad \text{für } p \to \infty.$$

Die Verbindung von Satz 4 mit Satz 3 führt zu Satz 6. In diesem werden Schranken für die R_{kp} aufgestellt. Weiter läßt sich zeigen, daß

$$R_{kp} < \sqrt[p]{R_k}$$

ist und daß

$$R_{kp} \to 1 \qquad \text{rückt für } p \to \infty.$$

Satz 7 des § 3 liefert scharfe Grenzen für $\left|z\frac{f'}{f}(z)\right|$ und $|f'(z)|$. Im Falle $p = 2$ ergibt sich beispielsweise für die (ungeraden) Funktionen $u(z)$ aus $\mathfrak{S}_2$:

$$\frac{1-r^2}{1+r^2} \leqq \left|z\frac{u'}{u}(z)\right| \leqq \frac{1+r^2}{1-r^2},$$

$$\frac{1-r^2}{(1+r^2)^2} \leqq |u'(z)| \leqq \frac{1+r^2}{(1-r^2)^2}.$$

Die letzte Ungleichung war bis jetzt erst für sternförmige $u(z)$ bewiesen[6]).

[6]) Privalov, Recueil math. soc. math. de Moscou 31 (1924), S. 350—365.

§ 1.

Hilfssatz. Durch

$$s(z^p) = f^p(z) \tag{6}$$

werden die Funktionen der Klassen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_p$ einander umkehrbar eindeutig zugeordnet, d. h.

a) zu jeder $s(z)$ aus $\mathfrak{S}$ gibt es genau eine Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$, so daß (6) gilt und

b) zu jeder $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$ gibt es genau eine Funktion $s(z)$ aus $\mathfrak{S}$, so daß die Beziehung (6) besteht.

Diese Tatsache ist bekannt, der Beweis wird daher übergangen.

Die durch (6) miteinander verknüpften Funktionen aus $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_p$ werden im folgenden „zugeordnet" genannt.

Satz 1. Aus

$$s(\mathfrak{z}) = f^p(z) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{z} = z$$

ergeben sich folgende Identitäten:

$$z\frac{f'}{f}(z) = \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}), \tag{7}$$

$$z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z) + 1 = p\left\{\mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\frac{s}{s}(\mathfrak{z}) + 1\right\}. \tag{8}$$

Beweis. Es bedeute

$$f'(z) = \frac{df}{dz}, \quad s'(\mathfrak{z}) = \frac{ds}{d\mathfrak{z}}.$$

Dann folgt aus (6) durch logarithmische Differentiation, wegen $\frac{d\mathfrak{z}}{dz} = p z^{p-1}$:

$$p \cdot \frac{f'}{f}(z) = \frac{s'}{s}(\mathfrak{z}) \cdot p z^{p-1}$$

oder

$$z\frac{f'}{f}(z) = \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}),$$

d. h. die Behauptung (7). Hieraus ergibt sich weiter

$$\frac{1}{z} + \frac{f''}{f'}(z) - \frac{f'}{f}(z) = \left\{\frac{1}{\mathfrak{z}} + \frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \frac{s'}{s}(\mathfrak{z})\right\} p z^{p-1}$$

oder

$$1 + z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z) = p\left\{1 + \mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z})\right\},$$

was die Behauptung (8) beweist.

Satz 2. a) Für alle $s(z)$ aus $\mathfrak{S}$ gelte für alle Punkte der Kreisscheibe $|z| \leqq r$, $0 \leqq r < 1$:

$$G(r) \leqq \Re\left\{z\frac{s''}{s'}(z) - z\frac{s'}{s}(z)\right\} \leqq F(r) \tag{9}$$

und

$$Q(r) \leqq J\left\{z\frac{s''}{s'}(z) - z\frac{s'}{s}(z)\right\} \leqq P(r). \tag{10}$$

Dann ergibt sich für alle $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$, gültig in $|z| \leqq r$:

$$(11)\quad pG(r^p) + p - 1 \leqq \Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} \leqq pF(r^p) + p - 1,$$

$$(12)\quad pQ(r^p) \leqq J\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} \leqq pP(r^p).$$

Dabei seien $F(r)$, $G(r)$, $P(r)$, $Q(r)$ Funktionen von r, die in $0 \leqq r < 1$ definiert sind.

b) Es gelte für die Funktionen $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$

$$g(r) \leqq \Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} \leqq h(r)$$

und

$$q(r) \leqq J\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} \leqq K(r) \qquad |z| \leqq r,\ 0 \leqq r < 1.$$

Dann folgt für alle $s(z)$ aus $\mathfrak{S}$, gültig in $|z| \leqq r$:

$$-1 + \frac{1}{p}\left\{g(\sqrt[p]{r}) + 1\right\} \leqq \Re\left\{z\frac{s''}{s'}(z) - z\frac{s'}{s}(z)\right\} \leqq \frac{1}{p}\left\{h(\sqrt[p]{r}) + 1\right\} - 1,$$

$$\frac{1}{p}q(\sqrt[p]{r}) \leqq J\left\{z\frac{s''}{s'}(z) - z\frac{s'}{s}(z)\right\} \leqq \frac{1}{p}K(\sqrt[p]{r}).$$

Dabei seien $g(r)$, $h(r)$, $q(r)$, $K(r)$ in $0 \leqq r < 1$ definierte Funktionen von r.

Beweis zu a). $f(z)$ sei eine beliebige, aber dann feste Funktion aus $\mathfrak{S}_p$; $s(\mathfrak{z})$ sei ihr zugeordnet. Den Punkten der Kreisscheibe $|z| \leqq r$, $0 \leqq r < 1$, entsprechen dabei die Punkte von $|\mathfrak{z}| = |z^p| \leqq r^p = R$.

Für $s(\mathfrak{z})$ gilt nach Voraussetzung für $|\mathfrak{z}| \leqq R$, $0 \leqq R < 1$:

$$G(R) \leqq \Re\left\{\mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z})\right\} \leqq F(R)$$

(in der Voraussetzung zu Satz 2 a) ist formal z durch $\mathfrak{z}$ und r durch R ersetzt).

Also folgt wegen der Gleichheit (8) aus Satz 1

$$z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z) = p\left\{\mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z})\right\} + p - 1$$

für die Ausgangsfunktion $f(z)$

$$\Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} = p\,\Re\left\{\mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z})\right\} + p - 1$$

oder

$$pG(R) + p - 1 \leqq \Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} \leqq pF(R) + p - 1$$

$$\text{für } |z| \leqq r,\quad 0 \leqq r < 1.$$

Es ergibt sich also wegen

$$R = r^p$$

die Behauptung a) für den Realteil:

$$p \cdot G(r^p) + p - 1 \leqq \Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} \leqq p \cdot F(r^p) + p - 1.$$

Der Beweis zu a) für den Imaginärteil verläuft entsprechend. Nur folgt aus (8) hier

$$J\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} = pJ\left\{\mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z})\right\}$$

und somit ohne weiteres die Behauptung.

Beim Beweis zu b) geht man aus von einer beliebigen Funktion $s(\mathfrak{z})$ aus $\mathfrak{S}$. Auf die ihr zugeordnete $f(z)$ wendet man die Vorausetzung von b) an und folgert hieraus die Behauptung b), wenn man am Schluß noch formal $\mathfrak{z}$ durch z, R durch r ersetzt.

Satz 3. $s(z)$ sei eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}$.

Dann gilt für $|z| \leqq r$ mit $0 \leqq r < 1$

$$-1 + \frac{1}{\log r} \leqq \Re\left\{z\frac{s''}{s'}(z) - z\frac{s'}{s}(z)\right\} \leqq -1 - \frac{3}{\log r}, \tag{13}$$

$$\frac{2}{\log r} \leqq J\left\{z\frac{s''}{s'}(z) - z\frac{s'}{s}(z)\right\} \leqq -\frac{2}{\log r}. \tag{14}$$

Beweis. Ausgangspunkt sei eine beliebige, aber dann feste Funktion $s(\mathfrak{z})$ aus $\mathfrak{S}$. $f(z)$ sei die ihr zugeordnete Funktion aus $\mathfrak{S}_p$. Der Kreisfläche $|\mathfrak{z}| \leqq R$ entspricht wegen $\mathfrak{z} = z^p$ die Kreisfläche

$$|z| = \sqrt[p]{|\mathfrak{z}|} \leqq \sqrt[p]{R} = r.$$

Bekanntlich[1]) gilt für jede Funktion aus $\mathfrak{S}$ die Beziehung (1). Sie gilt insbesondere für obiges $f(z)$.

Aus den Identitäten (7) und (8) für zugeordnete $f(z)$ und $s(\mathfrak{z})$ folgt weiter

$$z\frac{f''}{f'}(z) = p\left\{\mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z})\right\} + \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}) + p - 1. \tag{15}$$

Wegen $r = \sqrt[p]{R}$ und (1) ergibt sich hieraus, gültig für $|\mathfrak{z}| \leqq R$, $0 \leqq R < 1$:

$$\left|\mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}) + \frac{1}{p}\mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}) - \left(-1 + \frac{1}{p} + \frac{2R^{2/p}}{p(1-R^{2/p})}\right)\right| \leqq \frac{4R^{1/p}}{p(1-R^{2/p})}. \tag{16}$$

Da (16) bei festem R und $\mathfrak{z}$ für jedes $p \geqq 1$ gilt, kann man $p \to \infty$ rücken lassen.

Wegen

$$\lim_{p\to\infty} p(1 - R^{2/p}) = -2\log R$$

erhält man also

$$\left|\mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}) + 1 + \frac{1}{\log R}\right| \leqq -\frac{2}{\log R}.$$

Hieraus folgt

$$-1+\frac{1}{\log R} \leqq \Re\left\{\mathfrak{z}\,\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\,\frac{s'}{s}(\mathfrak{z})\right\} \leqq -1-\frac{3}{\log R},$$

$$\frac{2}{\log R} \leqq J\left\{\mathfrak{z}\,\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{z}\,\frac{s'}{s}(\mathfrak{z})\right\} \leqq -\frac{2}{\log R}.$$

Ersetzt man formal $\mathfrak{z}$ durch z, R durch r, so ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Anmerkung. 1. Die eben erhaltene Abschätzung

$$\Re\left\{z\,\frac{s''}{s'}(z) - z\,\frac{s'}{s}(z)\right\} \geqq -1+\frac{1}{\log r} \tag{13 a}$$

werde nun mit einer Ungleichung verglichen, die sich aus (1) und (3) für denselben Ausdruck ergibt.

Es folgt aus (1)

$$\Re z\,\frac{s''}{s'}(z) \geqq \frac{-2r(2-r)}{1-r^2}$$

und aus (3)

$$\Re z\,\frac{s'}{s}(z) \leqq \frac{1+r}{1-r}.$$

Somit erhält man

$$\Re\left\{z\,\frac{s''}{s'}(z) - z\,\frac{s'}{s}(z)\right\} \geqq -1-\frac{6r}{1-r^2}. \tag{17}$$

Der Vergleich von (17) mit (13 a) zeigt, daß die Schranke in (13 a) besser ist als die in (17) für $r_0 = 0,0\,6\ldots < r < 1$, wobei sich r_0 ergibt aus

$$\frac{1}{\log r_0} = \frac{-6r_0}{1-r_0^2}.$$

Für $r \to 1$ ist übrigens

$$\lim_{r\to 1} \frac{-1+\frac{1}{\log r}}{-1-\frac{6r}{1-r^2}} = \frac{1}{3}.$$

2. Die Anwendung des Satzes 2 a) auf Satz 3 führt wegen

$$G(r) = -1+\frac{1}{\log r}, \qquad F(r) = -1-\frac{3}{\log r},$$

$$Q(r) = \frac{2}{\log r}, \qquad P(r) = -\frac{2}{\log r}$$

zu

$$-1+\frac{1}{\log r} \leqq \Re\left\{z\,\frac{f''}{f'}(z) - z\,\frac{f'}{f}(z)\right\} \leqq -1-\frac{3}{\log r},$$

$$\frac{2}{\log r} \leqq J\left\{z\,\frac{f''}{f'}(z) - z\,\frac{f'}{f}(z)\right\} \leqq -\frac{2}{\log r}. \tag{13 b}$$

Für die Untermenge der $f(z)$ erhalten wir hier also keine bessere Abschätzung für die betrachteten Ausdrücke.

Mit (17) und Satz 2a) ergibt sich jedoch

$$\Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} \geqq -1 - \frac{6pr^p}{1-r^{2p}}. \tag{18}$$

Bei festem r mit $0 < r < 1$ geht die Schranke in (18) $\to -1$ falls $p \to \infty$, während die entsprechende Schranke in (13 b) für jedes p gleich der Konstanten $-1 + \frac{1}{\log r}$, also < -1 ist. Für großes p ist somit (18) besser als (13a).

Satz 4. $f(z)$ sei eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}_p$.

Dann gilt für $|z| \leqq r$, $0 \leqq r < 1$

$$\left|z\frac{f''}{f'}(z) + (p-1)\,z\frac{f'}{f}(z) - \left(p - 1 + \frac{2pr^{2p}}{1-r^{2p}}\right)\right| \leqq \frac{4pr^p}{1-r^{2p}}, \tag{19}$$

insbesondere

$$\begin{aligned} p - 1 - \frac{2pr^p(2-r^p)}{1-r^{2p}} &\leqq \Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) + (p-1)\,z\frac{f'}{f}(z)\right\} \\ &\leqq p - 1 + \frac{2pr^p(2+r^p)}{1-r^{2p}}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$-\frac{4pr^p}{1-r^{2p}} \leqq J\left\{z\frac{f''}{f'}(z) + (p-1)\,z\frac{f'}{f}(z)\right\} \leqq \frac{4pr^p}{1-r^{2p}}. \tag{21}$$

Die Grenzen in (20) werden angenommen von

$$f_1(z) = \frac{z}{(1-z^p)^{2/p}} = z + \ldots$$

in den Punkten $z = re^{\frac{2k\pi}{p}i}$ bzw. $z = re^{\frac{\pi+2k\pi}{p}i}$, $(k = 0, 1, \ldots p-1)$; sie sind also scharf.

Beweis. Wir gehen aus von $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$.

Es sei $s(\mathfrak{z})$ die zugeordnete Funktion aus $\mathfrak{S}$.

Dabei ist $\mathfrak{z}$ mit z verknüpft durch $\mathfrak{z} = z^p$. Der Kreisfläche $|z| \leqq r$ entspricht die Kreisfläche $|\mathfrak{z}| = |z^p| \leqq r^p = R$.

Für jede $s(\mathfrak{z})$ aus $\mathfrak{S}$, also auch für die obige zugeordnete, gilt nun die Beziehung (1).

Die Identitäten (7) und (8) führen auf

$$\mathfrak{z}\frac{s''}{s'}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{p}\left\{z\frac{f''}{f'}(z) + (p-1)\,z\frac{f'}{f}(z) + 1 - p\right\}.$$

Setzt man dies in (1) ein, so ergibt sich, wegen $R = r^p$

$$\left|z\frac{f''}{f'}(z) + (p-1)\,z\frac{f'}{f}(z) - \left(p - 1 + \frac{2pr^{2p}}{1-r^{2p}}\right)\right| \leqq \frac{4pr^p}{1-r^{2p}}$$

$$|z| \leqq r, \quad 0 \leqq r < 1.$$

Hieraus folgen ohne weiteres die Behauptungen (20) und (21).

Bekanntlich ist $s_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ reg. schl. in $|z| < 1$. Nach der Behauptung a) des Hilfssatzes ist die ihr durch (6) eindeutig zugeordnete Funktion $f_1(z) = \sqrt[p]{s_1(z^p)} = \frac{z}{(1-z^p)^{2/p}} = z + \ldots$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}_p$.

Nun ist

$$z\frac{f_1''}{f_1'}(z) + (p-1)\,z\frac{f_1'}{f_1}(z) = p - 1 + \frac{2\,p\,z^p(2+z^p)}{1-z^{2p}}.$$

Daher ergibt sich für die Punkte $z = re^{\frac{2k\pi}{p}i}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots p-1)$:

$$\Re\frac{2\,p\,z^p(2+z^p)}{1-z^{2p}} = \frac{2\,p\,r^p(2+r^p)}{1-r^{2p}},$$

so daß die obere Schranke von (20) durch $f_1(z)$ in diesen Punkten angenommen wird. Sie ist also scharf.

Desgleichen ist die untere Schranke in (20) scharf. Denn es ist für $f_1(z)$ in $z = re^{\frac{\pi+2k\pi}{p}i}$, $k = 0, 1, 2, \ldots p-1$:

$$\Re\frac{2\,p\,z^p(2+z^p)}{1-z^{2p}} = \frac{-2\,p\,r^p(2-r^p)}{1-r^{2p}}.$$

§ 2.

Satz 5. R_s sei die Sternschranke der Funktionen $s(z)$ der Klasse $\mathfrak{S}$, R_{sp} die Sternschranke der $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$.

Dann gilt

$$R_{sp} = \sqrt[p]{R_s}. \tag{22}$$

Zusatz. Es ist

$$R_{sp} = \sqrt[p]{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \sqrt[p]{0{,}6557\ldots.}$$

Beweis. Wir gehen aus von einer beliebigen, aber dann festgehaltenen Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$. $s(\mathfrak{z})$ sei die ihr zugeordnete Funktion aus $\mathfrak{S}$. Es gilt also

$$s(\mathfrak{z}) = f^p(z) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{z} = z^p.$$

R_s bezeichne die Sternschranke der $s(\mathfrak{z})$; es ist somit für jedes $s(\mathfrak{z})$ in $|\mathfrak{z}| < R_s$:

$$\Re\,\mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}) > 0$$

(Kriterium für sternf. Abbildung[7]).

---

[7]) Vgl. [1]), S. 82.

Wegen der Gleichheit (7) für zugeordnete $f(z)$ und $s(\mathfrak{z})$ ergibt sich insbesondere für unsere Ausgangsfunktion $f(z)$

$$\Re z\frac{f'}{f}(z) = \Re \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}) > 0$$

$$\text{für} \quad |z^p| = |\mathfrak{z}| < R_s, \quad \text{d. h. in} \quad |z| < \sqrt[p]{R_s}.$$

Daher ist

$$R_{sp} \geqq \sqrt[p]{R_s}. \tag{23}$$

Geht man umgekehrt von einer beliebigen, aber dann festen Funktion $s(\mathfrak{z})$ der Klasse $\mathfrak{S}$ aus, so gilt für die ihr zugeordnete Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$ auch die Identität (7).

Es sei R_{sp} die Sternschranke der $f(z)$; dann ist

$$\Re z\frac{f'}{f}(z) > 0 \quad \text{in} \quad |z| < R_{sp}.$$

Somit ist für unsere Ausgangsfunktion $s(\mathfrak{z})$

$$\Re \mathfrak{z}\frac{s'}{s}(\mathfrak{z}) = \Re z\frac{f'}{f}(z) > 0$$

$$\text{in} \quad \sqrt[p]{|\mathfrak{z}|} = |z| < R_{sp}, \quad \text{d. h. in} \quad |\mathfrak{z}| < R_{sp}^p.$$

Dies führt zu

$$R_s \geqq R_{sp}^p$$

oder

$$R_{sp} \leqq \sqrt[p]{R_s}. \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt somit

$$R_{sp} = \sqrt[p]{R_s}.$$

Wegen (5) ergibt sich ohne weiteres aus (22) der Zusatz.

Satz 6. Es sei $f(z)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}_p$, R_{kp} die Rundungsschranke von $\mathfrak{S}_p$.

a) Dann gilt in $|z| \leqq r$, $0 \leqq r < 1$ sowohl

$$\Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) + 1\right\} \geqq \frac{p-1}{\log r^p} + \frac{1 - 4r^p + r^{2p}}{1 - r^{2p}} \tag{25}$$

als auch

$$\Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) + 1\right\} \geqq \frac{r^{2p} - 2(3p-1)r^p + 1}{1 - r^{2p}}. \tag{26}$$

b) Es ist

$$R_{k2} \geqq 0{,}36\ldots, \tag{27}$$

$$R_{k3} \geqq 0{,}40\ldots, \tag{28}$$

$$R_{kp} \geqq \sqrt[p]{3p - 1 - \sqrt{(3p-1)^2 - 1}}, \qquad p = 4, 5, \ldots. \tag{29}$$

c) Es ist

$$R_{kp} \leqq \sqrt[p]{p+1-\sqrt{(p+1)^2-1}} < \sqrt[p]{R_k}. \tag{30}$$

Beweis zu a). Für $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$ folgt aus Satz 3, Gleichung (13b):

$$\Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} \geqq -1 + \frac{1}{\log r}$$

und aus Satz 4, Gleichung (20):

$$\Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) + (p-1)\,z\frac{f'}{f}(z)\right\} \geqq p - 1 - \frac{2\,p\,r^p(2-r^p)}{1-r^{2p}}$$

die Behauptung (25) durch kurze Rechnung

Entsprechend folgt aus (18):

$$\Re\left\{z\frac{f''}{f'}(z) - z\frac{f'}{f}(z)\right\} \geqq -1 - \frac{6\,p\,r^p}{1-r^{2p}}$$

und aus (20) die Ungleichung (26).

Die Ungleichungen (25) und (26) werden in b) zur Aufstellung unterer Schranken für die Rundungsschranken R_{kp} der $f(z)$ benutzt werden.

Wir verwenden dabei, wie beim Beweis zu c), folgendes Kriterium für konvexe Abbildung[8]):

$h(z)$ sei eindeutig regulär in $|z| < R$. Notwendig und hinreichend dafür, daß $|z| < r$ mit $0 < r < R$ konvex abgebildet wird, ist, daß in $|z| < r$

$$\Re\left\{z\frac{h''}{h'}(z) + 1\right\} \geqq 0$$

ist.

Beweis zu b). Um untere Schranken für die R_{kp} $(p = 2, 3, \ldots)$ zu gewinnen, nehmen wir zuerst Gleichung (25) zu Hilfe.

Für $p = 1$ ergibt sich hieraus

$$\Re\left\{z\frac{s''}{s'}(z) + 1\right\} \geqq \frac{1-4\,r+r^2}{1-r^2}$$

und hieraus

$$\Re\left\{z\frac{s''}{s'}(z) + 1\right\} \geqq 0$$

für $|z| \leqq 2 - \sqrt{3} = R_k$.

Im folgenden werden die Fälle $p = 2, 3, \ldots$ betrachtet.

Man hat festzustellen, für welches kleinste $r = r_p > 0$ bei festem p

$$\frac{p-1}{\log r^p} + \frac{1-4\,r^p+r^{2p}}{1-r^{2p}} = 0$$

---

[8]) Vgl. [1]), S. 81.

oder

$$\log r = -\frac{p-1}{p} \cdot \frac{1-r^{2p}}{1+r^{2p}-4r^p}$$

ist.

Dann gilt

$$R_{kp} \geqq r_p.$$

Es ergibt sich so die Tabelle I:

(27) $p = 2 \qquad R_{k2} \geqq 0{,}36\ldots,$

(28) $p = 3 \qquad R_{k3} \geqq 0{,}40\ldots,$

$p = 4 \qquad R_{k4} \geqq 0{,}39\ldots,$

$p = 5 \qquad R_{k5} \geqq 0{,}38\ldots.$

Man kann leicht nachweisen, daß

$$\lim_{p\to\infty} r_p = \frac{1}{e} = 0{,}367\ldots$$

ist.

Wir können also mit (25) nicht zeigen, daß $R_{kp} \to 1$ rückt für $p \to \infty$. Letzteres ergibt sich jedoch, wenn man (26) heranzieht.

Aus

$$r^{2p} - 2(3p-1)r^p + 1 = 0,$$

folgt

$$r = \sqrt[p]{3p-1 \pm \sqrt{(3p-1)^2-1}}.$$

Es ist also

(29) $$R_{kp} \geqq \sqrt[p]{3p-1-\sqrt{(3p-1)^2-1}}.$$

Dies liefert die Tabelle II:

$p = 2 \qquad R_{k2} \geqq 0{,}31\ldots,$

$p = 3 \qquad R_{k3} \geqq 0{,}39\ldots,$

$p = 4 \qquad R_{k4} \geqq 0{,}46\ldots,$

$p = 5 \qquad R_{k5} \geqq 0{,}51\ldots.$

Aus (29) folgt durch Umformung

$$R_{kp} \geqq \frac{1}{\sqrt[p]{p} \cdot \sqrt[p]{3-\frac{1}{p}+\sqrt{\left(3-\frac{1}{p}\right)^2+\frac{1}{p^2}}}}$$

also

$$R_{kp} \to 1 \qquad \text{für} \qquad p \to \infty.$$

Der Vergleich der beiden Tabellen zeigt, daß für $p = 2$ und $p = 3$ die Tabelle I bessere untere Schranken für R_{kp} liefert. Für $p = 4, 5, \ldots$ gibt die Tabelle II bessere Werte.

Beweis zu c). Für die Funktion

$$f_1(z) = \frac{z}{(1-z^p)^{2/p}} = z + \dots \qquad \text{aus } \mathfrak{S}_p$$

ergibt sich

$$z\frac{f_1''}{f_1'}(z) + 1 = \frac{z^{2p} + 2(p+1)z^p + 1}{1 - z^{2p}}.$$

Für die Punkte

$$z = re^{\frac{\pi + 2k\pi}{p} i}, \qquad k = 0, 1, \dots, p-1$$

ist

$$z^p = -r^p, \qquad z^{2p} = r^{2p}.$$

Somit ist für diese Punkte

$$\Re\left\{z\frac{f_1''}{f_1'}(z) + 1\right\} = \frac{r^{2p} - 2(p+1)r^p + 1}{1 - r^{2p}}.$$

Also ist

$$\Re\left\{z\frac{f_1''}{f_1'}(z) + 1\right\} = 0 \qquad \text{für} \qquad z = r_0 e^{\frac{\pi + 2k\pi}{p} i},$$

wo sich r_0 ergibt aus

$$r_0^{2p} - 2(p+1)r_0^p + 1 = 0,$$

$$r_0 = \sqrt[p]{p + 1 - \sqrt{(p+1)^2 - 1}}.$$

Daher ist

$$R_{kp} \leqq \sqrt[p]{p + 1 - \sqrt{(p+1)^2 - 1}}. \tag{30}$$

Es soll nun noch gezeigt werden, daß für $p = 2, 3, \dots$

$$\sqrt[p]{p + 1 - \sqrt{(p+1)^2 - 1}} < \sqrt[p]{2 - \sqrt{3}} = \sqrt[p]{R_k}$$

ist.

Letzteres ist dann und nur dann richtig, falls

$$p + 1 - \sqrt{(p+1)^2 - 1} < 2 - \sqrt{3}$$

oder

$$p + 1 + \sqrt{(p+1)^2 - 1} > 2 + \sqrt{3}$$

ist, was offenbar für $p = 2, 3, \dots$ zutrifft.

Aus Tabelle I, Tabelle II und (30) erhält man also:

$$0{,}36.. \leqq R_{k2} \leqq 0{,}41..,$$
$$0{,}40.. \leqq R_{k3} \leqq 0{,}50..,$$
$$0{,}46.. \leqq R_{k4} \leqq 0{,}56..,$$
$$0{,}51.. \leqq R_{k5} \leqq 0{,}60..,$$

$$\sqrt[p]{3p - 1 - \sqrt{(3p-1)^2 - 1}} \leqq R_{kp} \leqq \sqrt[p]{p + 1 - \sqrt{(p+1)^2 - 1}}.$$

§ 3.

Satz 7. $f(z)$ sei eine Funktion der Klasse $\mathfrak{S}_p$.
Dann gilt für $|z| \leqq r$, $0 \leqq r < 1$:

$$\frac{1-r^p}{1+r^p} \leqq \left| z\frac{f'}{f}(z) \right| \leqq \frac{1+r^p}{1-r^p}, \tag{31}$$

$$\frac{1-r^p}{(1+r^p)^{1+2/p}} \leqq |f'(z)| \leqq \frac{1+r^p}{(1-r^p)^{1+2/p}}. \tag{32}$$

Die oberen Schranken werden bei festem r in den Punkten

$$z = re^{\frac{2k\pi}{p}i}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots p-1$$

die unteren Schranken in den Punkten

$$z = re^{\frac{\pi+2k\pi}{p}i}, \qquad k = 0, 1, \ldots p-1$$

durch

$$f_1(z) = \frac{z}{(1-z^p)^{2/p}} = z + \ldots$$

angenommen.

Sie sind also scharf.

Beweis. Wir gehen aus von einer beliebigen, aber dann festen Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_p$.

Für die ihr zugeordnete Funktion $s(\mathfrak{z})$ gilt die Ungleichung (3) und wegen der Gleichheit (7) für einander zugeordnete $f(z)$ und $s(\mathfrak{z})$ erhält man

$$\frac{1-R}{1+R} \leqq \left| z\frac{f'}{f}(z) \right| \leqq \frac{1+R}{1-R}$$

und hieraus

$$\frac{1-r^p}{1+r^p} \leqq \left| z\frac{f'}{f}(z) \right| \leqq \frac{1+r^p}{1-r^p} \text{ für } |z| \leqq r,\ 0 \leqq r < 1. \tag{31}$$

In gleicher Schlußweise ergibt sich wegen

$$\frac{s(\mathfrak{z})}{\mathfrak{z}} = \left(\frac{f(z)}{z}\right)^p \qquad \text{mit } \mathfrak{z} = z^p$$

und (2) für die Funktionen $f(z)$

$$\frac{1}{(1+r^p)^{2/p}} \leqq \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leqq \frac{1}{(1-r^p)^{2/p}} \text{ für } |z| \leqq r,\ 0 \leqq r < 1. \tag{33}$$

Aus (31) und (33) folgt somit

$$\frac{1-r^p}{(1+r^p)^{1+2/p}} \leqq |f'(z)| = \left| z\frac{f'}{f}(z) \cdot \frac{f(z)}{z} \right| \leqq \frac{1+r^p}{(1-r^p)^{1+2/p}}. \tag{32}$$

Die Schranken in (31) und (32) sind sämtlich scharf: Für die Funktion

$$f_1(z) = \frac{z}{(1-z^p)^{2/p}} = z + \dots \qquad \text{aus } \mathfrak{S}_p$$

ist

$$z\frac{f_1'}{f_1}(z) = \frac{1+z^p}{1-z^p}, \quad f_1'(z) = \frac{1+z^p}{(1-z^p)^{1+2/p}},$$

so daß bei festem r die oberen Schranken in den Punkten

$$z = re^{\frac{2k\pi}{p}i}, \qquad k = 0, 1, \dots p-1,$$

die unteren Schranken in den Punkten

$$z = re^{\frac{\pi+2k\pi}{p}i}, \qquad k = 0, 1, \dots p-1$$

angenommen werden.

(Eingegangen am 7. Dezember 1934.)

Über zweidimensionale Finslersche Räume, insbesondere über solche mit geradlinigen Extremalen und positiver konstanter Krümmung.

Von

P. Funk in Prag.

Einleitung.

Die vorliegende Note ist eine Fortsetzung meiner in den Math. Annalen, Bd. 101 erschienenen Arbeit: „Über Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind“ [1]). Damals wurde aber nur der Fall besprochen, daß das Krümmungsmaß gleich Null und ferner der Fall, wo das Krümmungsmaß eine negative Konstante ist. Im § 1 bespreche ich zwei allgemein für die Finslerschen Räume gültige geometrische Deutungen für das Krümmungsmaß, allerdings vorläufig nur für $n = 2$. Es scheint jedoch, daß einer Verallgemeineruug für beliebiges n nichts im Wege steht, doch sind hier noch mehrere Fragen zu klären, auf die ich in einer späteren Veröffentlichung zurückkommen möchte. Im § 2 bringe ich einen einfachen geometrischen Beweis für einen von Berwald bereits bewiesenen Satz mit einer Verallgemeinerung dieses Satzes, durch den die Finslerschen Räume mit konstanter Krümmung und geradlinigen Extremalen geometrisch gekennzeichnet werden. Im § 3 beschäftige ich mich endlich mit dem Fall, daß das Krümmungsmaß eine positive Konstante ist. Dabei ergibt sich eine Beziehung zur Theorie der analytischen Funktionen.

§ 1.

Das Krümmungsmaß und seine geometrische Bedeutung.

Das unserer Betrachtung zugrunde liegende Variationsproblem habe die Form

$$s = \int F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt \to \text{Extr.},$$

wo F etwa eine zweimal stetig differenzierbare, positiv homogene Funktion ist. s wollen wir dann als das durch die Maßbestimmung aufgeprägte

[1]) Vgl. auch: Hamel, Über Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind. Diss. Göttingen 1901 und Math. Annalen 57 (1903); W. Wirtinger, Über allgemeine Maßbestimmungen, in welchen die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden. Monatshefte Math. Phys. 32 (1923); Berwald, Über n dimensionale Geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die Kürzesten sind. Math. Zeitschr. 30 (1929).

Längenmaß oder kurz als das natürliche Längenmaß bezeichnen. Nehmen wir nun an, daß neue Koordinaten so eingeführt seien, daß für einen zu untersuchenden Extremalenbogen $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$ die Jacobische Gleichung die Form annimmt:

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + \mathfrak{K}(s)\eta = 0, \tag{1}$$

dann bezeichnet man bekanntlich die so längs des Bogens erklärte Funktion $\mathfrak{K}$ des Linienelementes als das Krümmungsmaß.

Ist nun

$$\eta = C_1\varphi_1(s) + C_2\varphi_2(s) \tag{2}$$

die allgemeine Lösung der Jacobischen Gleichung, so wollen wir

$$l = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

als die linearisierende Veränderliche bezeichnen. Denken wir uns nämlich eine neue Koordinatentransformation so durchgeführt, daß in der Jacobischen Gleichung als unabhängige Veränderliche

$$\bar{\xi} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = l,$$

als abhängige Veränderliche

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\varphi_1}$$

auftritt, so wird aus (2)

$$\bar{\eta} = C_1\bar{\xi} + \bar{C}. \tag{3}$$

Aus (1) folgt

$$[l, s] = -2\frac{(l'^{-1/2})''}{l'^{-1/2}} = \frac{l'''}{l'} - \frac{3}{2}\frac{l''}{l'^2} = 2\mathfrak{K}, \tag{4}$$

d. h. der Schwarzsche Differentialausdruck mit einer linearisierenden Veränderlichen als abhängigen und dem natürlichen Maß als unabhängigen Veränderlichen ist gleich dem doppelten Krümmungsmaß.

Zur Bestimmung der linearisierenden Veränderlichen l ist noch die Festlegung von drei Integrationskonstanten nötig. Man kann sich von der linearisierenden Veränderlichen folgende geometrische Vorstellung bilden[2]). Man denke sich Möbiussche Netzkonstruktionen durchgeführt, wobei man statt der Geraden Extremalen verwendet, die alle mit der Ausgangsextremalen Winkel einschließen, die unterhalb einer festen Grenze ε bleiben. Vermöge dieser Netzkonstruktion denke man sich auf der Aus-

[2]) Die Anregung zu dieser Überlegung erhielt ich durch W. Winternitz. Vergleiche dessen Note: Über die affine Grundlage der Metrik eines Variationsproblems. Berl. Akad. 1930.

gangsextremalen eine Skala für eine Veränderliche $l(\varepsilon)$ konstruiert und gehe dann über zu

$$\lim_{\varepsilon \to 0} l(\varepsilon) = l.$$

Um zu einer anschaulichen Vorstellung von dem Krümmungsmaß zu gelangen, möchte ich darauf hinweisen, daß man den Schwarzschen Differentialausdruck in der folgenden Weise leicht als Grenzwert eines Ausdruckes erhalten kann, in dem das Doppelverhältnis von vier benachbarten Werten der unabhängigen und der abhängigen Veränderlichen vorkommt.

$$[l, s] = 6 \lim_{s_1 = s_2 = s_3 = s_4} \frac{\dfrac{(l_1, l_2, l_3, l_4)}{(s_1, s_2, s_3, s_4)} - 1}{(s_1 - s_2)(s_3 - s_4)}.$$

Der Beweis ergibt sich leicht, indem man Potenzreihenentwicklung für $l(s)$ zur Ermittlung des Doppelverhältnisses anwendet.

Außer dieser Deutung möchte ich noch eine zweite geometrische Deutung des Krümmungsmaßes besprechen. Hierzu führe ich noch den Begriff des linearisierenden Maßes l_{ik} für den Extremalenbogen $P_i P_k$ ein, wobei diesen Punkten die Werte s_i und s_k entsprechen mögen. Zu diesem Zweck greifen wir aus der dreifachen Mannigfaltigkeit der linearisierenden Veränderlichen jene heraus, die sich möglichst gut an der Stelle $s = s_i$ an die natürliche Veränderliche anschließt, d. h. es möge $l(s)$ den Bedingungen genügen

$$l(s_i) = l''(s_i) = 0, \qquad l'(s_i) = 1.$$

Den Wert dieser speziellen linearisierenden Veränderlichen an der Stelle $s = s_k$ bezeichnen wir als das lineare Maß l_{ik}. Aus (4) folgt dann die Gleichung

$$\mathfrak{K} = \lim_{\substack{l_{01} = 0 \\ l_{12} = 0}} \frac{l_{02} - l_{01} - l_{12}}{l_{02}\, l_{01}\, l_{12}}\, s^{3}).$$

§ 2.

Über eine kennzeichnende Eigenschaft der Räume mit geradlinigen Extremalen und konstanter Krümmung[4]).

In diesen Räumen gilt folgender Satz: Zwei geradlinige Punktreihen, die so aufeinander bezogen sind, daß einander entsprechende Punktepaare

---

[3]) Andere geometrische Deutungen finden sich in der Dissertation von P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Göttingen 1918; bei L. Berwald, Una forma normale invariente della seconda variazione. Atti Accad. naz. Lincei, Rend (VI) 7, 1928; ferner bei A. Duschek und W. Mayer, Zur geometrischen Variationsrechnung, Monatsh. Math. Phys. 40 (1933).

[4]) Vgl. L. Berwald, Über eine charakteristische Eigenschaft der allgemeinen Räume konstanter Krümmung mit geradlinigen Extremalen. Monatsh. Math. Phys. 38 (1929).

dasselbe natürliche Maß haben, sind zueinander projektiv, oder anders ausgedrückt: Sind vier Punkte A, B, C, D auf einer Geraden g und vier Punkte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ auf einer Geraden $\bar{g}$ so einander zugeordnet, daß die natürlichen Längen von

$$A B = \bar{A}\bar{B}, \quad B C = \bar{B}\bar{C}, \quad C D = \bar{C}\bar{D}$$

sind, dann besteht für die Doppelverhältnisse auch die Gleichung

$$A B C D = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar folgendermaßen: Wenn alle Extremalen Gerade sind, d. h. also bereits im Ausgangskoordinatensystem in der Form $y = a x + b$ darstellbar sind, so sind auch die Lösungen der Jacobischen Gleichung eine lineare Funktion von x, also ist x und somit auch die euklidische Länge auf unseren Geraden ein linearisierendes Maß. Sei l die euklidische Länge auf g und $\bar{l}$ die euklidische Länge auf $\bar{g}$, dann folgt aus der Tatsache, daß sie beide derselben Differentialgleichung (4) genügen, wobei die rechte Seite eine Konstante ist, daß $\bar{l}$ eine projektive Funktion von l ist. Betrachten wir nun zwei beliebige Halbgerade g und $\bar{g}$ durch einen Punkt M und ordnen wir jedem Punkt P von g einen Punkt $\bar{P}$ von $\bar{g}$ so zu, daß für die natürliche Maßbestimmung $M P = M \bar{P}$ ist, dann sind die Punktreihen P und $\bar{P}$ aufeinander perspektiv bezogen. Die Geraden $P \bar{P}$ gehen somit durch einen Punkt. Lassen wir nun die Geraden g und $\bar{g}$ zusammenrücken, so gehen die Geraden $P \bar{P}$ in Gerade über, deren Linienelement in P zum Linienelement von g transversal ist. Daraus folgt der Satz von Berwald für $n = 2$.

Die Verallgemeinerung auf beliebiges n ergibt sich leicht, wenn man beachtet, daß die zu einem vorgegebenen Linienelement transversalen Elemente eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. Die Umkehrung ergibt sich auch leicht im Anschluß an folgende Überlegung: Man denke sich gewöhnliche euklidische Polarkoordinaten r und φ für den Punkt M als Mittelpunkt eingeführt. Nun sollen alle Linienelemente, die transversal zu einem Radialstrahl sind, Geraden entsprechen, die durch einen Punkt gehen. Hieraus folgt für die Kreise, d. h. für die Orte konstanter natürlicher Entfernung von M eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d r}{r d \varphi} = A(\varphi) \cdot r + B(\varphi),$$

d. h. also eine Riccatische Differentialgleichung. Hieraus ergibt sich aber, daß je vier konzentrische Kreise auf den Radien vier Punkte mit demselben Doppelverhältnis ausschneiden.

§ 3.

Über Räume mit positiver konstanter Krümmung und geradlinigen Extremalen.

Der Einfachheit halber wollen wir nur den Fall betrachten, das Krümmungsmaß sei gleich eins, dann folgt unmittelbar aus (4)

$$\frac{l-l_0}{R} = \operatorname{tg}(s-s_0), \qquad s-s_0 = \operatorname{arctg}\frac{l-l_0}{R},$$

wobei s_0, l_0, R Integrationskonstante sind. Sei α der Winkel, den die betreffende Gerade mit der x-Achse einschließt, und setzen wir $R\cos\alpha = u$, $R\sin\alpha = v$, so können wir auch schreiben

$$s - s_0 = \operatorname{arctg}\frac{x-x_0}{u} = \operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{v}.$$

Durch Differentiation nach x ergibt sich aus der ersten Formel, daß wir für das Variationsproblem in der Form

$$\int f(x, y, y')\,dx \to \text{Extr.}$$

für die Funktion $f(x, y, y')$ zu setzen haben:

$$f(x, y, y') = \frac{u}{(x-x_0)^2+u^2}. \tag{5}$$

Um mit dieser Darstellungsform das Problem zu behandeln und insbesondere jeder orientierten Geraden ihrem Orientierungssinn entsprechend eine Maßbestimmung zuzuordnen, muß man mehrere Koordinatensysteme in Betracht ziehen und hat zu fordern, daß in jedem von ihnen die folgende Gleichung erfüllt sei; doch bedingt dies keine Schwierigkeit, da die Resultate naturgemäß eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung haben.

Da die Extremalen Gerade sein sollen, so muß $f(x, y, y')$ der Differentialgleichung

$$f_{y'y}y' + f_{y'x} - f_y = 0$$

genügen. Führen wir hier neue Veränderliche ein

$$\begin{aligned} y' &= a, \\ y - y'x &= b, \\ x &= x, \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$f_{ax} - f_{bx}x - 2f_b = 0. \tag{6}$$

Bemerken wir nun, daß wir die rechte Seite von (5) als Imaginärteil einer analytischen Funktion auffassen können:

$$\frac{u}{(x-x_0)^2+u^2} = \Im : \frac{1}{x-z}; \qquad z = x_0 + iu,$$

so ergibt sich für die linke Seite von (6)

$$\Im : \frac{2(z_b z - z_a)}{(x-z)^3}.$$

Somit ergibt sich die komplexe Gleichung bzw. das Gleichungspaar

$$z \cdot z_b = z_a; \tag{7}$$

somit stellt $\frac{1}{2} z^2 da + z db$ ein vollständiges Differential dar oder genauer ein Paar vollständiger Differentiale. Durch Subtraktion des vollständigen Differentials $d(\frac{1}{2} a z^2 + b z)$ folgt, daß $(az + b) dz$ auch ein Paar vollständiger Differentiale darstellt. Nun ist $a x_0 + b = y_0$. Setzen wir $y_0 + iv = az + b = w$, so folgt aus der Umkehrung des Cauchyschen Satzes, daß w eine analytische Funktion von z sein muß:

$$y_0 + iv = f(x_0 + iu).$$

Es bestehen somit die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u_{x_0} & v_{x_0} \\ u_{y_0} & v_{y_0} \end{vmatrix} = 1, \tag{8}$$

d. h. das Vektorfeld $u = u(x_0, y_0)$, $v = v(x_0, y_0)$ ist quellenfrei und die diesen Gleichungen entsprechende Abbildung ist flächentreu. Für unsere Geometrie hat dieses Vektorfeld folgende Bedeutung. Denken wir uns den Punkt P_0 mit seinen Koordinaten x_0, y_0 auf jeder Geraden als Nullpunkt der Skala für die natürliche Maßbestimmung und sei P_1 derjenige Punkt, für den das natürliche Maß von $P_0 P_1 = \frac{\pi}{4}$ ist, dann ist $P_0 P_1$ der Vektor mit den Komponenten u und v. Denkt man sich das Vektorfeld gezeichnet, so ergibt sich die Maßbestimmung auf jeder Geraden durch die in der Figur dargestellte Konstruktion. Wir erhalten für die natürliche Maßbestimmung einer Strecke AB den Winkel ASB. Eine notwendige Bedingung dafür, daß jeder Geraden der ganzen Ebene eine Maßbestimmung zugeordnet wird, ist die, daß das analytische Gebilde $w = f(z)$ keinen reellen Punkt enthält, da dann für $u = v = R = 0$ P_0 und P_1 zusammenfallen würden.

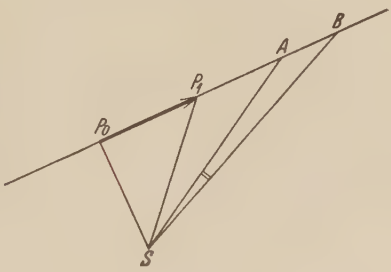


Fig. 1.

Das starke Monodromieaxiom, d. h. die Forderung $AB = BA$ würde bedingen, daß zu jedem Wertepaar $(x_0 + iu)$, $(y_0 + iv)$ des analytischen Gebildes auch ein Wertepaar $(x_0 - iu)$, $(y_0 - iv)$ gehört. Dies gilt auch insbesondere für $u = 0$. Wenn man ferner entsprechend der soeben ge-

machten Bemerkung den Fall, daß dann auch $v = 0$, ausschließt, so folgt, daß zu jedem reellen z zwei konjugierte Werte $w = y_0 + iv$ und $\overline{w} = y_0 - iv$ gehören. Dann ist aber $w + \overline{w}$ und $w \cdot \overline{w}$ reell, somit genügt w einer quadratischen Gleichung

$$w^2 + \varphi(z)\, w + \psi(z) = 0,$$

wobei $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ für reelle Werte z reell sind und der Ungleichung

$$4\psi > \varphi^2$$

genügen. Das einfachste Beispiel ist

$$w^2 + z^2 + a^2 = 0 \quad (a \text{ reell}).$$

Es entspräche dem Fall, wo die Maßbestimmung auf einer Kugel

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aZ = 0$$

durch Projektion vom Mittelpunkt aus auf die XY-Ebene übertragen wird.

Um die Beziehungen der in den Gleichungen (6) und (7) durchgeführten Betrachtung mit den in meiner bereits erwähnten früheren Arbeit besprochenen Fällen herzustellen, sei auf folgendes hingewiesen. Ersetzt man die komplexe Veränderliche z durch eine reelle Veränderliche ξ und bezeichnet man $a\xi + b$ mit η, so kann man

$$\xi_a - \xi_b\, \xi = 0$$

auch schreiben in der Form

$$\begin{vmatrix} \xi_a & \xi_b \\ \eta_a & \eta_b \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus schließt man $\eta = \chi(\xi)$, d. h. die Punkte ξ, η liegen auf einer Kurve (in meiner früheren Arbeit als Mantelkurve bezeichnet). Dieser Fall führt auf die von mir früher als „Geometrie der spezifischen Maßbestimmung" genannte Geometrie [5]).

Zur Herleitung jener in meiner früheren Arbeit besprochenen Verallgemeinerung der Hilbertschen Geometrie, bei der das starke Monodromieaxiom durch das schwache Monodromieaxiom ersetzt wird, hätte man auch ein analoges Vektorfeld, wie wir es oben eingeführt haben, benutzen können. Die Vektoren wären dann jene Strecken, die von dem Halbierungspunkt der Strecke zwischen den beiden Mantelpunkten zu einem der beiden Mantelpunkte führen. An Stelle von (8) hätten wir

$$u_{x_0} + v_{y_0} = 0 \quad \begin{vmatrix} u_{x_0} & u_{y_0} \\ v_{x_0} & v_{y_0} \end{vmatrix} = -1.$$

[5]) Auch im Falle $n > 2$ läßt sich die hiermit angedeutete Schlußweise verwenden.

Im Falle des starken Monodromieaxioms, also im Falle der Hilbertschen Geometrie, sind die den Stromlinien entsprechenden Kurven eingehüllt von Sehnen solcher Segmente, die von dem von der Hilbertschen Mantelkurve eingeschlossenen Bereich Stücke gleichen Flächeninhaltes abschneiden.

Bisher haben wir uns nur mit den Folgerungen beschäftigt, die von dem Verschwinden der ersten Variation herrühren. Fordert man darüber hinausgehend, daß die Geraden die kürzesten Verbindungen zweier Punkte sein sollen, so muß für jedes Koordinatensystem für alle in Betracht kommenden Linienelemente (x, y, y')

$$f_{y'y'} > 0$$

sein. Wie eine leichte Rechnung zeigt, führt diese Forderung auf

$$u_{bb} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{I} : \frac{w''}{(w-a)^3} < 0.$$

(Eingegangen am 12. Dezember 1934.)

Über das Reziprozitätsgesetz in relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper[1]).

Von

Hermann Ludwig Schmid in Augsburg-Göggingen.

Einleitung.

Hasse hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit (H 4) das Artinsche Reziprozitätsgesetz auf relativ-zyklische algebraische Funktionenkörper Z über K mit endlichem Konstantenkörper k der Charakteristik p übertragen. Diese Funktionenkörper teilt man ihrer grundsätzlichen Verschiedenheit wegen in zwei Klassen ein:

1. Der Relativgrad $n = [Z:K]$ ist zu p teilerfremd.
2. n ist eine Potenz von p.

Auf diese beiden Typen läßt sich der allgemeine Fall in geläufiger Weise zurückführen. Genau wie in der Zahlentheorie kann man jetzt in diesen Körpern nach den expliziten Formeln zum Reziprozitätsgesetz fragen. Im engsten Zusammenhang damit steht das Problem der expliziten Darstellung des Normenrestsymbols.

Beim Hasseschen Beweis des Artinschen Reziprozitätsgesetzes im Falle $n = p$ treten logarithmische Differentialquotienten auf. Diese erscheinen nun in der Zahlentheorie als „Kummersche logarithmische Differentialquotienten" beim Studium der expliziten Formel für das Normenrestsymbol für höher verzweigte Primideale (H 1, II, § 21). Dadurch wird der enge Zusammenhang dieser Probleme evident.

Es darf wohl als Absicht des Arithmetikers bezeichnet werden, vorwiegend solche analogen Probleme in der algebraischen Funktionentheorie in Angriff zu nehmen, die bisher in der Zahlentheorie nur sehr schwer oder noch gar nicht zugänglich waren. Es ist dann vielleicht zu hoffen, daß sie hier leichter behandelt werden können (vor allem wegen der einfacheren Einheitentheorie) und daß sich methodische Hinweise auf die Zahlentheorie ergeben. Von diesem Standpunkt aus erscheint es wünschenswert, die expliziten Formeln zum Reziprozitätsgesetz in den oben bezeichneten Körpern, vor allem im Falle $n = p$, zu studieren, um

[1]) Diese Arbeit ist von der Philosophischen Fakultät der Universität Marburg als Inaugural-Dissertation angenommen worden.

dadurch vielleicht die Theorie der expliziten Reziprozitätsformeln in der algebraischen Zahlentheorie zu fördern. Dort fehlen ja noch die scharfen Formeln zum Reziprozitätsgesetz im Falle eines Primzahlpotenzexponenten. In diesem Sinne möge vorliegende Arbeit aufgefaßt werden.

§ 1.

Zusammenstellung bekannter Resultate.

Der Vollständigkeit und der leichteren Orientierung wegen seien hier kurz diejenigen Tatsachen aus den Arbeiten H 4, H 5, H 6 von Hasse ohne Beweis wiedergegeben, die in dieser Arbeit Verwendung finden.

Wir gehen zunächst von einem beliebigen vollkommenen Körper k aus und erhalten durch Adjunktion eines transzendenten Elementes x den rationalen Funktionenkörper $K_0 = k(x)$. Der algebraische Funktionenkörper K entsteht aus K_0 durch eine separable endlich-algebraische Erweiterung. Wir sagen, k sei der genaue Konstantenkörper von K, wenn k in K algebraisch abgeschlossen ist. D. h. K enthält außer den Elementen von k keine über k algebraischen Elemente. k sei im folgenden der genaue Konstantenkörper von K (H 5).

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor von K vom Grade m. Wir erweitern K bezüglich der Stelle $\mathfrak{p}$ zum perfekten Körper $K_\mathfrak{p}$. P sei ein Primelement zu $\mathfrak{p}$ aus $K_\mathfrak{p}$. Dann besteht $K_\mathfrak{p}$ aus der Gesamtheit aller $\mathfrak{p}$-adisch konvergenten Reihen $\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_\nu P^\nu$, wobei die c_ν einem vollen Restsystem mod $\mathfrak{p}$ in $K_\mathfrak{p}$ entnommen sind. Dieses Restsystem kann eindeutig so normiert werden, daß es einen k enthaltenden Teilkörper $k_\mathfrak{p}$ von $K_\mathfrak{p}$ vom Grade m über k bildet, der einfach als die in $K_\mathfrak{p}$ algebraisch abgeschlossene Hülle von k charakterisiert ist und der genaue Konstantenkörper von $K_\mathfrak{p}$ genannt werden mag.

Ist k insbesondere ein endlicher Körper, so besteht $k_\mathfrak{p}$ aus den Elementen $0, w^i$ $(i = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N}\mathfrak{p} - 2)$, wo w eine in $K_\mathfrak{p}$ sicher existierende primitive $(\mathfrak{N}\mathfrak{p} - 1)$-te Einheitswurzel ist.

Alle Elemente aus $K_\mathfrak{p}$ sollen im folgenden stets in der normierten Form

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_\nu P^\nu, \quad c_\nu \text{ in } k_\mathfrak{p} \text{ (für endliches } k \text{ also 0 oder } w\text{-Potenz)}, \tag{1}$$

dargestellt werden (H 6).

Seien x, y Elemente aus $K_\mathfrak{p}$. Das Residium des Differentials $y\,dx$ an der Stelle $\mathfrak{p}$ definieren wir so:

$$\varrho_\mathfrak{p}(y\,dx) = S_\mathfrak{p}(c_{-1}). \tag{2}$$

Dabei ist c_{-1} der Koeffizient von $\frac{1}{P}$ in der Entwicklung von $y\frac{dx}{dP}$ in der Form (1), wo $\frac{dx}{dP}$ durch formale Differentiation aus der Entwicklung von x in der Form (1) gebildet ist, und $S_\mathfrak{p}$ bezeichnet die Spur von $k_\mathfrak{p}$ nach k. Es gilt der Residuensatz:

$$\sum_{\mathfrak{p}} \varrho_\mathfrak{p}(y\,dx) = 0, \tag{3}$$

wobei die Summe über alle Primdivisoren von K zu erstrecken ist. Der Beweis dieses Satzes beruht im wesentlichen auf der Beziehung:

$$\varrho_{\mathfrak{p}_0}(S(y)\,dx) = \sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{p}_0} \varrho_\mathfrak{p}(y\,dx). \tag{4}$$

Dabei sei $\mathfrak{p}_0$ der durch $\mathfrak{p}$ in K_0 induzierte Primdivisor und S die Spur von K nach K_0. Die Summe rechts durchläuft alle Primteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}_0$ in K. Formel (4) gilt auch für Relativkörper L über K, in der Form

$$\varrho_\mathfrak{p}(S(y)\,dx) = \sum_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}} \varrho_\mathfrak{P}(y\,dx), \tag{4a}$$

wo jetzt y in L, x in K ist und S die Spur von L nach K bedeutet. Dem Beweis von (4a) liegt folgende schärfere Tatsache zugrunde:

$$\varrho_\mathfrak{p}(S_{\mathfrak{P}\mathfrak{p}}(y)\,dx) = \varrho_\mathfrak{P}(y\,dx), \tag{4b}$$

wobei jetzt y in $L_\mathfrak{P}$, x in $K_\mathfrak{p}$ ist und $S_{\mathfrak{P}\mathfrak{p}}$ die Spur von $L_\mathfrak{P}$ nach $K_\mathfrak{p}$ bedeutet.

Nun kommen wir zur Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper Z über K. Sei jetzt k endlich von der Charakteristik p und enthalte $q = p^f$ Elemente. Im Falle $n \not\equiv 0 \bmod p$ enthalte k auch die n-ten Einheitswurzeln. Für q bedeutet dies $q \equiv 1 \bmod n$. Wie in H 4 schreiben wir die Tatsachen für die Fälle $n \not\equiv 0 \bmod p$ und $n = p$ parallel auf der linken und rechten Hälfte der Druckseite auf:

Der separable zyklische Erweiterungskörper Z vom Grade n über K ist in der Form $Z = K(y)$ erzeugbar mit

$y^n = A \neq 0$	$y^p - y = A,$

wo A ein Element aus K ist. Die galoissche Gruppe von Z über K wird dargestellt durch die Substitutionen:

$y \to y\,\zeta^\nu$ ($\nu \bmod n$) (ζ^ν durchläuft die n-ten Einheitswurzeln in k)	$y \to y + \nu$ ($\nu \bmod p$).

Für die Stelle $\mathfrak{p}$ kann man A durch zulässige Substitutionen

$A \to A A_0^n$	$A \to A + (A_0^p - A_0)$

mit A_0 aus K auf die Form bringen:

(5) $A \simeq \mathfrak{p}^\lambda \mathfrak{a}_0$ $(0 \leqq \lambda < n)$ ($\mathfrak{a}_0$ prim zu $\mathfrak{p}$) | $A \simeq \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{p}^\lambda}$ $(\lambda \geqq 0;\ (\lambda, p) = 1,$ falls $\lambda > 0;$ $\mathfrak{g}_0$ ganz für $\mathfrak{p})$.

Für $\lambda > 0$ ist $\mathfrak{p}$ verzweigt. Für $\lambda = 0$ ist $\mathfrak{p}$ unverzweigt. Im letzteren Falle ist der Artin-Automorphismus $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}$ als

n-te Einheitswurzel in k | Element des Primkörpers von k

mit der folgenden Kongruenzeigenschaft definiert:

(6) $y^{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} \equiv y \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} \bmod \mathfrak{p}$ | $y^{\mathfrak{N}\mathfrak{p}} \equiv y + \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} \bmod \mathfrak{p}$.

Für ihn gilt:

(7) $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = N_\mathfrak{p} A^{\frac{q-1}{n}}$ ($N_\mathfrak{p}$ Norm von $k_\mathfrak{p}$ nach k der Restklasse von A mod $\mathfrak{p}$) | $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = \mathfrak{S}(S_\mathfrak{p}(A))$ ($S_\mathfrak{p}$ Spur von $k_\mathfrak{p}$ nach k der Restklasse von A mod $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}$ absolute Spur in k).

$\mathfrak{p}$ zerfällt dann und nur dann voll in Z, wenn

(8) $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = 1$ | $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = 0$

ist (H 4).

Der Fall $n = p^k$ mit $k \geqq 2$ ist noch nicht untersucht.

Um die Einheitlichkeit der Darstellung nicht zu stören, wollen wir im folgenden zunächst ausschließlich den Fall $n = p$ betrachten. Erst im letzten Paragraphen wollen wir wieder auf den Fall $n \not\equiv 0 \bmod p$ zurückkommen.

§ 2.

Die Algebra $H = (B, A, S)$.

Zur hyperkomplexen Definition des Normenrestsymbols im obigen Falle $n = p$ ist das genauere Studium der zyklischen Algebren über einem Körper der Charakteristik $p \neq 0$ erforderlich.

K sei ein beliebiger Körper der Charakteristik p. Wir betrachten die Algebra $H = K(u, v)$ mit

$$u^p - u = A, \quad v^p = B, \quad v^{-1} u v = u + 1.$$

A, B seien dabei Elemente aus K. H wollen wir kurz mit (B, A) bezeichnen oder ausführlicher mit (B, A, S), wo S der Automorphismus $u \to u + 1$ von $K(u)$ ist.

Zunächst gelten für H folgende Regeln:

(9) $$(B_1 B_2, A) \sim (B_1, A) \times (B_2, A),$$

(10) $$(B, A_1 + A_2) \sim (B, A_1) \times (B, A_2).$$

Regel (9) ist schon aus der allgemeinen Theorie der verschränkten Produkte bekannt. Sie soll aber hier wegen der Einfachheit der Methode für diesen Fall noch einmal bewiesen werden. nämlich gemeinsam mit Regel (10):

Wir betrachten die Algebren $H_i = (B_i, A_i) = K(u_i, v_i)$ mit

$$u_i^p - u_i = A_i, \quad v_i^p = B_i, \quad v_i^{-1} u_i v_i = u_i + 1 \quad (i = 1, 2).$$

Dann ist $H_1 \times H_2 = K(u_1, v_1; u_2, v_2)$. Dabei sind u_2, v_2 mit u_1, v_1 vertauschbar. Wir führen folgende Transformation durch:

$$\bar{u}_1 = u_1, \quad \bar{v}_1 = v_1 v_2 \qquad \bar{u}_1 = u_1 + u_2, \quad \bar{v}_1 = v_1$$
$$\bar{u}_2 = u_1 - u_2, \quad \bar{v}_2 = v_2 \qquad \bar{u}_2 = u_2, \quad \bar{v}_2 = v_1 v_2^{-1}.$$

Diese Transformationsgleichungen sind umgekehrt nach den ursprünglichen Operatoren auflösbar. Also ist $K(u_1, v_1; u_2, v_2) = K(\bar{u}_1, \bar{v}_1; \bar{u}_2, \bar{v}_2)$. Die neuen Operatoren genügen folgenden Beziehungen:

1. $\bar{u}_1^p - \bar{u}_1 = A_1, \quad \bar{v}_1^p = B_1 B_2 \quad | \quad \bar{u}_1^p - \bar{u}_1 = A_1 + A_2, \quad \bar{v}_1^p = B_1$
$$\bar{v}_1^{-1} \bar{u}_1 \bar{v}_1 = \bar{u}_1 + 1,$$

2. $\bar{u}_1^p - \bar{u}_2 = A_1 - A_2, \quad \bar{v}_2^p = B_2 \quad | \quad \bar{u}_2^p - \bar{u}_2 = A_2, \quad \bar{v}_2^p = \frac{B_1}{B_2}$
$$\bar{v}_2^{-1} \bar{u}_2 \bar{v}_2 = \bar{u}_2 - 1,$$

3. $\bar{u}_2 \bar{v}_1 = \bar{v}_1 \bar{u}_2 \quad | \quad \bar{u}_1 \bar{v}_2 = \bar{v}_2 \bar{u}_1.$

Nach 3. sind $\bar{u}_1, \bar{v}_1$ mit $\bar{u}_2, \bar{v}_2$ vertauschbar. Deshalb ist

$H_1 \times H_2 = (B_1 B_2, A_1) \times (B_2, A_1 - A_2)$. Für $A = A_1 = A_2$ ergibt sich die Regel (9).

$H_1 \times H_2 = (B_1, A_1 + A_2) \times \left(\frac{B_1}{B_2}, A_2\right)$. Für $B = B_1 = B_2$ ergibt sich die Regel (10).

Weiter gilt für zyklische Algebren die Regel:

(11) $$(B, A) = (B N z, A) \quad \text{mit } z \text{ aus } K(u).$$

Insbesondere gilt also:

(11a) $$(B, A) = (A B, A) = \left(\frac{B}{A}, A\right),$$

weil $A = u^p - u = u(u+1) \ldots (u + (p-1)) = N u$.

Jetzt kommen wir zu einer wichtigen Regel. Es ist

(12) $$(B, A) = (B, A + C^p B)$$

mit beliebigem C aus K. Dafür geben wir zwei Beweise.

1. Beweis: Wir wenden die Regel (10) auf $(B, A + C^p B)$ an. Das ergibt:

$$\begin{aligned}(B, A + C^p B) &\sim (B, A) \times (B, C^p B),\\ &\sim (B, A) \times (C^{-p}, C^p B) \quad \text{nach (11a)},\\ &\sim (B, A) \times (C^{-1}, C^p B)^p \quad \text{nach (9)},\\ &\sim (B, A) \times (C^{-1}, 0) \quad \text{nach (10)},\\ &\sim (B, A).\end{aligned}$$

2. Beweis: Wir führen folgende Transformation der Operatoren u, v aus: $\bar{u} = u + C v$, $\bar{v} = v$. Dann gilt $\bar{v}^{-1} \bar{u} \bar{v} = \bar{u} + 1$. $K(\bar{u})$ ist ein Teilkörper des maximalen Grades p von A, der durch $\bar{v}$ in sich transformiert wird, also einen Automorphismus erfährt. Da dieser Automorphismus sich als $\bar{u} \to \bar{u} + 1$ darstellt, ist $K(u)$ zyklisch und durch eine Gleichung $\bar{u}^p - \bar{u} = \bar{A}$ mit $\bar{A}$ in K erzeugbar. Dieses $\bar{A}$ berechnet sich als die reduzierte Norm von $\bar{u}$, d. h. als die Determinante der $\bar{u}$ zugeordneten Matrix $M_{\bar{u}}$ bei der absolut irreduziblen Darstellung p-ten Grades von A. Diese ist gegeben durch:

$$M_u = \begin{pmatrix} u & & & \\ & u-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u-(p-1) \end{pmatrix}, \quad M_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ B & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist

$$M_{\bar{u}} = \begin{pmatrix} u & C & & & \\ \vdots & u-1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & & C \\ C B & \cdots & \cdots & \cdots & u-(p-1) \end{pmatrix}.$$

Durch Entwicklung nach der ersten Spalte folgt:

$$\begin{aligned}\bar{A} = |M_{\bar{u}}| &= u(u-1)\dots(u-(p-1)) + C^p B\\ &= u^p - u + C^p B = A + C^p B.\end{aligned}$$

Also hat H auch die Erzeugung $H = K(\bar{u}, \bar{v})$ mit

$$\bar{u}^p - \bar{u} = A + C^p B, \quad \bar{v}^p = B, \quad \bar{v}^{-1} \bar{u} \bar{v} = \bar{u} + 1,$$

w. z. b. w.

Durch Kombination von (11a) und (12) ergibt sich

$$(B, A) = (A B, A) = (A B, A + C^p A B),$$

also:

$$(B, A) = (A B, A(1 + C^p B)). \tag{13}$$

Die Transformation (11a) wird erzeugt durch $\bar{v} = uv$, die Transformation (13) also durch

$$\bar{u} = u + Cuv, \quad \bar{v} = uv.$$

H hat also auch die Erzeugung $H = K(\bar{u}, \bar{v})$ mit

$$\bar{u}^p - \bar{u} = A(1 + C^p B), \quad \bar{v}^p = AB, \quad \bar{v}^{-1}\bar{u}\bar{v} = \bar{u} + 1.$$

§ 3.

Das Normenrestsymbol $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}$.

Die Theorie der lokalen Divisionsalgebren (H 2) ist, wie Hasse bemerkte (H 4), ohne weiteres auf die p-adischen Erweiterungen eines algebraischen Funktionenkörpers K über endlichem Konstantenkörper k übertragbar. Wir können deshalb das Normenrestsymbol mit Hilfe der Invariante der zugehörigen lokalen Divisionsalgebra einführen (H 3). Wir betrachten dazu die Algebra $H_\mathfrak{p} = (B, A, S)_\mathfrak{p} = (B, Z^p, S_\mathfrak{p})$ über $K_\mathfrak{p}$. Z wird bei Erweiterung seines Grundkörpers K auf $K_\mathfrak{p}$ ein Körper Z^p, oder eine direkte Summe von zu $K_\mathfrak{p}$ isomorphen Körpern; im letzteren Falle verstehen wir unter Z^p einen dieser untereinander isomorphen Körper. Sei $\sigma_\mathfrak{p}(H) \equiv \frac{\nu_\mathfrak{p}}{p} \bmod 1$ die Darstellung der p-Invariante von H als Bruch vom Nenner p. Dann definieren wir:

$$\left(\frac{B, Z}{\mathfrak{p}}\right) = S_\mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}}. \tag{14}$$

Diese Definition ist durch das Vorzeichen im Exponenten gegenüber der Hasseschen Definition in H 3 in zweckmäßiger Weise modifiziert. Ist insbesondere Z^p unverzweigt über $K_\mathfrak{p}$, so drückt sich das Normenrestsymbol durch den Artin-Automorphismus so aus:

$$\left(\frac{B, Z}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{Z}{\mathfrak{p}}\right)^{\nu_\mathfrak{p}(B)}. \tag{14a}$$

Dabei bedeutet $\nu_\mathfrak{p}(B)$ die Ordnungszahl von $\mathfrak{p}$ in B. An Stelle des Gruppenelementes $\left(\frac{B, Z}{\mathfrak{p}}\right)$ führen wir das spezielle Normenrestsymbol $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}$ ein, das durch

$$y^{\left(\frac{B, Z}{\mathfrak{p}}\right)} = y + \left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} \tag{15}$$

festgelegt ist. Es ist zweckmäßig, das Normenrestsymbol $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}$ durch ein ihm isomorphes multiplikatives Symbol zu ersetzen, wie das Hasse

beim Artin-Symbol durch $\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}\right)$ getan hat. Wir definieren entsprechend:

$$\left(\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}\right). \tag{16}$$

Aus (9), (10) und (14) folgen für $\left(\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right)$ sofort:

$$\left(\frac{B_1 B_2, A}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{B_1, A}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{B_2, A}{\mathfrak{p}}\right) \text{ (vorderer Zerlegungssatz),} \tag{17}$$

$$\left(\frac{B, A_1 + A_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{B, A_1}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{B, A_2}{\mathfrak{p}}\right) \text{ (hinterer Zerlegungssatz).} \tag{18}$$

Aus (12) folgt für $C = 1$:

$$\left(\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{B, A + B}{\mathfrak{p}}\right). \tag{19}$$

Nun kommen wir zur expliziten Auswertung von $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}$. Für das Zerlegungsverhalten eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ aus K in Z gibt es drei Möglichkeiten:

a) Entweder ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' \ldots \mathfrak{P}^{(p-1)}$. Dann ist $Z^{\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{P}} = K_{\mathfrak{p}}$, und es gilt stets $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} = 0$.

b) Oder $\mathfrak{p}$ bleibt Primdivisor: $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$. Dann ist $Z^{\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{P}}$ unverzweigt über $K_{\mathfrak{p}}$. Die $\mathfrak{p}$-Invariante von H und das Normenrestsymbol ergeben sich nach (14a) sehr einfach. Es ist

$$\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} = \nu_{\mathfrak{p}}(B)\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}. \tag{20}$$

Formel (20) gilt auch noch für den Fall a). Denn dafür ist nach (8) $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = 0$.

c) Die dritte Möglichkeit ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^p$. Dann ist $Z^{\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{P}}$ über $K_{\mathfrak{p}}$ verzweigt. Wir können die Invariante $\sigma_{\mathfrak{p}}(H)$ nicht mehr ohne weiteres ablesen.

Wir kommen jetzt zu einer für alle Fälle gültigen Formel für $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}$. Das Hauptziel der Arbeit ist der Beweis der Formel:

$$\boxed{\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} = \mathfrak{S}\,\varrho_{\mathfrak{p}}\left(A\frac{dB}{B}\right)} \tag{21}$$

Dabei fassen wir A, B als Elemente von $K_{\mathfrak{p}}$ auf und stellen diese in der Form (1) dar. Das Residuum $\varrho_{\mathfrak{p}}$ ist nach (2) erklärt. $\mathfrak{S}$ bedeutet die absolute Spur in k (in bezug auf seinen Primkörper).

Mit Hilfe der Formel (21) gelingt es leicht, einen Zusammenhang zwischen dem Residuensatz (3) und dem Reziprozitätsgesetz für die Normenreste in der Produktform herzustellen.

Den Beweis von (21) führen wir in mehreren Schritten.

a) Wir formulieren den Hilfssatz: Ist a ein beliebiges Element aus $k_{\mathfrak{P}}$, so ist

$$\mathfrak{S}\left(S_{\mathfrak{P}}(a^p)\right) = \mathfrak{S}\left(S_{\mathfrak{P}}(a)\right). \tag{22}$$

($k_{\mathfrak{P}}$ sei dabei der genaue Konstantenkörper von $Z_{\mathfrak{P}}$). Denn es ist, wenn m der Grad von $\mathfrak{P}$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}\left(S_{\mathfrak{P}}(a^p)\right) &= a^p + a^{p^2} + \ldots + a^{p^m} \\ &= \mathfrak{S}\left(S_{\mathfrak{P}}(a)\right) + a^{p^m} - a = \mathfrak{S}\left(S_{\mathfrak{P}}(a)\right).\end{aligned}$$

b) Wir behaupten: Ist B aus $K_{\mathfrak{p}}$ Norm eines Elementes z aus dem Körper $Z^p = Z_{\mathfrak{P}} = K_{\mathfrak{p}}(u)$ $(u^p - u = A)$ in bezug auf $K_{\mathfrak{p}}$, so ist

$$\mathfrak{S}\,\varrho_{\mathfrak{p}}\left(A\frac{dB}{B}\right) = 0.$$

Oder kurz geschrieben:

$$B = Nz \to \mathfrak{S}\,\varrho_{\mathfrak{p}}\left(A\frac{dB}{B}\right) = 0. \tag{23}$$

Beweis: Es sei $B = Nz$ mit z aus $Z_{\mathfrak{P}}$. Dann ist

$$A\frac{dB}{B} = \frac{A}{B}\frac{dB}{dP}\,dP = S\left(\frac{A}{z}\frac{dz}{dP}\right)dP,$$

wo P ein Primelement zu $\mathfrak{p}$ aus $K_{\mathfrak{p}}$ bedeutet. S und N sind von $Z_{\mathfrak{P}}$ nach $K_{\mathfrak{p}}$ verstanden. Jetzt wenden wir (4 b) an. Das ergibt:

$$\varrho_{\mathfrak{p}}\left(A\frac{dB}{B}\right) = \varrho_{\mathfrak{p}}\left(S\left(\frac{A}{z}\frac{dz}{dP}\right)dP\right) = \varrho_{\mathfrak{P}}\left(\frac{A}{z}\frac{dz}{dP}\,dP\right) = \varrho_{\mathfrak{P}}\left(A\,\frac{dz}{z}\right).$$

(23) wird also bewiesen sein, wenn

$$\mathfrak{S}\,\varrho_{\mathfrak{P}}\left(A\frac{dz}{z}\right) = 0 \tag{23 a}$$

gezeigt ist. Wir setzen $A = u^p - u$ und haben dann

$$\mathfrak{S}\,\varrho_{\mathfrak{P}}\left(u^p\frac{dz}{z}\right) = \mathfrak{S}\,\varrho_{\mathfrak{P}}\left(u\frac{dz}{z}\right) \tag{23 b}$$

zu zeigen. Im Hinblick auf die additive Eigenschaft des Residuums und die multiplikative Eigenschaft von $\frac{dz}{z}$ setzen wir u additiv und z multiplikativ in $Z_{\mathfrak{P}}$ an:

$$u = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_\nu \pi^\nu \quad (\nu_0 \gtreqless 0),$$

$$z = \pi^m w^n \prod_{i=1}^{\infty} (1 - w_i \pi^i).$$

Dabei sind c_ν und w_i entweder 0 oder w-Potenzen (w primitive $(\mathfrak{N}\mathfrak{p}-1)$-te Einheitswurzel). π ist ein beliebiges Primelement zu $\mathfrak{P}$ in $Z_\mathfrak{P}$. Die unendliche Produktdarstellung für z konvergiert natürlich $\mathfrak{P}$-adisch. Wegen der Charakteristik p ist $u^p = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_\nu^p \pi^{\nu p}$. Der Beweis von (23 b) reduziert sich jetzt auf folgende Einzelfeststellungen:

(23 c) $$\mathfrak{S}\,\varrho_\mathfrak{P}\left(c_\nu^p\,\pi^{\nu p}\frac{d\pi}{\pi}\right) = \mathfrak{S}\,\varrho_\mathfrak{P}\left(c_\nu \pi^\nu \frac{d\pi}{\pi}\right)$$

(23 d) $$i\,\mathfrak{S}\,\varrho_\mathfrak{P}\left(c_\nu^p \pi^{\nu p}\,\frac{w_i \pi^i}{1-w_i\pi^i}\frac{d\pi}{\pi}\right) = i\,\mathfrak{S}\,\varrho_\mathfrak{P}\left(c_\nu \pi^\nu \frac{w_i \pi^i}{1-w_i\pi^i}\frac{d\pi}{\pi}\right)$$

$$(\nu \geqq \nu_0;\ i = 1, 2, \ldots).$$

Beide Seiten von (23 c) sind höchstens für $\nu = 0$ von Null verschieden. Für $\nu = 0$ reduziert sich (23 c) auf $\mathfrak{S}(S_\mathfrak{P}(c_0^p)) = \mathfrak{S}(S_\mathfrak{P}(c_0))$. Dies ist aber nach (22) richtig.

(23 d) ist jedenfalls für $i \equiv 0 \bmod p$ richtig. Jetzt sei $(i, p) = 1$. Beide Seiten von (23 d) sind höchstens dann von Null verschieden, wenn $\nu + i \leqq 0$ und $i \mid \nu$. (23 d) reduziert sich dann wegen

$$\frac{w_i \pi^i}{1 + w_i \pi^i} = \sum_{k=1}^{\infty} w_i^k \pi^{ki}$$

auf

$$\mathfrak{S}\left(S_\mathfrak{P}\left(c_\nu w_i^{-\frac{\nu}{i}}\right)^p\right) = \mathfrak{S}\left(S_\mathfrak{P}\left(c_\nu w_i^{-\frac{\nu}{i}}\right)\right).$$

Dies ist wieder nach (22) richtig. Damit ist (23) bewiesen.

c) Jetzt beweisen wir den Satz: Falls $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^p$, ist die Normklassengruppe von $Z_\mathfrak{P}$ in $K_\mathfrak{p}$, die Faktorgruppe $K_\mathfrak{p}^*/NZ_\mathfrak{P}^*$ zyklisch vom Grade p. (Der Stern soll den Ausschluß des Elementes 0 andeuten.)

Bemerkung: Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}' \ldots \mathfrak{P}^{(p-1)}$ ist die Ordnung dieser Faktorgruppe natürlich gleich 1.

Die Methoden zu diesem Beweis entnehmen wir den Arbeiten H 2, H 3, W 1. Es ist $[Z:K] = p$. Es sei $W^\mathfrak{p}$ der unverzweigte zyklische Körper vom Grade p über $K_\mathfrak{p}$ (W 1). Dann sei $H_\mathfrak{p} = (B, Z_\mathfrak{P}, S_\mathfrak{p})$ eine beliebige Algebra der von $Z_\mathfrak{P}$ zerfällten Untergruppe $(H_\mathfrak{p})$ der R. Brauerschen Gruppe zu $Z_\mathfrak{P}$ (H 3). Jede solche Algebra enthält einen zu $W^\mathfrak{p}$ isomorphen Körper (W 1). Jede Einheit aus $K_\mathfrak{p}$ ist Norm einer Einheit aus $W^\mathfrak{p}$ (H 2). Das Primelement P zu $\mathfrak{p}$ ist aber wegen der Unverzweigtheit von $W^\mathfrak{p}$ nicht Norm, $NP = P^p$. Das heißt aber, $(H_\mathfrak{p})$ ist zyklisch

vom Grade p. Denn jedes Element B aus $K_\mathfrak{p}$ ist in der Form $B = E P^{\nu_\mathfrak{p}(B)}$ mit einer Einheit E darstellbar (H 2). Wegen

$$(H_\mathfrak{p}) \cong K_\mathfrak{p}^*/N Z_\mathfrak{P}^* \text{ (H 3)}$$

ist dann die Behauptung erwiesen.

d) Wir setzen zur Abkürzung $\mathfrak{S}\varrho_\mathfrak{p}\left(A\frac{dB}{B}\right) = f(B, A)$. Wir wissen nun: $f(B, A)$ ist wegen seiner Normeigenschaft b) ein Charakter der Gruppe $K_\mathfrak{p}^*/N Z_\mathfrak{P}^*$. $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}$ ist dagegen ein erzeugender Charakter derselben Gruppe. Also können wir setzen:

$$f(B, A) = c_{\mathfrak{p}, A}\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}. \tag{24}$$

Dabei ist $c_{\mathfrak{p}, A}$ ein möglicherweise noch von $\mathfrak{p}$ und A abhängiges Element des Primkörpers der Charakteristik p. Für $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}$ gilt nach (19) $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{B, A+B}{\mathfrak{p}}\right\}$. Dieselbe Transformationsregel gilt auch für $f(B, A)$. Es ist nämlich

$$f(B, A+B) = \mathfrak{S}\varrho_\mathfrak{p}\left((A+B)\frac{dB}{B}\right) = \mathfrak{S}\varrho_\mathfrak{p}\left(A\frac{dB}{B}\right) = f(B, A),$$

weil das Residuum eines vollständigen Differentials $\varrho_\mathfrak{p}(dB)$ gleich Null ist. Also ist $c_{\mathfrak{p}, A} = c_{\mathfrak{p}, A+B}$. Da aber bei beliebiger Wahl von B aus $K_\mathfrak{p}$ der Ausdruck $A + B$ alle Elemente von $K_\mathfrak{p}$ durchläuft, ist $c_{\mathfrak{p}, A}$ von A unabhängig. Nun sei a ein Element aus $k_\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{S}(S_\mathfrak{p}(a)) \neq 0$, wie es stets vorhanden ist. Dann ist $f(P, a) = \mathfrak{S}(S_\mathfrak{p}(a))$ und nach (20)

$$\left\{\frac{P, a}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{a}{\mathfrak{p}}\right\} = \mathfrak{S}(S_\mathfrak{p}(a)).$$

Also ist $c_\mathfrak{p} = 1$. Damit ist (21) vollständig bewiesen.

§ 4.

Anwendungen.

Wird die Formel (21) über alle Primdivisoren von K summiert, so ergibt sich unter Berücksichtigung des Risiduensatzes (3):

$$\sum_\mathfrak{p}\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} = 0. \tag{25}$$

Oder in Produktform geschrieben:

$$\prod_\mathfrak{p}\left(\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \qquad \text{(Produktformel).} \tag{25a}$$

In H 4 wird diese Produktformel bzw., was damit gleichbedeutend ist, die Summenformel für die Invarianten der Algebra (B, A, S) mit Hilfe eines Satzes von Tsen bewiesen. Der Residuensatz (3) und die Darstellung des Normenrestsymbols (21) gestatten es hier, ohne den Tsenschen Satz und frei von analytischen Hilfsmitteln zum Reziprozitätsgesetz in der Produktform (25a) zu gelangen.

Unter Benutzung von (25a) ist es nun leicht, genau nach den in H 3 vorgezeigten Schlüssen die folgende Kernaussage des Artinschen Reziprozitätsgesetzes zu erschließen:

Das Artin-Symbol $\left(\frac{Z}{\mathfrak{a}}\right)$ für zum Führer $\mathfrak{f}$ von Z prime Divisoren $\mathfrak{a}$ aus K vermittelt eine homomorphe Abbildung der Z mod $\mathfrak{f}$ zugeordneten Divisorenklassengruppe in die galoissche Gruppe von Z über K.

Dabei ist der Führer $\mathfrak{f}$ als Produkt der p-Führer $\mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}$ definiert. Daß $\mathfrak{f}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{\lambda+1}$, wenn in (5) $\lambda > 0$ ist, ergibt sich leicht aus unserer Transformationsregel (13) mit $C = -1$. Wir haben nämlich zu zeigen:

1. Aus $B \equiv Nv \bmod \mathfrak{p}^{\lambda+1}$ mit v aus $Z_{\mathfrak{P}}$ folgt $B = Nw$ mit w aus $Z_{\mathfrak{P}}$. Dabei ist B beliebig aus $K_{\mathfrak{p}}$.

Beweis: Aus $B \equiv Nv \bmod \mathfrak{p}^{\lambda+1}$ folgt $B = B_1 Nv$ mit $B_1 \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{\lambda+1}$ und B_1 aus $K_{\mathfrak{p}}$. Nach (13) gilt:

$$(B, A)_{\mathfrak{p}} = (B_1 Nv, A)_{\mathfrak{p}} = (B_1, A)_{\mathfrak{p}} = (A B_1, A(1 - B_1))_{\mathfrak{p}} \sim 1.$$

Denn es ist ja $A(1 - B_1) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$, also $\left\{\frac{A(1-B_1)}{\mathfrak{p}}\right\} = 0$, was nach (20) die Behauptung ergibt. Aus $(B, A)_{\mathfrak{p}} \sim 1$ folgt dann $B = Nw$ mit w aus $Z_{\mathfrak{P}}$.

2. Durch 1. ist $\mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})} \mid \mathfrak{p}^{\lambda+1}$ bewiesen. Jetzt muß die Umkehrung $\mathfrak{p}^{\lambda+1} \mid \mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})}$ gezeigt werden, d. h. die Existenz eines $B \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{\lambda}$, das nicht Norm aus $Z_{\mathfrak{P}}$ ist. Offenbar besitzt das Element $C P^{\lambda} + 1$ diese Eigenschaft, wenn C aus K so bestimmt wird, daß $\Im S_{\mathfrak{p}}(C A P^{\lambda}) \neq 0$ wird, was stets möglich ist. Denn nach (13) gilt wieder

$$(C P^{\lambda} + 1, A) = (A(C P^{\lambda} + 1), C A P^{\lambda}).$$

Nach (20) ist aber

$$\left\{\frac{A(C P^{\lambda} + 1), C A P^{\lambda}}{\mathfrak{p}}\right\} = -\lambda \Im S_{\mathfrak{p}}(C A P^{\lambda}) \neq 0,$$

da $\lambda \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$. Daraus sieht man, daß diese Algebra nicht zerfällt, d. h. daß $C P^{\lambda} + 1$ nicht Norm aus $Z_{\mathfrak{P}}$ ist.

Aus 1. und 2. zusammen ergibt sich $\mathfrak{f}^{(\mathfrak{p})} = \mathfrak{p}^{\lambda+1}$.

Zum Schluß wollen wir noch ein „Reziprozitätsgesetz der Potenzreste“ analog zu H 1 (Teil II, § 12, I) formulieren. A, B seien Elemente

aus K, durch die separable zyklische Erweiterungen p-ten Grades von K definiert werden. $\mathfrak{f}_A$, $\mathfrak{f}_B$ seien ihre Führer. Die Divisoren von A und B werden so zerlegt:

$$A \simeq \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_B \quad \text{mit} \quad \begin{cases} (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}_B) = 1, \\ \mathfrak{a}_B \text{ nur aus Primteilern von } \mathfrak{f}_B \text{ zusammengesetzt,} \end{cases}$$

$$B \simeq \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_A \quad \text{mit} \quad \begin{cases} (\mathfrak{b}, \mathfrak{f}_A) = 1, \\ \mathfrak{b}_A \text{ nur aus Primteilern von } \mathfrak{f}_A \text{ zusammengesetzt.} \end{cases}$$

Wir zeigen dann zunächst:

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{b}}\right\} - \left\{\frac{B}{\mathfrak{a}}\right\} = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}_A} \left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} - \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}_B} \left\{\frac{A, B}{\mathfrak{p}}\right\}. \tag{26}$$

Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$D_{\mathfrak{p}} = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} - \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \left\{\frac{B}{\mathfrak{p}}\right\},$$

so ist

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{b}}\right\} - \left\{\frac{B}{\mathfrak{a}}\right\} = \sum_{\mathfrak{p}} D_{\mathfrak{p}}.$$

(26) ergibt sich dann unter Berücksichtigung von (20) beitragsweise:

1. $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_A$, $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_B \to \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = 0$, $\quad \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = 0 \quad \to D_{\mathfrak{p}} = 0.$
2. $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}_A$, $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_B \to \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = 0$, $\quad \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = \nu_{\mathfrak{p}}(B) \to D_{\mathfrak{p}} = \left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}.$
3. $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_A$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}_B \to \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = \nu_{\mathfrak{p}}(A)$, $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = 0 \quad \to D_{\mathfrak{p}} = -\left\{\frac{A, B}{\mathfrak{p}}\right\}.$
4. $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}_A$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}_B \to \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = \nu_{\mathfrak{p}}(A)$, $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = \nu_{\mathfrak{p}}(B) \to D_{\mathfrak{p}} = \left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} - \left\{\frac{A, B}{\mathfrak{p}}\right\}.$

$D_{\mathfrak{p}}$ stimmt also für jedes $\mathfrak{p}$ mit dem $\mathfrak{p}$-Beitrag zur rechten Seite von (26) überein.

Nach der Summenformel (25) ergibt sich aus (26) ohne weiteres:

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{b}}\right\} - \left\{\frac{B}{\mathfrak{a}}\right\} = \sum_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_B} \left\{\frac{A, B}{\mathfrak{p}}\right\} - \sum_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_A} \left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}.$$

Oder in multiplikativen Symbolen geschrieben:

$$\left(\frac{A}{\mathfrak{b}}\right)\left(\frac{B}{\mathfrak{a}}\right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_B} \left(\frac{A, B}{\mathfrak{p}}\right) \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_A} \left(\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}. \tag{27}$$

Die Verschiedenheit der Formel (27) gegenüber dem Reziprozitätsgesetz der Potenzreste in der algebraischen Zahlentheorie liegt im Fehlen eines einfachen Vertauschungssatzes begründet. Für den Fall $(A, \mathfrak{f}_B) = (B, \mathfrak{f}_A) = 1$ gestattet (27) auch die Formulierung

$$\left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{B}{A}\right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_B} \left(\frac{A, B}{\mathfrak{p}}\right) \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}_A} \left(\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}, \tag{27a}$$

bei der der Umkehrfaktor $\left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{B}{A}\right)^{-1}$ auftritt. Wie in der algebraischen Zahlentheorie ist jedenfalls die rechte Seite in (27) und (27 a) nur von dem Verhalten von A und B an den endlich vielen Primstellen p abhängig, die in einem der Führer $\mathfrak{f}_A$, $\mathfrak{f}_B$ aufgehen.

§ 5.

Das Normenrestsymbol im Falle $n \not\equiv 0 \bmod p$.

Analog zu der Algebra H aus § 2 müssen wir hier die Algebra

$$H = (B, A) = K(u, v)$$

mit

$$u^n = A,\ v^n = B,\ v^{-1} u v = u\zeta$$

studieren. A, B sind Elemente aus K, ζ ist eine (nach Voraussetzung existierende) primitive n-te Einheitswurzel in k.

Die Regeln (9) und (11) gelten hier unverändert. In (11 a) tritt die Modifikation ein:

$$(B, A) = ((-1)^{n-1} A B, A). \tag{28}$$

An Stelle der Regel (10) tritt hier die Regel

$$(B, A_1 A_2) \sim (B, A_1) \times (B, A_2). \tag{29}$$

Das Gerüst des Beweises ist ganz dasselbe. Wir wollen nur die auszuführende Transformation angeben. Wir setzen:

$$\bar{u}_1 = u_1 u_2,\ \bar{v}_1 = v_1;\quad \bar{u}_2 = u_2,\ \bar{v}_2 = v_2 v_1^{-1}.$$

Aus (28) und (29) folgt:

$$(A, B) \times (B, A) \sim 1. \tag{30}$$

Denn es ist

$$\begin{aligned}(A, B) \times (B, A) &= ((-1)^{n-1} A B, B) \times ((-1)^{n-1} A B, A)\\ &\sim ((-1)^{n-1} A B, A B) \sim 1.\end{aligned}$$

Das Normenrestsymbol $\left(\frac{B, Z}{\mathfrak{p}}\right)$ und das spezielle Normenrestsymbol $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}$ führen wir ebenfalls analog wie in § 3 ein. Ist $Z^{\mathfrak{p}}$ unverzweigt über $K_{\mathfrak{p}}$, so können wir auch hier das Symbol $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}$ sofort explizit darstellen. Es wird dann analog zu (20) $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}^{\nu_{\mathfrak{p}}(B)}$, also nach (7):

$$\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} = [N_{\mathfrak{p}} A^{\nu_{\mathfrak{p}}(B)}]^{\frac{q-1}{n}}. \tag{31}$$

Dabei ist $N_{\mathfrak{p}}$ die Norm in $k_{\mathfrak{p}}$ nach k der Restklasse von A mod p.

Auf Grund der Algebrenregeln (9), (29) und (30) gelten hier für das Normenrestsymbol vorderer und hinterer Zerlegungssatz sowie der Vertauschungssatz.

Wir wollen auch hier eine explizite Darstellung für das Normenrestsymbol suchen, die für alle Fälle gültig ist.

Weil das Normenrestsymbol vorne und hinten sich multiplikativ verhält, zerlegen wir A und B in $K_\mathfrak{p}$ multiplikativ so:

$$A = P^a w^{a'} A_0, \quad B = P^b w^{b'} B_0.$$

Dabei ist P wieder ein Primelement zu $\mathfrak{p}$ in $K_\mathfrak{p}$ und w eine primitive $(\mathfrak{N}\mathfrak{p} - 1)$-te Einheitswurzel in k, und für A_0, B_0 gilt $A_0 \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$, $B_0 \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$. Nach (9) und (29) ist

$$(B, A) \sim (P^b, P^a) \times (P^b, w^{a'}) \times (P^b, A_0) \times (w^{b'}, P^a) \times (w^{b'}, w^{a'}) \times (w^{b'}, A_0) \times (B_0, P^a) \times (B_0, w^{a'}) \times (B_0, A_0).$$

Dabei ist $(P^b, P^a)_\mathfrak{p} \sim ((-1)^{n-1}, P)_\mathfrak{p}^{ab}$ und $(w^{a'}, w^{b'})_\mathfrak{p} \sim 1$. Außerdem ist $(P^b, A_0)_\mathfrak{p} \sim 1$, weil $A_0 \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$, also $\left\{\frac{A_0}{\mathfrak{p}}\right\} = 1$. Aus demselben Grunde zerfallen die Algebren $(w', A_0)_\mathfrak{p}$, $(P^a, B_0)_\mathfrak{p}$, $(w^{a'}, B_0)_\mathfrak{p}$, $(w^{b'}, A_0)_\mathfrak{p}$, $(B_0, A_0)_\mathfrak{p}$. Also ergibt sich unter Berücksichtigung des Vertauschungssatzes

$$(B, A)_\mathfrak{p} \sim (P, w^{a'b - b'a})_\mathfrak{p} \times (P, (-1)^{n-1})_\mathfrak{p}^{ab}.$$

Für die Normenrestsymbole bedeutet dies nach (31)

$$\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{P, w^{a'b - b'a}}{\mathfrak{p}}\right\} \left\{\frac{P, (-1)^{n-1}}{\mathfrak{p}}\right\}^{ab}. \tag{32}$$

Nun ist $w^{a'b - b'a} = \frac{(P^a w^{a'})^b}{(P^b w^{b'})^a}$. Also können wir (32) wegen $N_\mathfrak{p} A_0 = N_\mathfrak{p} B_0 \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$ auch in folgender Form schreiben:

$$\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} = \eta \cdot \left[N_\mathfrak{p} \frac{A^{v_\mathfrak{p}(B)}}{B^{v_\mathfrak{p}(A)}}\right]^{\frac{q-1}{n}} \tag{32a}$$

Dabei ist $\eta = (-1)^{r_\mathfrak{p}}$ mit $r_\mathfrak{p} = ab(n-1)\frac{q^{m_\mathfrak{p}} - 1}{q - 1}$, wobei $m_\mathfrak{p}$ der Grad von $\mathfrak{p}$ ist.

Damit ist eine explizite Darstellung des Normenrestsymbols auch für den Fall $n \not\equiv 0 \bmod p$ gegeben. Allerdings kann man von (32a) aus nicht wie bei (21) sofort auf die Produktformel und damit auf das Reziprozitätsgesetz schließen.

Literaturverzeichnis.

Artin-Schreier.

Über eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper, Abhandlungen Math. Sem. Hamburg 5 (1927).

H. Hasse.

[1] Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresber. D. M.-V., 1926—1930.

[2] Über $\wp$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Systeme. Math. Annalen **104** (1931).

[3] Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Math. Annalen **107** (1933).

[4] Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper.

[5] Über die Kongruenzzetafunktionen.

[6] Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper.

[4], [5], [6] in Journ. f. Math. **171** (1934).

Diese Arbeiten zitieren wir mit H und Nummer.

F. K. Schmidt.

Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p. Math. Zeitschr. **33** (1931).

E. Witt.

Riemann-Rochscher Satz und Zetafunktion im Hyperkomplexen. Math. Annalen **112** (1934). Im folgenden zitiert mit W 1.

(Eingegangen am 17. Dezember 1934.)

Topologische Fragen der Differentialgeometrie 61.

Über die Bestimmung von Pfaffschen Formen mit vorgegebenen Ableitungsgleichungen.

Von

Erwin David in Hamburg.

---

§ 1.

Fragestellung.

Bei einem System von drei linear unabhängigen Pfaffschen Formen ω_s im dreidimensionalen Raum

$$\omega_s = \sum_{k=1}^{3} z_{sk}\, dx_k; \qquad s = 1, 2, 3 \tag{1}$$

lassen sich die „Ableitungen" $d\omega_s$ nach den „Produkten" $\omega_i \omega_{i+1}$ entwickeln[1]).

$$d\omega_s = \sum_{i=1}^{3} c_s^i\, \omega_{i+1} \omega_{i+2}. \tag{2}$$

Die Indizes sind hier, und auch stets in den folgenden Ausführungen, mod 3 zu nehmen. Außerdem sei ein für allemal festgesetzt, daß alle Summen von 1 bis 3 laufen.

Die Koeffizienten c_s^i sind invariant gegen biholomorphe Variablentransformationen:

$$x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3).$$

Zum Beweis bilden wir einerseits mit den transformierten $\bar{\omega}_s$ die Gleichungen (2)

$$d\bar{\omega}_s = \sum_i \bar{\bar{c}}_s^i\, \bar{\omega}_{i+1} \bar{\omega}_{i+2}.$$

Die dabei sich ergebenden $\bar{\bar{c}}$ sind durch zwei Striche gekennzeichnet zur Unterscheidung von den c, die sich andererseits bei Transformation der Gleichung (2) im ganzen ergeben.

$$\overline{d\omega_s} = \overline{\sum_i c_s^i \omega_{i+1} \omega_{i+2}} \;\rightarrow\; d\bar{\omega}_s = \sum_i \bar{c}_s^i\, \bar{\omega}_{i+1} \bar{\omega}_{i+2}.$$

Da die c eindeutig festgelegt sind, muß $\bar{\bar{c}}_s^i = \bar{c}_s^i$ sein. Die c transformieren sich demnach wie Skalare

$$\bar{c}_s^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = c_s^i(x_1(\bar{x}), x_2(\bar{x}), x_3(\bar{x})). \tag{3}$$

---

[1]) Vgl. hier und im folgenden E. Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. Leipzig und Berlin 1934.

In der folgenden Arbeit wird untersucht, wann man zu einem willkürlich vorgegebenen System solcher Koeffizienten $c_s^i(x_1\, x_2\, x_3)$; $s = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3$ zugehörige Pfaffsche Formen ω_s bestimmen kann.

§ 2.

Aufstellung des zu lösenden Differentialformensystems.

Das aus (2) folgende Differentialgleichungssystem ist nach den Unbekannten z_{sk}, die in (1) definiert sind, zu integrieren. Wir schreiben die Gleichungen (2) als Differentialformen θ_s und nehmen die Ableitungen $d\,\theta_s$ hinzu:

$$(4)\qquad \begin{cases} \theta_s \equiv -\,d\,\omega_s + \sum\limits_i c_s^i\,\omega_{i+1}\,\omega_{i+2} = 0, \\ d\,\theta_s \equiv \sum\limits_i (d\,c_s^i\,\omega_{i+1}\,\omega_{i+2} + c_s^i\,d\,\omega_{i+1}\,\omega_{i+2} - c_s^i\,\omega_{i+1}\,d\,\omega_{i+2}) = 0. \end{cases}$$

Die $d\,\omega$ in $d\,\theta_s$ eliminieren wir mit Hilfe der Gleichungen $\theta_s = 0$

$$(5)\qquad d\,\theta_s \equiv \sum_i d\,c_s^i\,\omega_{i+1}\,\omega_{i+2} + \sum_i c_s^i\,(c_{i+1}^{i+2} - c_{i+2}^{i+1})\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3 \qquad (\mathrm{mod}\,\theta).$$

In θ_s nach (4) und $d\,\theta_s$ nach (5) tragen wir $\omega_j = \sum\limits_k z_{jk}\,d\,x_k$ und für die Ableitungen der z_{jk} den Lösungsansatz ein:

$$(6)\qquad d\,z_{jk} = \sum_l y_{jk}^l\,d\,x_l.$$

Nach den Differentialen $d\,(x_{k+1}, x_{k+2})$ bzw. $d\,(x_1, x_2, x_3)$ zusammengefaßt, lauten die Differentialformen dann:

$$(7)\qquad \begin{cases} \theta_s \equiv \sum\limits_k \Big\{ y_{s,\,k+1}^{k+2} - y_{s,\,k+2}^{k+1} + \sum\limits_i c_s^i\,(z_{i+1,\,k+1}\,z_{i+2,\,k+2} \\ \qquad\qquad - z_{i+1,\,k+2}\,z_{i+2,\,k+1})\Big\}\,d\,(x_{k+1},\ x_{k+2}), \\ d\,\theta_s \equiv \Big\{ \sum\limits_{i,k} \dfrac{\partial\,c_s^i}{\partial\,x_k}\,(z_{i+1,\,k+1}\,z_{i+2,\,k+2} - z_{i+1,\,k+2}\,z_{i+2,\,k+1}) \\ \qquad + \sum\limits_{i,k} c_s^i\,(c_{i+1}^{i+2} - c_{i+2}^{i+1})\,z_{1k}\,(z_{2,\,k+1}\,z_{3,\,k+2} - z_{2,\,k+2}\,z_{3,\,k+1})\Big\}\,d\,(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Dieses System von Differentialformen ist für die Anwendung des Existenzbeweises für Lösungen noch nicht verwendbar, da die Formen $d\,\theta_s$ die Ableitungen y nicht enthalten, mithin auch nicht nach ihnen auflösbar sind, wie das bei Führung des Existenzbeweises notwendig ist.

§ 3.

Ersetzung von $d\theta_s$ durch Skalarformen, endgültiges Differentialformensystem.

Wir erreichen die Annullierung von $d\theta_s$, indem wir die Koeffizienten von $d\theta_s$ als zu annullierende Skalarformen φ_s betrachten. Die Formen $d\varphi_s$ müssen wir jetzt zu unserem System hinzunehmen.

Da die $d\varphi_s$ etwas kompliziert sind, seien vor ihrer Angabe folgende Abkürzungen eingeführt: Die Determinante aus den z_{ik} heiße D, die dem Element z_{ik} adjungierte Unterdeterminante A_{ik}

$$D = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} z_{i+1,\,k+1} & z_{i+1,\,k+2} \\ z_{i+2,\,k+1} & z_{i+2,\,k+2} \end{vmatrix}.$$

Häufig vor kommen außerdem die Ausdrücke

$$B_{ik}^{s} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial c_s^{i+1}}{\partial x_{k+1}} & z_{i+1,\,k+2} \\ \dfrac{\partial c_s^{i+2}}{\partial x_{k+1}} & z_{i+2,\,k+2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_{i+1,\,k+1} & \dfrac{\partial c_s^{i+1}}{\partial x_{k+2}} \\ z_{i+2,\,k+1} & \dfrac{\partial c_s^{i+2}}{\partial x_{k+2}} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$C_s = \sum_i c_s^i \left(c_{i+1}^{i+2} - c_{i+2}^{i+1}\right).$$

Mit diesen Abkürzungen ergibt sich endgültig das unserem ursprünglichen System äquivalente Differentialformensystem φ_s, $d\varphi_s$, θ_s. $(s = 1, 2, 3)$

$$\varphi_s \equiv \sum_{i,\,k} \frac{\partial c_s^i}{\partial x_k} A_{ik} + C_s D, \tag{10}$$

$$d\varphi_s \equiv \sum_l \left\{ \sum_{i,\,k} \left[B_{ik}^{s} + C_s A_{ik}\right] y_{ik}^{l} + \sum_{i,\,k} \frac{\partial^2 c_s^i}{\partial x_k\, \partial x_l} A_{ik} + \frac{\partial C_s}{\partial x_l} D \right\} dx_l, \tag{11}$$

$$\theta_s \equiv \sum_k \left\{ y_{s,\,k+1}^{k+2} - y_{s,\,k+2}^{k+1} + \sum_i c_s^i A_{ik} \right\} d\left(x_{k+1},\, x_{k+2}\right). \tag{12}$$

Da die φ_s die Unbekannten z_{ik} in Form von Determinanten enthalten, tritt das einzelne z_{ik} linear darin auf. Es ist mit dem Koeffizienten

$$B_{ik}^{s} + C_s A_{ik} \tag{13}$$

multipliziert, der folglich in $d\varphi_s$ als Koeffizient von y_{ik}^{l} auftritt.

Bei Auflösung nach einer Spalte (oder Zeile, was aber nicht gebraucht wird) der Determinante D ist $\varphi_s = 0$ ein lineares Gleichungssystem.

§ 4.

Existenzbeweis für Lösungen.

Mit dem System der skalaren Gleichungen $\varphi_s = 0$, $s = 1, 2, 3$ können wir im allgemeinen aus sechs willkürlich vorgegebenen Anfangswerten unserer Unbekannten z_{ik} die restlichen drei berechnen. Damit wir mit dem Existenzbeweis ohne weitere Verlängerung des Differentialgleichungssystems durchkommen, müssen wir nach einer Spalte, z. B. z_{13}, z_{23}, z_{33} auflösen. Diese drei z sind die Entwicklungskoeffizienten der drei Formen ω_s nach dx_3. Da wir eine allgemeine Transformation der unabhängigen Variablen x vornehmen können (siehe § 5), bedeutet die Auflösung nach dieser bestimmten Spalte keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit.

Wann ist nun die Berechnung der z_{i3} aus den anderen z_{ik} möglich? Die Funktionaldeterminante $F = \frac{\partial(\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3)}{\partial(z_{13}\, z_{23}\, z_{33})}$ darf nicht verschwinden. Wegen der Linearität der Gleichungen $\varphi_s = 0$ in bezug auf z_{13}, z_{23}, z_{33} ist F einfach die Determinante aus den Koeffizienten (13) dieser z_{i3}

$$F = \left| (B^s_{i3} + C_s A_{i3}) \right|. \tag{14}$$

Hierin bedeute s den Zeilen-, i den Spaltenindex. Wie man auch nachträglich leicht verifizieren kann, hängt F nicht von den unbekannten drei z_{i3} ab.

Unter der Annahme, daß bei geeigneter Wahl der willkürlichen sechs Anfangswerte z_{i1} und z_{i2} die Determinante F nicht verschwindet, führen wir den Existenzbeweis durch.

In dem Schema Tabelle 1 sind die sich ergebenden prinzipalen Variablen bzw. Ableitungen durch Unterstreichen hervorgehoben.

Mit Hilfe der drei skalaren Gleichungen $\varphi_s = 0$ können wir also nach Voraussetzung die drei Anfangswerte z_{13}, z_{23}, z_{33} berechnen.

Durch die Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 schneiden wir eine Kette von Integralelementen aus. Bei vorheriger Vornahme der in § 5 erörterten Variablentransformation ist dies die allgemeinste Kette.

Zur Bestimmung von Ableitungen y^1_{ik} sind die Koeffizienten von dx_1 gleich Null zu setzen, das sind die drei Koeffizienten von $d\varphi_s$ nach (11) mit $l = 1$. Die Funktionaldeterminante für die Auflösung dieser drei Gleichungen nach $y^1_{13}, y^1_{23}, y^1_{33}$ ist genau die Determinante F nach (14), die ja nach Voraussetzung nicht Null ist. Die drei letzten y^1 sind also prinzipal, während die übrigen parametrisch sind.

Zur Bestimmung von Ableitungen y^2_{ik} haben wir die Koeffizienten der Differentiale mit dx_1 und dx_2 zu annullieren. Unter ihnen kommen einmal die drei Koeffizienten der θ_s mit $k = 3$ vor. Durch sie werden

y_{11}^2, y_{21}^2, y_{31}^2 bestimmt, und zwar unmittelbar als Funktionen der y^1 und der c und z, so daß sich keine Bedingungen durch die Forderung der Auflösbarkeit ergeben. Weil man hier nur die y_{i1}^2, dagegen nicht y_{i2}^2 erhält, sind die z_{i1} in dem Schema Tabelle 1 hinter die z_{i2} gestellt. Außerdem sind die Koeffizienten der $d\varphi_s$ mit $l = 2$ gleich Null zu setzen. Mit den als bekannt betrachteten parametrischen y_{i2}^2 und den eben berechneten y_{i1}^2 können wir die y_{i3}^2 berechnen. Die Funktionaldeterminante ist ja immer dieselbe.

Tabelle 1. Schema der Auflösung (Fall $r = 3$).

	z_{12}	z_{22}	z_{32}	z_{11}	z_{21}	z_{31}	z_{13}	z_{23}	z_{33}
dx_1	y_{12}^1	y_{22}^1	y_{32}^1	y_{11}^1	y_{21}^1	y_{31}^1	y_{13}^1	y_{23}^1	y_{33}^1
dx_2	y_{12}^2	y_{22}^2	y_{32}^2	y_{11}^2	y_{21}^2	y_{31}^2	y_{13}^2	y_{23}^2	y_{33}^2
dx_3	y_{12}^3	y_{22}^3	y_{32}^3	y_{11}^3	y_{21}^3	y_{31}^3	y_{13}^3	y_{23}^3	y_{33}^3

Durch Annullieren der restlichen Koeffizienten der Formen θ_s und $d\varphi_s$ werden die y^3 sämtlich bestimmt. Die Koeffizienten von θ_s mit $k = 1$ legen die y_{i2}^3 fest, die mit $k = 2$ dazu die y_{i1}^3. Endlich kann man aus den Koeffizienten mit $l = 3$ von $d\varphi_s$ die y_{i3}^3 berechnen.

Wir haben also in diesem Falle des Nichtverschwindens der Determinante F nach (14) eine reguläre Kette von Integralelementen erhalten. Die Lösung hängt von 3 willkürlichen Funktionen von 1 Variablen und 3 willkürlichen Funktionen von 2 Variablen ab.

Es ist möglich, daß sich als Lösung linear abhängige Pfaffsche Formen ω_s ergeben. Da wir die Unabhängigkeit der ω_s, d. h. $D \neq 0$, vorausgesetzt haben, können wir solche Lösungen nicht brauchen. Falls aus den skalaren Gleichungen $\varphi_s = 0$ folgt, daß die Determinante D nach (8) verschwindet, wollen wir sagen, daß keine Lösungen existieren.

In § 6 wird untersucht, wann die Determinante F verschwindet, und deswegen der obige Existenzbeweis nicht durchführbar ist. In § 7 werden die Fälle bestimmt, in denen wegen des Verschwindens von D keine (brauchbaren) Lösungen existieren.

§ 5.

Transformation der unabhängigen Variablen.

Um geometrisch wesentliche Fälle des Versagens des im vorigen Paragraphen durchgeführten Auflösungsverfahrens von solchen zu trennen, die nur durch eine zufällig ungünstige Wahl des Koordinatensystems verursacht sind, nehmen wir eine Variablentransformation vor. Nach (3)

bleiben die c_s^i invariant. Ihre Ableitungen transformieren sich als kovariante Vektoren.

$$(15)\qquad \begin{cases} \bar{c}_s^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = c_s^i(x_1(\bar{x}), x_2(\bar{x}), x_3(\bar{x})), \\ \dfrac{\overline{\partial c_s^i}}{\partial \bar{x}_k} = \dfrac{\partial \bar{c}_s^i}{\partial \bar{x}_k} = \sum_l \dfrac{\partial c_s^i}{\partial x_l}\dfrac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k} = \sum_l \dfrac{\partial c_s^i}{\partial x_l} t_k^l. \end{cases}$$

Wie wirkt sich nun diese Transformation bei den Rechnungen in den beiden vorigen Paragraphen aus? Man hat die c und ihre Ableitungen durch die nach (15) transformierten Ausdrücke zu ersetzen. Im übrigen ändert sich außer der formalen Ersetzung der Bezeichnungen x_i durch $\bar{x}_i$ und z_{ik} durch $\bar{z}_{ik}$ nichts.

Die für den Existenzbeweis wesentliche Wirkung der Transformation ist die, daß es in vielen Fällen erst nach einer geeigneten Transformation möglich ist, die Funktionaldeterminante F ungleich Null zu machen. Geometrisch bewirkt die Transformation, daß die Kette der Integralelemente durch $d\bar{x}_1, d\bar{x}_2, d\bar{x}_3$ anstatt durch dx_1, dx_2, dx_3 ausgeschnitten wird.

Im folgenden brauchen wir die Transformationsformeln für Determinanten aus den Ableitungen der c. In allen vorkommenden Determinanten ist s der Zeilenindex. Diesen Index lassen wir bei den weiteren Rechnungen weg. Der einzelne Ausdruck in einer Determinante bedeutet also jeweils die ganze Spalte, z. B.

$$\frac{\partial c^\alpha}{\partial x_i} = \begin{matrix} \dfrac{\partial c_1^\alpha}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial c_2^\alpha}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial c_3^\alpha}{\partial x_i} \end{matrix}.$$

Nach (15) transformiert sich eine so dargestellte Determinante folgendermaßen:

$$(16)\qquad \overline{\left|\frac{\partial c^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial c^\beta}{\partial x_j}\frac{\partial c^\gamma}{\partial x_k}\right|} = \left|\sum_h \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_h} t_i^h, \sum_l \frac{\partial c^\beta}{\partial x_l} t_j^l, \sum_m \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_m} t_k^m\right|$$

$$= \sum_{h,l,m} \left|\frac{\partial c^\alpha}{\partial x_h}\frac{\partial c^\beta}{\partial x_l}\frac{\partial c^\gamma}{\partial x_m}\right| t_i^h t_j^l t_k^m.$$

Die oberen Indizes der c, die bei dieser Transformation erhalten bleiben, bezeichnen wir fortan durch griechische Buchstaben.

§ 6.

Entwicklung der Determinante F.

Eine Zeile der Determinante F lautet nach (14) und (8), (9) ausgeschrieben:

$$(17)\quad F = \Big| \Big\{ \frac{\partial c_s^2}{\partial x_1} z_{32} - \frac{\partial c_s^3}{\partial x_1} z_{22} - \frac{\partial c_s^2}{\partial x_2} z_{31} + \frac{\partial c_s^3}{\partial x_2} z_{21} + C_s (z_{21} z_{32} - z_{22} z_{31}) \Big\},$$
$$\Big\{ \frac{\partial c_s^3}{\partial x_1} z_{12} - \frac{\partial c_s^1}{\partial x_1} z_{32} - \frac{\partial c_s^3}{\partial x_2} z_{11} + \frac{\partial c_s^1}{\partial x_2} z_{31} + C_s (z_{31} z_{12} - z_{32} z_{11}) \Big\},$$
$$\Big\{ \frac{\partial c_s^1}{\partial x_1} z_{22} - \frac{\partial c_s^2}{\partial x_1} z_{12} - \frac{\partial c_s^1}{\partial x_2} z_{21} + \frac{\partial c_s^2}{\partial x_2} z_{11} + C_s (z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}) \Big\} \Big|.$$

Wir entwickeln die Determinante F als Polynom in den z_{ik}. Das Polynom besteht aus Gliedern dritten und vierten Grades in z. Glieder höheren Grades treten nicht auf, denn ihre Koeffizienten würden Determinanten sein, die zweimal bzw. dreimal die Spalte C enthalten.

Um die Fälle zu berücksichtigen, in denen wir nur nach Vornahme einer Koordinatentransformation $F \neq 0$ machen können, transformieren wir die Koeffizienten des Polynoms, und damit das ganze Polynom mit Hilfe von Formel (16). Wir erhalten dadurch F als ein Polynom in den neun Transformationsgrößen t_i^k und den sechs frei vorzugebenden z_{i1} und z_{i2}. Wegen der Kompliziertheit möge auf die explizite Angabe verzichtet werden.

Es ist dann und nur dann unmöglich, F durch Vornahme einer geeigneten Transformation und Vorgabe geeigneter z ungleich Null zu machen, wenn sämtliche Koeffizienten dieses Polynoms verschwinden.

Die Koeffizienten lassen sich durch die beiden folgenden allgemeinen Ausdrücke darstellen:

$$(18)\quad \begin{cases} G_{ijk}(\alpha\beta\gamma) = \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_j} \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_k} \right| + \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_k} \right| \\ \qquad\qquad - \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_j} \right| - \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_j} \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_i} \right|, \\ H_{ik}(\alpha\beta) = \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_k} C_s \right| - \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_i} C \right|. \end{cases}$$

Die Ausdrücke, die man durch Einsetzen von beliebigen Werten für α, β, γ und i, j, k erhält, treten sämtlich als Koeffizienten auf.

Daß das Verschwinden der sämtlichen G und H gegen Koordinatentransformationen invariant ist, kann man nachträglich daran sehen, daß

sie sich in Tensoren zusammenfassen lassen. Die Transformationsformeln lauten:

$$\overline{G}_{ijk}(\alpha\beta\gamma) = \sum_{h,l,m} G_{hlm}(\alpha\beta\gamma)\, t_i^h\, t_j^l\, t_k^m,$$

$$\overline{H}_{ik}(\alpha\beta) = \sum_{l,m} H_{lm}(\alpha\beta)\, t_i^l\, t_k^m.$$

Die Ausdrücke G ergeben neun verschiedene Tensoren mit je neun verschiedenen Elementen, die H sechs Tensoren mit je drei Elementen. Unter den G und H finden sich also insgesamt 99 verschiedene Ausdrücke.

Es ist zu vermuten, daß das Verschwinden dieser vielen Ausdrücke auf einige wenige, ganz spezielle Fälle führt, in denen unser Existenzbeweis versagt.

Die Ausdrücke G und H seien für die möglichen Spezialfälle der Argumente, die jetzt vornehmlich gebraucht werden, noch einmal angegeben:

$$(19)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\, G_{iik}(\alpha\,\beta\,\beta) = \left|\dfrac{\partial c^\alpha}{\partial x_i}\dfrac{\partial c^\beta}{\partial x_i}\dfrac{\partial c^\beta}{\partial x_k}\right|, \\ G_{ijk}(\alpha\,\beta\,\beta) = \left|\dfrac{\partial c^\alpha}{\partial x_i}\dfrac{\partial c^\beta}{\partial x_j}\dfrac{\partial c^\beta}{\partial x_k}\right| + \left|\dfrac{\partial c^\alpha}{\partial x_j}\dfrac{\partial c^\beta}{\partial x_i}\dfrac{\partial c^\beta}{\partial x_k}\right|, \\ \frac{1}{2}\, G_{iik}(\alpha\,\beta\,\gamma) = \left|\dfrac{\partial c^\alpha}{\partial x_i}\dfrac{\partial c^\beta}{\partial x_i}\dfrac{\partial c^\gamma}{\partial x_k}\right| - \left|\dfrac{\partial c^\alpha}{\partial x_k}\dfrac{\partial c^\beta}{\partial x_i}\dfrac{\partial c^\gamma}{\partial x_i}\right|, \\ \frac{1}{2}\, H_{ik}(\alpha\,\alpha) = \left|\dfrac{\partial c^\alpha}{\partial x_i}\dfrac{\partial c^\alpha}{\partial x_k}\, C\right|. \end{cases}$$

Bei den folgenden Untersuchungen betrachten wir die Matrix M_1 der Koeffizienten der als Polynome in den z_{ik} aufgefaßten Skalarformen φ_s nach (10):

$$(20)\quad \begin{cases} M_1 = \left(\dfrac{\partial c^1}{\partial x_1}\dfrac{\partial c^1}{\partial x_2}\dfrac{\partial c^1}{\partial x_3}\;\dfrac{\partial c^2}{\partial x_1}\dfrac{\partial c^2}{\partial x_2}\dfrac{\partial c^2}{\partial x_3}\;\dfrac{\partial c^3}{\partial x_1}\dfrac{\partial c^3}{\partial x_2}\dfrac{\partial c^3}{\partial x_3}\;C\right), \\ M_2 = \left(\dfrac{\partial c^1}{\partial x_1}\dfrac{\partial c^1}{\partial x_2}\dfrac{\partial c^1}{\partial x_3}\;\dfrac{\partial c^2}{\partial x_1}\dfrac{\partial c^2}{\partial x_2}\dfrac{\partial c^2}{\partial x_3}\;\dfrac{\partial c^3}{\partial x_1}\dfrac{\partial c^3}{\partial x_2}\dfrac{\partial c^3}{\partial x_3}\right). \end{cases}$$

Nach den Ausführungen im nächsten Paragraphen können nur dann Lösungen existieren, wenn die Matrizen M_1 und M_2 den gleichen Rang r haben. Wir untersuchen hier den Fall $r = 3$. Wie die ganzen Untersuchungen ab § 4 abzuändern sind, falls $r = 0$, 1 oder 2 ist, wird in § 8 erörtert.

Wir setzen fest, „eine Spalte $\dfrac{\partial c^\alpha}{\partial x_k}$ ist Null", soll wie bei einem Vektor bedeuten, daß die drei „Komponenten" $\dfrac{\partial c_1^\alpha}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial c_2^\alpha}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial c_3^\alpha}{\partial x_k}$ sämtlich verschwinden.

Falls in einer Gruppe[2]) von drei Spalten $\frac{\partial c^\alpha}{\partial x_1}\frac{\partial c^\alpha}{\partial x_2}\frac{\partial c^\alpha}{\partial x_3}$ (α fest) in der Matrix M_2 eine Spalte nicht verschwindet, läßt sich durch eine Koordinatentransformation

$$\overline{\frac{\partial c^\alpha}{\partial x_k}} = \sum_i \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_i} l_k^i$$

erreichen, daß auch die beiden anderen Spalten dieser Gruppe ungleich Null werden.

Die Untersuchung, welche Folgerungen aus dem Verschwinden der sämtlichen G und H zu ziehen sind, führen wir zunächst unter der Voraussetzung durch, daß die Spalte C ungleich Null ist.

Da die Matrix M_2 den Rang drei hat, enthält sie mindestens drei linear unabhängige Spalten. Wir machen die Annahme, daß in einer Gruppe der Matrix zwei linear unabhängige Spalten vorhanden sind; z. B. seien

$$\frac{\partial c^1}{\partial x_1}, \frac{\partial c^1}{\partial x_2} \text{ linear unabhängig.} \tag{21}$$

Diese Annahme wird sich als falsch erweisen.

Aus $H_{12}(11) = 0$ folgt, daß C von diesen beiden Spalten linear abhängig ist. C muß von einer der Spalten $\frac{\partial c^1}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial c^1}{\partial x_2}$ linear unabhängig sein, etwa von $\frac{\partial c^1}{\partial x_1}$.

Das Verschwinden von $H_{13}(11)$ bedeutet Abhängigkeit der Spalte $\frac{\partial c^1}{\partial x_3}$ von C und $\frac{\partial c^1}{\partial x_1}$, mithin auch von $\frac{\partial c^1}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial c^1}{\partial x_2}$. $\frac{\partial c^1}{\partial x_3}$ kann ungleich Null gemacht werden.

Aus $G_{113}(211) = 0$ läßt sich die Abhängigkeit der Spalte $\frac{\partial c^2}{\partial x_1}$ von $\frac{\partial c^1}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial c^1}{\partial x_2}$ folgern.

Unter entsprechender Verwendung weiterer Ausdrücke $G_{iik}(\alpha\beta\beta)$ gelangt man zu dem Ergebnis, daß auch die noch fehlenden Spalten der Matrix M_2 sämtlich von $\frac{\partial c^1}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial c^1}{\partial x_2}$ linear abhängig sind. Das bedeutet entgegen unserer Voraussetzung, daß die Matrix M_2 den Rang zwei

---

[2]) Mit der Bezeichnung Gruppe ist hier nichts weiter gemeint, als die Zusammenfassung solcher drei Spalten.

hat. Also muß die Annahme, daß es in einer Gruppe der Matrix zwei linear unabhängige Spalten geben kann, falsch sein. Folglich gilt:

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial c^1}{\partial x_1} = \dfrac{1}{a_2}\dfrac{\partial c^1}{\partial x_2} = \dfrac{1}{a_3}\dfrac{\partial c^1}{\partial x_3}; & \dfrac{\partial c^2}{\partial x_1} = \dfrac{1}{b_2}\dfrac{\partial c^2}{\partial x_2} = \dfrac{1}{b_3}\dfrac{\partial c^2}{\partial x_3}; \\ \dfrac{\partial c^3}{\partial x_1} = \dfrac{1}{d_2}\dfrac{\partial c^3}{\partial x_2} = \dfrac{1}{d_3}\dfrac{\partial c^3}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Man kann diese Gleichungen so aufstellen, da wegen des Ranges drei der Matrix mindestens eine der Determinanten, deren Spalten sämtlich aus verschiedenen Gruppen der Matrix stammen, nicht verschwindet. Daraus folgt, daß man durch eine Transformation sämtliche Spalten der Matrix ungleich Null machen kann.

$G_{112}\,(231)$ lautet unter Verwendung der Gleichungen (22) ausgeschrieben:

$$\tfrac{1}{2}\,G_{112}\,(231) = a_2\left|\frac{\partial c^3}{\partial x_1}\frac{\partial c^3}{\partial x_1}\frac{\partial c^1}{\partial x_1}\right| - b_2\left|\frac{\partial c^2}{\partial x_1}\frac{\partial c^3}{\partial x_1}\frac{\partial c^1}{\partial x_1}\right| = 0.$$

Da die Determinante $\left|\dfrac{\partial c^1}{\partial x_1}\dfrac{\partial c^2}{\partial x_1}\dfrac{\partial c^3}{\partial x_1}\right| \neq 0$ ist, weil sämtliche aus der Matrix M_2 zu bildenden Determinanten endliche Vielfache davon sind, muß $a_2 = b_2$ sein. Ebenso läßt sich aus dem Verschwinden der übrigen Ausdrücke $G_{ikk}\,(\alpha\,\beta\,\gamma)$ schließen, daß gilt

$$a_2 = b_2 = d_2; \qquad a_3 = b_3 = d_3.$$

Wir können also die neun Proportionen aufstellen:

$$(23)\qquad \frac{\partial c_s^\alpha}{\partial x_1} : \frac{\partial c_s^\alpha}{\partial x_2} : \frac{\partial c_s^\alpha}{\partial x_3} = a_1(x) : a_2(x) : a_3(x)\ ^3).$$

Funktionen c_s^α, für die solche Proportionen gelten, annullieren die allgemeinen Ausdrücke G und H nach (18).

Die Proportionen (23) bedeuten, daß unter den Funktionen c_s^α nur eine analytisch unabhängig ist, d. h. daß sämtliche Produkte von zwei Differentialen der c_s^α verschwinden:

$$(24)\qquad dc_s^\alpha \cdot dc_t^\beta = 0 \qquad\qquad \alpha, \beta, s, t \text{ beliebig.}$$

Dies ist der einzige Fall, in dem bei $C \neq 0$ sämtliche Ausdrücke G und H verschwinden.

Falls wir $C = 0$ voraussetzen, fallen die Ausdrücke H schon auf Grund dieser Voraussetzung weg. Sämtliche G verschwinden selbst-

---

[3]) In der vorhergehenden Rechnung ist willkürlich $a_1 = 1$ gesetzt, was durch eine Koordinatentransformation auch für die Fälle ermöglicht wurde, in denen sich vor der Transformation $a_1 = 0$ ergeben hätte.

verständlich wie im Falle $C \neq 0$, wenn sich unter den Funktionen c^α nur eine analytisch unabhängige befindet. Die Annahme (21) führt bei $C = 0$ nicht zu einem Widerspruch, sondern zu einem zweiten Ausnahmefall, in dem die Proportionen bestehen:

$$\frac{\partial c_\varkappa^1}{\partial x_k} : \frac{\partial c_\varkappa^2}{\partial x_k} : \frac{\partial c_\varkappa^3}{\partial x_k} = b_1 : b_2 : b_3. \tag{25}$$

In invarianter Form schreiben sich diese Proportionen:

$$dc_\varkappa^1 : dc_\varkappa^2 : dc_\varkappa^3 = b_1 : b_2 : b_3. \tag{26}$$

Außer den eben angegebenen Fällen gibt es keine weiteren, in denen sämtliche G und H verschwinden. Wir haben alle Möglichkeiten untersucht, nämlich erstens entweder $C \neq 0$ oder $C = 0$ angenommen, zweitens entweder das Vorhandensein oder das Nichtvorhandensein zweier unabhängiger Spalten in einer Gruppe der Matrix M_2 vorausgesetzt.

§ 7.

Über das Verschwinden der Determinante D.

Falls die Ränge der Matrizen M_1 und M_2 nach (20) verschieden sind, läßt sich mit geeigneten Koeffizienten $a_\varkappa$ folgendes System von Gleichungen aufstellen:

$$\sum_\varkappa a_\varkappa \frac{\partial c_\varkappa^i}{\partial x_k} = 0; \qquad \sum_\varkappa a_\varkappa C_\varkappa \neq 0.$$

Mit den Koeffizienten $a_\varkappa$ bilden wir die Gleichung $\sum_\varkappa a_\varkappa \varphi_\varkappa = 0$ aus den Skalarformen (10):

$$\sum_{i,k} \Big(\sum_\varkappa a_\varkappa \frac{\partial c_\varkappa^i}{\partial x_k} \Big) A_{ik} + \Big(\sum_\varkappa a_\varkappa C_\varkappa \Big) D = 0.$$

Es ergibt sich $D = 0$. Nur wenn die Matrizen M_1 und M_2 gleichen Rang r haben, können Lösungen existieren.

Aus dieser Bedingung folgen im Falle konstanter $c_\varkappa^i$ die Gleichungen $C_\varkappa = 0$. Das sind die aus der Lieschen Gruppentheorie bekannten Relationen zwischen den Strukturkonstanten einer dreigliedrigen Gruppe. Das hier behandelte Problem der Bestimmung von Pfaffschen Formen ist im Falle $c_\varkappa^i = \text{const}$ identisch mit der Bestimmung einer dreigliedrigen Gruppe durch ihre Strukturkonstanten.

Um festzustellen, in welchen Fällen bei gleichem Rang von M_1 und M_2 aus den skalaren Gleichungen $D = 0$ folgt, müssen wir D regel-

recht ausrechnen. Für den bisher untersuchten Fall $r = 3$ führen wir die Rechnung unter der Voraussetzung $F \neq 0$ durch.

Nach der Cramerschen Regel ergeben sich aus dem System der Gleichungen $\varphi_s = 0$ die Unbekannten z_{i3} explizit als Quotienten gewisser Determinanten d_i und der Determinante F. Den Nenner F multiplizieren wir herauf. $z_{i3} \cdot F = d_i$. Das Produkt

$$D \cdot F = \sum_i z_{i3} A_{i3} F = \sum_i d_i A_{i3}$$

entwickeln wir als Polynom in den frei vorzugebenden z_{i1} und z_{i2}. Die Entwicklung hat das im Verhältnis zur Kompliziertheit der Rechnung sehr einfache Resultat:

$$D \cdot F = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_1} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_2} \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_3} \right| A_{\alpha 3} A_{\beta 3} A_{\gamma 3} \text{ [4]}. \tag{27}$$

Die A_{i3} sind drei, durch geeignete Wahl der freien Anfangswerte z beliebig vorzugebende Größen, also können wir (27) als Polynom in den A auffassen. Die Zusammenfassung der Koeffizienten gleicher Produkte der A ergibt als allgemeinen Koeffizienten des Polynoms den Ausdruck:

$$\begin{aligned} K(\alpha\beta\gamma) = &\left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_1} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_2} \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_3} \right| + \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_2} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_3} \frac{\partial b^\gamma}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_3} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_1} \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_2} \right| \\ &+ \left| \frac{\partial c^\beta}{\partial x_1} \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_2} \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_3} \right| + \left| \frac{\partial c^\beta}{\partial x_2} \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_3} \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial c^\beta}{\partial x_3} \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_1} \frac{\partial c^\gamma}{\partial x_2} \right|. \end{aligned}$$

Eine Koordinatentransformation brauchen wir nicht vorzunehmen, denn aus den mit $d(x_1, x_2, x_3)$ multiplizierten K ergeben sich durch eine kleine Umrechnung die invarianten Formen $\varkappa$:

$$\varkappa(\alpha\beta\gamma) = K(\alpha\beta\gamma) \cdot d(x_1, x_2, x_3),$$

$$\begin{aligned} \varkappa(\alpha\beta\gamma) = &\, d(c_1^\alpha, c_2^\beta, c_3^\gamma) + d(c_2^\alpha, c_3^\beta, c_1^\gamma) + d(c_3^\alpha, c_1^\beta, c_2^\gamma). \\ &+ d(c_1^\beta, c_2^\alpha, c_3^\gamma) + d(c_2^\beta, c_3^\alpha, c_1^\gamma) + d(c_3^\beta, c_1^\alpha, c_2^\gamma). \end{aligned} \tag{28}$$

Unter den $\varkappa$ befinden sich zehn verschiedene Formen, nämlich drei mit $\alpha = \beta = \gamma$, sechs mit $\alpha = \beta \neq \gamma$ und eine mit $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

Falls nicht alle $\varkappa$ verschwinden, und nicht einer der Ausnahmefälle vorliegt, in denen F identisch verschwindet, ist es möglich, F und D

[4]) Man darf hier nicht schließen: Wenn die rechte Seite ungleich Null ist, sind D und F beide nicht Null, also sind die Überlegungen in § 6 überflüssig gewesen. Wir mußten hier nämlich $F \neq 0$ voraussetzen. Z. B. sind in dem unter (25) angegebenen Ausnahmefall D und F beide Null, trotzdem verschwindet die rechte Seite von (27) nicht identisch.

ungleich Null zu machen. In dem 15-dimensionalen Raum der neun Transformationsgrößen t_i^k und der sechs frei vorzugebenden z_{ik} wird erstens durch die Bedingung $|t_i^k| \neq 0$ eine Hyperfläche ausgeschlossen. Eine zweite wird durch die Bedingung $F \neq 0$, und eine dritte durch $D \cdot F \neq 0$ ausgeschlossen. Jeder Punkt außerhalb dieser drei Hyperflächen ergibt eine brauchbare Transformationsmatrix (t_i^k) und brauchbare Anfangswerte z_{ik}.

Keine Lösungen gibt es wegen des Verschwindens der sämtlichen Formen $\varkappa$, und damit der Determinante D, wenn unter den Funktionen c_s^α nur zwei analytisch unabhängig sind. Aber auch bei drei analytisch unabhängigen unter den c_s^α gibt es spezielle Fälle, in denen alle $\varkappa = 0$ sind.

In den Fällen, in denen F identisch verschwindet, müssen wir gesondert untersuchen, ob sich $D = 0$ ergibt oder nicht.

Gelten die Proportionen (25), so lassen sich die Ableitungen der c zerspalten in:

$$\frac{\partial c_s^i}{\partial x_k} = f_{sk} b_i.$$

In dieser Form tragen wir sie in die skalaren Gleichungen $\varphi_s = 0$ nach (10) ein:

$$\sum_{i,k} f_{sk} b_i A_{ik} + C_s D = 0. \tag{29}$$

Sind die $C_s = 0$, so können wir diese Gleichungen nach den Größen $\sum_i b_i A_{ik}$ auflösen, da nach Voraussetzung ($r = 3$) die Determinante $_{sk} \neq 0$ ist. Es ergibt sich:

$$\sum_i b_i A_{ik} = 0.$$

Die Zeilen aus den Unterdeterminanten A_{ik} sind linear abhängig. Daraus folgt, ebenso wie aus der Abhängigkeit der Zeilen der z_{ik}, das Verschwinden von D.

Falls bei Bestehen der Proportionen (25) nicht alle $C_s = 0$ sind, läßt sich ja $F \neq 0$ erreichen. Demnach gilt unsere Entwicklung für $D \cdot F$. Da aus $r = 3$ und den Proportionen (25) folgt, daß mindestens eines der $\varkappa$ nicht verschwindet, läßt sich in diesem Falle $D \neq 0$ machen.

Wenn es unter den c_s^i nur ein analytisch unabhängiges gibt, d. h. die Proportionen (23) gelten, tragen wir $\frac{\partial c_s^i}{\partial x_k} = g_{si} a_k$ in die skalaren Gleichungen ein:

$$\sum_{i,k} g_{si} a_k A_{ik} + C_s D = 0.$$

Vertauschung der Bezeichnungen i und k ergibt·

$$\sum_{i,k} g_{sk} a_i A_{ki} + C_s D = 0. \tag{30}$$

Vertauscht man jetzt die Zeilen und Spalten von D, was auf den Wert von D ja keinen Einfluß hat, so geht A_{ki} in A_{ik} über. Das Gleichungssystem hat genau dieselbe Form erhalten, wie das vorher untersuchte. (30) ist gleichwertig (29). Bei $C_s = 0$ folgt $D = 0$. Ebenso folgt, daß bei $C_s \neq 0$ die Determinante D nicht identisch verschwindet.

Dieser letzte Fall ist der einzige, für den die Frage nach der Existenz von Lösungen unbeantwortet bleibt. Wegen $F = 0$ versagt der Existenzbeweis; andererseits folgt nicht wie in den anderen Fällen $F = 0$ die Nichtexistenz von Lösungen aus $D = 0$. Man müßte durch Verlängern des Differentialformensystems eine Entscheidung herbeizuführen versuchen.

§ 8.

Übertragung der Untersuchungen auf die Fälle $r = 0, 1, 2$.

Haben die Matrizen M_1 und M_2 nach (20) den Rang r, so sind nur r der skalaren Gleichungen $\varphi_s = 0$ unabhängig; die übrigen $3 - r$ können weggelassen werden. Die Numerierung möge so eingerichtet werden, daß wir s von 1 bis r laufen lassen können.

Bei der Auflösung in § 4 treten folgende Abänderungen ein: Die r skalaren Gleichungen lösen wir nach r der z_{i3} auf. Nach welchen z_{i3} wir auflösen, wird unter Umständen dadurch festgelegt, daß sich nur bei bestimmten die Funktionaldeterminante ungleich Null machen läßt.

Die Formen $d\varphi_s$ können wir gerade nach den Ableitungen derjenigen z_{i3} auflösen, nach denen wir vorher die Skalarformen φ_s aufgelöst haben, da die Funktionaldeterminante dieselbe ist.

Die $3 - r$ der z_{i3}, die mitsamt ihren Ableitungen unbestimmt bleiben, sind in dem Schema Tabelle 1 als parametrische Größen vor die anderen z_{ik} zu stellen. Die Lösung hängt also von $3 - r$ mehr willkürlichen Funktionen von 3 Variablen ab, als in dem in Tabelle 1 dargestellten Fall.

Die Funktionaldeterminante $F^{(r)}$[5]), die nicht verschwinden darf, lautet wie früher

$$F^{(r)} = |(B^s_{i3} + C_s A_{i3}|.$$

[5]) Wir verwenden bei analogen Größen die früheren Bezeichnungen, denen wir den Index (r) geben.

Der Index s läuft jetzt von 1 bis r, i durchläuft r der Zahlen 1 bis 3. Z. B. bei $r = 2$ genügt es, wenn eine der Determinanten mit $i = 1, 2$; $i = 2, 3$ oder $i = 3, 1$ sich ungleich Null machen läßt.

Wir entwickeln $F^{(r)}$, wie es mit F in § 6 geschehen ist. Dabei finden wir, daß unter den Koeffizienten $G^{(r)}$ sämtliche r-reihigen Determinanten vorkommen, die sich aus den ersten r Zeilen der Matrix M_2 bilden lassen. Da wir voraussetzen, daß diese Matrix den Rang r hat, verschwindet einer der Koeffizienten $G^{(r)}$ nicht. Bei $r = 1$ oder 2 läßt sich folglich stets $F^{(r)} \neq 0$ erreichen, die Auflösung ist immer möglich. Bei $r = 0$ fällt die Auflösung der Formen φ_s und $d\varphi_s$ weg, da diese Formen identisch verschwinden.

Um die Fälle aufzufinden, in denen wegen Verschwindens von D keine Lösungen existieren, berechnen wir $D \cdot F^{(r)}$ nach dem in § 7 angewendeten Verfahren. Wenn wir im Falle $r = 2$ die skalaren Gleichungen $\varphi_s = 0$ nach z_{1s} und z_{2s} auflösen, so daß z_{3s} parametrisch ist, ergibt sich:

$$(31) \quad D \cdot F^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\alpha,\beta} \left\{ \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_{i+2}} \right| + \left| \frac{\partial c^\beta}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_{i+2}} \right| \right\} z_{3i} A_{\alpha 3} A_{\beta 3}.$$

Die z_{3i} und die Unterdeterminanten $A_{\alpha 3}$ können als voneinander unabhängige Größen betrachtet werden. Wenn nicht mehrere von ihnen zu Null vorgegeben werden, kann man die außer den z_{3i} zur Verfügung stehenden vier parametrischen z_{ik} so wählen, daß die $A_{\alpha 3}$ die vorgegebenen Werte annehmen.

Die Koeffizienten $K^{(2)}$ des Polynoms $D \cdot F^{(2)}$ sind demnach die 18 Ausdrücke:

$$K_i^{(2)}(\alpha\,\beta) = \left| \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial c^\beta}{\partial x_{i+2}} \right| + \left| \frac{\partial c^\beta}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial c^\alpha}{\partial x_{i+2}} \right|.$$

Nach derselben Methode, nach der in § 6 Folgerungen aus dem Verschwinden der sämtlichen G und H gezogen wurden, finden wir hier: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sämtliche $K^{(2)}$ verschwinden, ist, daß sich unter den Funktionen c_s^α nur eine analytisch unabhängige findet. In diesem Falle gibt es bei $r = 2$ keine Lösungen.

Bei $r = 1$ ergibt die Berechnung von $D \cdot F^{(1)}$, wenn wir nach z_{1s} auflösen:

$$(32) \quad DF^{(1)} = -\sum_{i,k} \frac{\partial c_1^i}{\partial x_k} A_{1k} A_{is}.$$

Die fünf vorkommenden Unterdeterminanten können wir als unabhängige Variable betrachten. Nach Voraussetzung ist einer der Koeffizienten $\frac{\partial c_1^i}{\partial x_k} \neq 0$, also läßt sich stets $D \neq 0$ erreichen.

Auch bei $r = 0$, wo ja überhaupt keine skalaren Gleichungen zu lösen sind, kann selbstverständlich stets $D \neq 0$ gemacht werden.

§ 9.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Es war zu untersuchen, wann es zu neun willkürlich vorgegebenen Koeffizienten $c_s^i\ (x_1, x_2, x_3)$ drei linear unabhängige Pfaffsche Formen ω_s gibt, die die Gleichungen befriedigen:

$$d\omega_s = \sum_i c_s^i \omega_{i+1}\omega_{i+2}.$$

Um festzustellen, ob Lösungen existieren, benötigen wir erstens die beiden Matrizen M_1 und M_2 (Zeilenindex $s = 1, 2, 3$):

$$(33)\quad \begin{cases} M_1 = \left(\frac{\partial c_s^1}{\partial x_1}\ \frac{\partial c_s^1}{\partial x_2}\ \frac{\partial c_s^1}{\partial x_3}\quad \frac{\partial c_s^2}{\partial x_1}\ \frac{\partial c_s^2}{\partial x_2}\ \frac{\partial c_s^2}{\partial x_3}\quad \frac{\partial c_s^3}{\partial x_1}\ \frac{\partial c_s^3}{\partial x_2}\ \frac{\partial c_s^3}{\partial x_3}\ C_s\right), \\ M_2 = \left(\frac{\partial c_s^1}{\partial x_1}\ \frac{\partial c_s^1}{\partial x_2}\ \frac{\partial c_s^1}{\partial x_3}\quad \frac{\partial c_s^2}{\partial x_1}\ \frac{\partial c_s^2}{\partial x_2}\ \frac{\partial c_s^2}{\partial x_3}\quad \frac{\partial c_s^3}{\partial x_1}\ \frac{\partial c_s^3}{\partial x_2}\ \frac{\partial c_s^3}{\partial x_3}\right). \end{cases}$$

Die Abkürzung C_s bedeutet:

$$C_s = \sum_i c_s^i (c_{i+1}^{i+2} - c_{i+2}^{i+1}).$$

Zweitens haben wir die Anzahl N der analytisch unabhängigen unter den Funktionen c_s^i festzustellen.

In einem Spezialfall ist ferner zu untersuchen, ob die 10 Formen $\varkappa$ verschwinden:

$$(34)\quad \begin{aligned} \varkappa(\alpha\beta\gamma) = {} & d(c_1^\alpha, c_2^\beta, c_3^\gamma) + d(c_3^\alpha, c_2^\beta, c_1^\gamma) + d(c_3^\alpha, c_1^\beta, c_2^\gamma) \\ & + d(c_1^\beta, c_2^\alpha, c_3^\gamma) + d(c_2^\beta, c_3^\alpha, c_1^\gamma) + d(c_3^\beta, c_1^\alpha, c_2^\gamma), \end{aligned}$$

oder ob die C_s verschwinden, und sich mit geeigneten Koeffizienten $b_i(x)$ die Proportionen aufstellen lassen:

$$(35)\quad \begin{cases} dc_s^1 : dc_s^2 : dc_s^3 = b_1 : b_2 : b_3, \\ C_s = 0. \end{cases}$$

Mit diesem Rüstzeug können wir die gestellte Frage beantworten.

Es existieren keine Lösungen, falls die Matrizen M_1 und M_2 verschiedenen Rang haben.

Haben M_1 und M_2 den gleichen Rang r, so gibt die folgende Tabelle an, ob Lösungen existieren.

Tabelle 2. Existenz von Lösungen.

N \ r	0	1	2	3
0	ja	—	—	—
1	—	ja	nein	nein, wenn alle $C_s = 0$?, wenn nicht alle $C_s = 0$
2	—	ja	ja	nein
3	—	ja	ja	nein, wenn { entweder alle $\varkappa = 0$ oder (35) gilt ja in allen anderen Fällen

Die Lösungen hängen von $3 - r$ willkürlichen Funktionen von 3 Variablen, 3 willkürlichen Funktionen von 2 Variablen, und 3 Funktionen von 1 Variablen ab.

In der Tabelle 2 sind einige Fächer nicht ausgefüllt, da $r = 0$ auch $N = 0$, und $r \neq 0$ ebenso $N \neq 0$ bedingt. Daß es bei $r = 1, 2, 3$ möglich ist, daß $N = 1, 2, 3$ ist, läßt sich leicht zeigen; auf diese Frage soll hier aber nicht eingegangen werden.

(Eingegangen am 22. Dezember 1934.)

Über Perron-Stieltjessche und Denjoy-Stieltjessche Integrationen.

Von

J. Ridder in Groningen.

Die im ersten Kapitel [und in den zugehörigen Fußnoten] enthaltenen Sätze sind Verallgemeinerungen bekannter Sätze aus der Theorie der reellen Funktionen, welche dadurch entstanden sind, daß statt der gewöhnlichen Differentiation und der Lebesgueschen Integration die Differentiation „in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$", welche monoton oder von beschränkter Variation ist, und die Lebesgue-Stieltjessche Integration „in bezug auf eine derartige Funktion" angewandt wurden. Es wäre sehr wohl möglich, viele weitere Sätze in gleichartiger Weise zu verallgemeinern[1]), auch solche, in welchen Punktmengen und Funktionen in (euklidischen) Räumen von n Dimensionen betrachtet werden.

Das zweite Kapitel behandelt eine Integration „im Stieltjesschen Sinne", welche zu betrachten ist als Verallgemeinerung der Perronschen Integration von Funktionen einer Veränderlichen und der mit dieser äquivalenten, speziellen Denjoyschen Integration; das unbestimmte Integral, zu welchem sie führt, ist in jedem Punkte des zugehörigen Intervalls entweder *stetig* oder hat daselbst eine Unstetigkeit erster Art.

Schließlich findet man im letzten Kapitel eine β-Integration „im Stieltjesschen Sinne" behandelt; hierbei ist die β-Integration ein von uns neuerdings eingeführtes Integrationsverfahren für Funktionen einer Veränderlichen[2]), das zu einem *approximativ stetigen* unbestimmten Integral führt, welches mit dem unbestimmten Integral zusammenfällt, das von der allgemeinen Denjoy-Integration und der ebenso weit führenden „verallgemeinerten" Perron-Integration[3]) geliefert wird, sobald nur die beiden letzten Integrationsverfahren anwendbar sind.

Während das im Kapitel 2 behandelte unbestimmte Integral mit einer *Differentiation* in bezug auf die zur Integration gehörende Funktion

[1]) Man siehe auch J. Ridder, Das Riemann-Stieltjessche Integral. Prac mat.-fiz. (Varsovie) **41** (1933), S. 65—95.

[2]) Siehe Fund. Math. **22** (1934), S. 136—162; daneben auch J. Ridder, Fund. Math. **21** (1933), S. 1—10.

[3]) Siehe J. Ridder Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 234—269, insbesondere S. 258—269.

$\alpha(x)$ zusammenhängt, hängt das unbestimmte Integral des Kapitels 3 in gleichartiger Weise mit einer *approximativen Differentiation* in bezug auf die zugehörige Funktion $\alpha(x)$ zusammen.

Erstes Kapitel.

Vorbereitende Sätze.

§ 1. $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b). Bekanntlich läßt sich für die Teilmengen von (a, b) neben den gewöhnlichen Lebesgueschen äußeren und inneren Maßen auch ein äußeres $\alpha(x)$-Maß (L) und ein inneres $\alpha(x)$-Maß (L) einführen[4]), welche für $\alpha(x) \equiv x$ mit dem erstgenannten äußeren bzw. inneren Maße zusammenfallen; dabei wird das äußere $\alpha(x)$-Maß eines offenen Intervalls (ξ_1, ξ_2) gleich $\alpha(\xi_2 - 0) - \alpha(\xi_1 + 0)$ angenommen, wobei $\alpha(\xi + 0) \equiv \lim\limits_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} \alpha(x)$ und $\alpha(\xi - 0) \equiv \lim\limits_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi}} \alpha(x)$ sein soll. Eine Teilmenge E_x heißt $\alpha(x)$-meßbar (L), wenn ihre äußeren und inneren $V(x)$-Maße (L) einander gleich sind; hierbei ist $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x). Außerdem ist dann die Menge auch $P(x)$-meßbar (L) und $N(x)$-meßbar (L), wobei $P(x)$ und $N(x)$ die positive bzw. negative Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) darstellen, und man hat, wenn $m_{\alpha(x)}$ das $\alpha(x)$-Maß (L) der meßbaren Menge (d. h. den gemeinsamen Wert der zugehörigen äußeren und inneren Maße) andeutet:

$$m_{\alpha(x)} E_x = m_{P(x)}(E_x) - m_{N(x)}(E_x) \text{ und } m_{V(x)}(E_x) = m_{P(x)}(E_x) + m_{N(x)}(E_x).$$

§ 2. Wenn $\alpha(x)$ (monoton) nicht-abnehmend ist im abgeschlossenen Intervall (a, b), so läßt sich (a, b) auf das abgeschlossene Intervall $[t_1 = \alpha(a), t_2 = \alpha(b)]$ der t-Achse abbilden; dabei soll jeder Stetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$ mit dem Punkte $t = \alpha(\xi)$ übereinstimmen, während ein Unstetigkeitspunkt ξ' sich abbilden möge in die Punkte des abgeschlossenen Intervalls $[\alpha(\xi' - 0), \alpha(\xi' + 0)]$. Damit nun eine Teilmenge E_x von (a, b) ein $\alpha(x)$-Maß (L), $m_{\alpha(x)}(E_x)$, besitze, ist es notwendig und hinreichend, daß ihre Bildmenge E_t ein gewöhnliches Maß (L), $m(E_t)$, habe; $m_{\alpha(x)}(E_x)$ und $m(E_t)$ sind dann einander gleich. Ist E_x nicht $\alpha(x)$-meßbar (L), so wird auch E_t nicht meßbar (L) sein, und umgekehrt; jedenfalls wird dann doch $\overline{m}_{\alpha(x)}(E_x) = \overline{m}(E_t)$ und $\underline{m}_{\alpha(x)}(E_x) = \underline{m}(E_t)$ sein, wenn $\overline{m}$ äußeres Maß und $\underline{m}$ inneres Maß andeutet.

Diese Eigenschaften der Abbildung machen es möglich, verschiedene Sätze aus der Theorie des $\alpha(x)$-Maßes (L) auf einfache Weise abzuleiten

---

[4]) Man siehe z. B. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Deuxième Éd. (1928), S. 278—281.

aus den analogen Sätzen in der Theorie des gewöhnlichen Lebesgueschen Maßes.

Satz I (der Vitalische Überdeckungssatz). *$\alpha(x)$ sei (monoton) nichtabnehmend im abgeschlossenen Intervall (a, b). Zu jedem Punkte x einer Teilmenge E_x von (a, b) gehöre eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $i_1(x), i_2(x), \ldots$, deren jedes den Punkt x enthält, deren Endpunkte mit zunehmendem n nach x konvergieren und für die somit*

$$\lim_{n \to \infty} m_{\alpha(x)} \{i_n(x)\} = m_{\alpha(x)}(x)$$

ist. Dann gibt es zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ unter den sämtlichen, der Menge E_x zugeordneten Intervallen (i) endlich viele getrennte Intervalle $j_1, j_2, \ldots, j_n$, so daß

(A) $$\bar{m}_{\alpha(x)} \{E_x - E_x \cdot (j_1 + j_2 + \ldots + j_n)\} < \varepsilon \cdot \bar{m}_{\alpha(x)}(E_x)$$

und

(B) $$\bar{m}_{\alpha(x)} \{E_x \cdot (j_1 + j_2 + \ldots + j_n)\} > (1 - \varepsilon) \cdot \bar{m}_{\alpha(x)}(E_x)$$

ist.

Beweis. Die Funktion $\alpha(x)$ bilde die Menge E_x auf die Menge E_t ab. Die zu E_x gehörenden, abzählbar vielen Unstetigkeitspunkte (x_n) von $\alpha(x)$ mögen dabei in die abgeschlossenen Intervalle (u_n) der t-Achse übergehen und die Menge K_x der zu E_x gehörenden Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ in die Menge K_t; weiter mögen die abgeschlossenen, zu den Punkten von E_x gehörenden Intervalle (i) der x-Achse sich abbilden in die abgeschlossenen Intervalle (v)[5] der t-Achse. Somit ist:

(1) $$E_x = \sum_{(n)} x_n + K_x$$

und

(2) $$E_t = \sum_{(n)} u_n + K_t.$$

Zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ läßt sich eine natürliche Zahl ν derartig bestimmen, daß

(3) $$m\left(\sum_{n=\nu}^{\infty} u_n\right) < \varepsilon \cdot m\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)$$

ist. Zu jedem u_n gehören abgeschlossene Intervalle $v_{n,k} \supseteq u_n$, Bilder von Intervallen (i), welche zu dem Bildpunkt x_n von u_n gehören, mit

$$\lim_{k \to \infty} m(v_{n,k}) = m(u_n).$$

Es gibt somit zu jedem $n < \nu$ ein Intervall V_n, gehörend zu der Folge der $v_{n,k}$ und derartig, daß die Intervalle (V_n) keine inneren Punkte gemein haben und

(4) $$m[(V_1 + V_2 + \ldots + V_{\nu-1}) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_{\nu-1})] < \tfrac{1}{2} \varepsilon \cdot \bar{m}(K_t)$$

[5]) Diejenigen Intervalle (i), in welchen $\alpha(x)$ konstant ist, werden in einen einzelnen Punkt abgebildet.

ist. Aus (2) und (3) folgt:

$$(5)\quad \overline{m}\{E_t\cdot(V_1+V_2+\ldots+V_{\nu-1})\}\geqq m\{(\sum_{n=1}^{\infty}u_n)\cdot(V_1+V_2+\ldots+V_{\nu-1})\}$$
$$\geqq m(u_1+u_2+\ldots+u_{\nu-1})>(1-\varepsilon)\cdot m(\sum_{n=1}^{\infty}u_n).$$

In jedem der endlich vielen, zu den $V_1, V_2, \ldots, V_{\nu-1}$ komplementären Teilintervallen (w_j) von (a,b) liegt eine (eventuell leere) Teilmenge T_j von K_t. Anwendung des Vitalischen Überdeckungssatzes (in seiner ursprünglichen Form) auf eine jede der Mengen $(\mathfrak{T}_j)$, welche aus der Menge T_j von gleichem Index hervorgehen durch Hinweglassung der Punkte von T_j, die Bildpunkte von Intervallen der x-Achse sind, in welchen $\alpha(x)$ konstant ist, zeigt daß es möglich ist, endlich viele, abgeschlossene, einander und den $V_1, V_2, \ldots, V_{\nu-1}$ fremde Intervalle $V_1^*, V_2^*, \ldots, V_\mu^*$ zu finden, gehörend zu den (v) und mit

$$(6)\quad \overline{m}\{K_t\cdot C(V_1+\ldots+V_{\nu-1})\cdot(V_1^*+\ldots+V_\mu^*)\}$$
$$>(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\cdot\overline{m}\{K_t\cdot C(V_1+\ldots+V_{\nu-1})\}.$$

Aus (2), (6) und (4) folgt:

$$(7)\quad \overline{m}\{E_t\cdot(V_1^*+\ldots+V_\mu^*)\}\geqq\overline{m}\{K_t\cdot C(V_1+\ldots+V_{\nu-1})$$
$$\cdot(V_1^*+\ldots+V_\mu^*)\}>(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\cdot\overline{m}\{K_t\cdot C(V_1+\ldots+V_{\nu-1})\}$$
$$\geqq(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\cdot[\overline{m}\{K_t\cdot C(u_1+\ldots+u_{\nu-1})\}-m\{(V_1-u_1)$$
$$+\ldots+(V_{\nu-1}-u_{\nu-1})\}]>(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\cdot\{\overline{m}(K_t)-\tfrac{1}{2}\varepsilon\cdot\overline{m}(K_t)\}$$
$$>(1-\varepsilon)\cdot\overline{m}(K_t).$$

Nach (5), (7) und (2) wird

$$\overline{m}\{E_t\cdot(V_1+\ldots+V_{\nu-1}+V_1^*+\ldots+V_\mu^*)\}$$
$$>(1-\varepsilon)\cdot[m(\sum_{n=1}^{\infty}u_n)+\overline{m}(K_t)]=(1-\varepsilon)\cdot\overline{m}(E_t)$$

sein. Übergang von t- zur x-Achse führt zu der Ungleichung (B) unter den im Satze enthaltenen Bedingungen; aus (B) läßt sich leicht (A) ableiten.

§ 3. Definition 1. Die endlichwertige Funktion $F(x)$ sei definiert in den Punkten einer Teilmenge P_x des abgeschlossenen Intervalls (a,b); $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation in (a,b). Wenn jede Umgebung eines Punktes ξ von P_x Punkte (x) von P_x mit $\alpha(x)\neq\alpha(\xi)$ und $V(x)>V(\xi)$[6]) enthält, wobei $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a,x) darstellt und wenn dann in ξ

$$(8)\quad \lim_{\substack{V(x)\to V(\xi+0)\ [7])\\ V(x)>V(\xi)}}\frac{F(x)-F(\xi)}{\alpha(x)-\alpha(\xi)}\quad\text{(endlich oder bestimmt unendlich)}$$

[6]) Oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit $\alpha(x)\neq\alpha(\xi)$ und $x>\xi$.

[7]) Oder $x\to\xi$ und $x>\xi$.

existiert, wobei nur derartige Punkte (x) von P_x betrachtet werden, in denen $\alpha(x) \neq \alpha(\xi)$ ist, so definiert dieser Grenzwert *die rechte* $\alpha(x)$*-Ableitung,* $D^{(P_x)}_{\alpha(x),\,r} F(\xi)$, *von* $F(x)$ *in* ξ *in bezug auf* P_x. Auch wenn es eine Umgebung U eines zu P_x gehörenden, rechtsseitigen Verdichtungspunktes ξ von P_x gibt, derartig, daß: 1. jede Umgebung $T \subset U$ Punkte von P_x enthält mit $V(x) > V(\xi)$, während in jedem Punkte x von $T \cdot P_x$ mit $V(x) > V(\xi)$ gleichzeitig $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ und $F(x) = F(\xi)$ ist, oder: 2. in keinem ihrer zu P_x gehörenden Punkte $V(x) > V(\xi)$ ist, aber in jedem Punkte x von $U \cdot P_x$ mit $V(x) = V(\xi)$ und $x > \xi$ auch $F(x) = F(\xi)$ ist[8]), betrachten wir $D^{(P_x)}_{\alpha(x),\,r} F(\xi)$ als existierend. Gibt es dann eine linke $\alpha(x)$-Ableitung gleich einem Grenzwerte wie (8), wobei jedoch $V(x) < V(\xi)$ sei und $V(x)$ nach $V(\xi - 0)$ konvergiere, so nehmen wir den Wert der rechten $\alpha(x)$-Ableitung gleich dem der linken; sonst sei der Wert von $D^{(P_x)}_{\alpha(x),\,r} F(\xi)$ unbestimmt. — *Die linke* $\alpha(x)$*-Ableitung,* $D^{(P_x)}_{\alpha(x),\,l} F(\xi)$, *von* $F(x)$ *in bezug auf* P_x in einem zu P_x gehörenden, linksseitigen Verdichtungspunkt ξ von P_x und ihr Wert sind in analoger Weise zu definieren.

Definition 2. Zur Einführung *der* $\alpha(x)$*-Ableitung,* $D^{(P_x)}_{\alpha(x)} F(\xi)$, *von* $F(x)$ *in einem Punkte* ξ *von* P_x *und in bezug auf* P_x betrachten wir drei Fälle: 1. wenn ξ mit a oder b zusammenfällt und in a bzw. b die rechte bzw. die linke $\alpha(x)$-Ableitung existiert, soll die $\alpha(x)$-Ableitung in ξ existieren und denselben (bestimmten oder unbestimmten) Wert haben; 2. wenn ξ auf beiden Seiten Verdichtungspunkt von P_x ist und entweder $V(\xi) = V(\xi \pm 0)$ oder $V(\xi) \neq V(\xi - 0)$ und $\neq V(\xi + 0)$ ist[9]) und wenn dabei die linke und die rechte $\alpha(x)$-Ableitung existieren und den gleichen Wert haben, sei $D^{(P_x)}_{\alpha(x)} F(\xi)$ gleich dem gemeinsamen Werte; 3. wenn nur einer der beiden Grenzwerte $V(\xi + 0)$, $V(\xi - 0)$ von $V(\xi)$ verschieden ist und die zugehörige (rechte bzw. linke) $\alpha(x)$-Ableitung existiert, sei $D^{(P_x)}_{\alpha(x)} F(\xi)$ gleich dieser.

Definition 3. $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b). Zu jeder $\alpha(x)$-meßbaren Teilmenge E_x von (a, b) läßt sich eine Funktion $G(x)$ definieren, welche für jeden Punkt ξ von (a, b) gleich dem $\alpha(x)$-Maße (L) derjenigen Teilmenge T_ξ von E_x ist, die zum abgeschlossenen Intervall (a, ξ) gehört; bei der Bestimmung des $\alpha(x)$-Maßes von T_ξ betrachte man in jedem Punkte $x' > \xi$ den (in dieser

[8]) Man kann auch fordern: es gibt eine Umgebung von ξ, derartig, daß für alle zu P_x gehörenden Punkte $(x) > \xi$ in ihr sowohl $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ wie auch $F(x) = F(\xi)$ ist.

[9]) Oder: wenn $\alpha(x)$ in ξ entweder stetig oder auf beiden Seiten unstetig ist.

Weise im allgemeinen abgeänderten) Wert von $\alpha(x')$ gleich $\alpha(\xi)$. Nun soll die Menge E_x in einem Punkte x von (a,b) *die* $\alpha(x)$*-Dichte* 1 haben, wenn die Funktion $G(x)$ in diesem Punkte eine $\alpha(x)$-Ableitung $= 1$ hat [in bezug auf (a,b)].

Satz II (Übertragung eines Lebesgueschen Satzes). *$\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a,b); für $a \leqq x \leqq b$ sei $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a,x). Dann hat jede in (a,b) enthaltene Menge E_x in allen ihren Punkten, mit Ausnahme derjenigen einer Teilmenge vom $V(x)$-Maße* (L) *Null, eine $\alpha(x)$-Dichte* 1.

Beweis. Gebraucht man $V(x)$ statt $\alpha(x)$ bei der im Anfang des vorigen Beweises betrachteten Abbildung, so bleiben dabei die Zerlegungen (1) und (2) gültig.

Aus der Definition 3 folgt, daß in den Punkten, welche zu $\sum_{(n)} x_n$ gehören, die $\alpha(x)$-Dichte von E_x gleich 1 ist.

K_t hat in fast allen ihren Punkten eine Dichte 1 (im Sinne von Lebesgue). Daraus folgt, daß K_x in ihren Punkten eine $V(x)$-Dichte 1 hat, mit Ausnahme der Punkte einer Teilmenge T_x vom $V(x)$-Maße (L) Null. In den Punkten von $K_x - T_x$ wird somit auch E_x eine $V(x)$-Dichte 1 haben.

Aus der Theorie der Funktionen von beschränkter Variation geht hervor, daß in jedem Stetigkeitspunkte von $V(x)$, ausgenommen diejenigen einer Menge M_x vom $V(x)$-Maße (L) Null, die Ableitung $D_{V(x)}\alpha(x)$ [in bezug auf (a,b)] existiert und entweder $+1$ oder -1 ist[10]). Es sei ξ ein derartiger, zu $K_x - T_x$ gehörender Punkt mit $D_{V(x)}\alpha(\xi) = +1$ und mit der Eigenschaft, daß es in jeder Umgebung sowohl Punkte (x) mit $V(x) < V(\xi)$ wie auch Punkte (x') mit $V(x') > V(\xi)$ gibt. Aus $D_{V(x)}\alpha(\xi) = +1$ folgt, daß

$$\lim_{V(x) \to V(\xi)} \frac{N(x) - N(\xi)}{P(x) - P(\xi)} = 0 \tag{9}$$

ist; hierbei ist $P(x)$ die positive und $N(x)$ die negative Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a,x). Da in ξ die $V(x)$-Dichte von E_x existiert und gleich 1 ist, wird, wenn $G_P(x)$, $G_N(x)$, $G_\alpha(x)$ und $G_V(x)$ das $P(x)$-, bzw. $N(x)$-, bzw. $\alpha(x)$-, bzw. $V(x)$-Maß (L) der im abgeschlossenen Intervall (a,x) liegenden Teilmenge von E_x darstellen (siehe Definition 3),

$$\begin{aligned} &\lim_{V(x) \to V(\xi)} \frac{G_V(x) - G_V(\xi)}{V(x) - V(\xi)} \\ &= \lim_{V(x) \to V(\xi)} \frac{[G_P(x) - G_P(\xi)] + [G_N(x) - G_N(\xi)]}{[P(x) - P(\xi)] + [N(x) - N(\xi)]} = 1 \end{aligned} \tag{10}$$

[10]) Siehe Lebesgue, loc. cit.[4]), S. 259, 260.

sein. Aus (9) und (10) läßt sich nun leicht ableiten, daß auch

$$\lim_{V(x)\to V(\xi)} \frac{G_P(x)-G_P(\xi)}{P(x)-P(\xi)} = 1$$

ist. Hieraus und aus (9) folgt wieder, daß

$$\lim_{V(x)\to V(\xi)} \frac{G_\alpha(x)-G_\alpha(\xi)}{\alpha(x)-\alpha(\xi)} = \lim_{V(x)\to V(\xi)} \frac{G_P(x)-G_P(\xi)}{\alpha(x)-\alpha(\xi)} - \lim_{V(x)\to V(\xi)} \frac{G_N(x)-G_N(\xi)}{\alpha(x)-\alpha(\xi)} = 1-0=1$$

sein wird; somit hat E_x in ξ eine $\alpha(x)$-Dichte 1. Auch wenn $D_{V(x)}\alpha(\xi) = -1$ ist, läßt sich das in analoger Weise zeigen. Ausgenommen in den Punkten einer Menge vom $V(x)$-Maße (L) Null, hat E_x in jedem Punkte von K_x die $\alpha(x)$-Dichte 1. Sie hat diese Dichte auch in den Punkten von $\sum_{(n)} x_n$. Damit ist der Satz bewiesen[11]).

§ 4. Definition 4. $F(x)$, $\alpha(x)$, $V(x)$ und P_x mögen dieselbe Bedeutung haben wie in Definition 1. Jede Umgebung eines Punktes ξ von P_x enthalte Punkte (x) von P_x mit $\alpha(x) \neq \alpha(\xi)$ und $V(x) > V(\xi)$[6]). Dann definiert

(11) $$\liminf_{\substack{V(x)\to V(\xi+0)[7]) \\ V(x)>V(\xi)}} \frac{F(x)-F(\xi)}{\alpha(x)-\alpha(\xi)} \text{ (endlich oder unendlich),}$$

wobei nur derartige Punkte (x) von P_x betrachtet werden, in denen $\alpha(x) \neq \alpha(\xi)$ ist, *die untere rechte* $\alpha(x)$*-Derivierte*, $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),r} F(\xi)$, *von* $F(x)$ *in* ξ *in bezug auf* P_x. Auch wenn es eine Umgebung U eines zu P_x gehörenden, rechtsseitigen Verdichtungspunktes ξ von P_x gibt, derartig, daß: 1. jede Umgebung $T \subset U$ Punkte von P_x enthält mit $V(x) > V(\xi)$, während in jedem Punkte x von $T \cdot P_x$ mit $V(x) > V(\xi)$ gleichzeitig $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ und $F(x) = F(\xi)$ ist, oder: 2. in keinem ihrer zu P_x gehörenden Punkte $V(x) > V(\xi)$ ist, aber in jedem Punkte x von $U \cdot P_x$ mit $V(x) = V(\xi)$ und $x > \xi$ auch $F(x) = F(\xi)$ ist[8]), betrachten wir $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),r} F(\xi)$ als existierend. Gibt es dann eine untere linke $\alpha(x)$-Derivierte gleich einem Grenzwerte wie (11), jedoch mit $V(x) < V(\xi)$ und $V(x)$ nach $V(\xi-0)$ konvergierend, so nehmen wir $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),r} F(\xi)$ gleich $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),l} F(\xi)$; sonst sei der Wert von $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),r} F(\xi)$ unbestimmt. — *Die linke untere* $\alpha(x)$-

---

[11]) Der eben bewiesene Satz läßt sich auch betrachten als eine Folgerung aus dem Satze über die $\alpha(x)$-Differentiation des unbestimmten Lebesgue-Stieltjesschen Integrals $\int_a^x f(x)\,d\alpha(x)$; siehe Lebesgue, loc. cit. [4]), S. 301. Wir bemerken, daß im zitierten Satze die $\alpha(x)$-Ableitung die gleiche Bedeutung haben muß wie oben im Texte (Definition 2); es läßt sich leicht, mittels einem Beispiel, zeigen, daß der Satz bei der von Lebesgue gegebenen Definition der $\alpha(x)$-Ableitung nicht richtig ist.

Derivierte, $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),\,l} F(\xi)$, *von* $F(x)$ *in bezug auf* P_x in einem zu P_x gehörenden, linksseitigen Verdichtungspunkt ξ von P_x und ihr Wert lassen sich in analoger Weise definieren.

Definition 5. Zur Einführung *der unteren* $\alpha(x)$*-Derivierten,* $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x)} F(\xi)$, *von* $F(x)$ *in einem Punkte* ξ *von* P_x *und in bezug auf* P_x betrachten wir drei Fälle: 1. wenn ξ mit a oder b zusammenfällt, soll $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x)} F(\xi)$ gleich $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),\,r} F(a)$ bzw. gleich $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),\,l} F(b)$ sein, falls diese existieren; 2. wenn $\xi \,\varepsilon\, P_x$ auf beiden Seiten Verdichtungspunkt von P_x ist und entweder $V(\xi) = V(\xi \pm 0)$ oder $V(\xi) \neq V(\xi - 0)$ und $\neq V(\xi + 0)$ ist[9]), wird $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x)} F(\xi)$ gleich dem kleineren der Werte von $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),\,l} F(\xi)$ und $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),\,r} F(\xi)$ gesetzt, falls beide existieren und bestimmt sind; haben die linken und rechten unteren Derivierten unbestimmte Werte, so wird $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x)} F(\xi)$ zwar als existierend, ihr Wert jedoch als unbestimmt betrachtet; 3. wenn $\xi \,\varepsilon\, P_x$ auf beiden Seiten Verdichtungspunkt von P_x ist und nur einer der beiden Grenzwerte $V(\xi + 0)$, $V(\xi - 0)$ von $V(\xi)$ verschieden ist, sei $\underline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x)} F(\xi)$ gleich der zugehörigen (rechten bzw. linken) unteren $\alpha(x)$-Ableitung.

Nach dem Vorhergehenden liegt es auf der Hand, wie man *die oberen* $\alpha(x)$*-Derivierten,* $\overline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),\,l} F(\xi)$, $\overline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x),\,r} F(\xi)$ und $\overline{D}^{(P_x)}_{\alpha(x)} F(\xi)$ einzuführen hat.

Satz III (Übertragung eines Satzes von Denjoy). $F(x)$ *sei eine endlichwertige Funktion, definiert in den Punkten einer Menge* E_x, *welche im abgeschlossenen Intervall* (a, b) *enthalten ist;* $\alpha(x)$ *sei von beschränkter Variation in* (a, b). *In jedem linksseitigen* [*rechtsseitigen*] *Unstetigkeitspunkt* ξ *von* $\alpha(x)$, *welcher zu* E_x *gehört und linksseitiger* [*rechtsseitiger*] *Verdichtungspunkt von* E_x *ist, besitze* $F(x)$ *entweder eine linksseitige* [*rechtsseitige*] *Unstetigkeit erster Art oder sie sei daselbst linksseitig* [*rechtsseitig*] *stetig; die zugehörigen Grenzwerte* $\dfrac{F(\xi - 0) - F(\xi)}{\alpha(\xi - 0) - \alpha(\xi)}$, $\dfrac{F(\xi + 0) - F(\xi)}{\alpha(\xi + 0) - \alpha(\xi)}$ *sollen immer endlich und in einem beiderseitigen Unstetigkeits- und Verdichtungspunkt auch einander gleich sein.*

Dann sind, wenn man von einer Teilmenge vom $V(x)$*-Maße* (L) *Null absieht, in den verschiedenen, zu* E_x *gehörenden, beiderseitigen Verdichtungspunkten von* E_x *nur noch die folgenden vier Fälle möglich:*

1. $D_{\alpha(x)} F$ *existiert und ist endlich*[12]);
2. $\overline{D}_{\alpha(x),\,r} F = \overline{D}_{\alpha(x),\,l} F = +\infty$, $\underline{D}_{\alpha(x),\,r} F = \underline{D}_{\alpha(x),\,l} F = -\infty$;
3. $\overline{D}_{\alpha(x),\,r} F = +\infty$, $\underline{D}_{\alpha(x),\,l} F = -\infty$, $\underline{D}_{\alpha(x),\,r} F = \overline{D}_{\alpha(x),\,l} F =$ *endlich;*
4. $\underline{D}_{\alpha(x),\,r} F = -\infty$, $\overline{D}_{\alpha(x),\,l} F = +\infty$, $\overline{D}_{\alpha(x),\,r} F = \underline{D}_{\alpha(x),\,l} F =$ *endlich.*

[12]) Eine unbestimmte $\alpha(x)$-Ableitung können wir dabei z. B. als endlich betrachten.

Die Derivation bezieht sich dabei auf alle Werte von $F(x)$ *auf* E_x[13]).

Beweis. Es genügt den Satz zu beweisen für den Fall einer (monoton) nicht-abnehmenden Funktion $\alpha(x)$[10]).

E_x wird dann durch $t = \alpha(x)$ abgebildet auf eine Menge E_t der t-Achse, wobei man wieder die Zerlegungen (1) und (2) hat.

Die Definitionen 1 und 2 zeigen, daß $F(x)$ in den Punkten (x_n) eine endliche $\alpha(x)$-Ableitung hat.

Betrachtet man die endlichwertige, auf E_t definierte und aus $F(x)$ hervorgegangene Funktion $f(t)$[14]), so sind, nach dem Denjoyschen Satze (für endlichwertige Funktionen)[15]), in fast allen Punkten von K_t nur noch die folgenden vier Fälle möglich:

1. $Df(t)$ existiert und ist endlich;
2. $\overline{D}_r f = \overline{D}_l f = +\infty$, $\underline{D}_r f = \underline{D}_l f = -\infty$;
3. $\overline{D}_r f = +\infty$, $\underline{D}_l f = -\infty$, $\underline{D}_r f = \overline{D}_l f =$ endlich;
4. $\underline{D}_r f = -\infty$, $\overline{D}_l f = +\infty$, $\overline{D}_r f = \underline{D}_l f =$ endlich;

bei der Bildung der Ableitungen und Derivierten sind alle Werte von $f(t)$ auf E_t in Betracht gezogen. Daraus und aus Definition 4 folgt nun,

---

[13]) Läßt man die Bedingungen über die Unstetigkeitspunkte fort, so kann man, wenn N_x die Menge der zu E_x gehörenden Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ ist, dennoch behaupten, daß einer und nur einer der vier angegebenen Fälle möglich ist in den Punkten einer Menge $M_x \subseteq N_x$ mit $m_{V(x)}(N_x - M_x) = 0$. — *Ist in Satz* III $F(x)$ *außerdem monoton auf* E_x, *so kann man sich, in der Behauptung des Satzes, sogar beschränken auf den Fall* 1.

[14]) In den Bildintervallen $[\alpha(x_n - 0), \alpha(x_n + 0)]$ der zu E_x gehörenden Unstetigkeitspunkte (x_n) ist $f(t)$ nur definiert für den Punkt $\alpha(x_n)$ und hat dort den Wert $F(x_n)$. In denjenigen Punkten der t-Achse, welche Bildpunkte sind von Intervallen der x-Achse, in welchen $\alpha(x)$ konstant ist, wird es möglich sein, daß $f(t)$ mehrdeutig ist.

[15]) Siehe S. Saks, Fund. Math. **5** (1924), S. 98—104 oder J. Ridder, C. R. Soc. Sc. de Varsovie **23** (1930), S. 1—6. Es wird hier die folgende, etwas verallgemeinerte Form des Satzes angewandt: „Wenn $f(x)$ definiert ist für die Punkte einer Menge E der x-Achse, in welchen sie endlich ist, jedoch nicht überall eindeutig zu sein braucht, so werden in den Eindeutigkeitspunkten, mit Ausnahme derjenigen einer Nullmenge, nur noch die folgenden vier Fälle möglich sein:

1. $Df(x)$ oder $f'(x)$ existiert und ist endlich;
2. $\overline{D}_r f = \overline{D}_l f = +\infty$, $\underline{D}_r f = \underline{D}_l f = -\infty$;
3. $\overline{D}_r f = +\infty$, $\underline{D}_l f = -\infty$, $\underline{D}_r f = \overline{D}_l f =$ endlich;
4. $\underline{D}_r f = -\infty$, $\overline{D}_l f = +\infty$, $\overline{D}_r f = \underline{D}_l f =$ endlich;

es werden bei der Bildung der Ableitungen und Derivierten alle Funktionswerte in den Punkten von E in Betracht gezogen." Wir kontrollierten, daß das letztzitierte Beweisverfahren sich unmittelbar auf diesen Fall anwenden läßt.

daß in den Punkten von K_x, mit Ausnahme derjenigen einer Teilmenge vom $\alpha(x)$-Maße (L) Null, nur die vier im Satze enthaltenen Fälle möglich sind.

Da $E_x = \sum_{(n)} x_n + K_x$, ist der Satz bewiesen[16]).

Zweites Kapitel.

Das Perron-Stieltjessche- und das spezielle Denjoy-Stieltjessche Integral.

§ 5. Definition A. $f(x)$ sei definiert für die Punkte des abgeschlossenen Intervalls (a, b); $\alpha(x)$ sei (*monoton*) *nicht-abnehmend* in (a, b). Dann heißt eine endliche Funktion $\psi_\alpha(x)$ *eine zu* $f(x)$ *im Intervall* (a, b)

---

[16]) Nach derselben Methode läßt sich zeigen: *Wenn für* $a \leqq x \leqq b$ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *eine konvergente Reihe (monotoner) nicht-abnehmender Funktionen ist und wenn* $\alpha(x)$ *von beschränkter Variation ist in* (a, b), *wobei ihre Totalvariation über* (a, x) $V(x)$ *sei, dann wird in allen Stetigkeitspunkten von* $\alpha(x)$, *diejenigen einer Menge vom* $V(x)$*-Maße* (L) *Null ausgenommen,*

$$D_{\alpha(x)} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{\alpha(x)} f_n(x)$$

sein. Dies folgt aus einem bekannten Fubinischen Satze [siehe z. B. Saks, Théorie de l'intégrale (Varsovie 1933), S. 53 oder Hobson, Theory of functions II (1926), S. 335], welchen man erhält, wenn in obiger Behauptung $\alpha(x) \equiv x$ genommen wird. — Dieser Satz liegt ebenso wie die Sätze I—III des Textes in gleicher Richtung wie die von den Riemann-Stieltjesschen und den Lebesgue-Stieltjesschen Integralen gebildeten Verallgemeinerungen der R. und L. Integrale und wie die hier zu behandelnden Verallgemeinerungen der Perron- und Denjoy-Integrale. Dasselbe gilt von der folgenden Verallgemeinerung eines Tonellischen Satzes [siehe z. B. Saks, Théorie de l'int., S. 76]: *Die Länge* S (a, b) *einer rektifizierbaren Kurve* C, *gegeben durch die stetigen Funktionen* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, *mit* $a \leqq t \leqq b$ [wobei, bekanntlich, diese Funktionen in (a, b) von beschränkter Variation sein müssen], *wird gegeben durch das Lebesgue-Stieltjessche Integral*

$$\int_a^b \sqrt{\left\{\frac{d\,x(t)}{d\,\alpha(t)}\right\}^2 + \left\{\frac{d\,y(t)}{d\,\alpha(t)}\right\}^2 + \left\{\frac{d\,z(t)}{d\,\alpha(t)}\right\}^2} \cdot d\,\alpha(t),$$

wenn $\alpha(t)$ (*monoton*) *nicht-abnehmend ist in* (a, b) *und* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *in* (a, b) *totalstetig sind in bezug auf* $\alpha(t)$. [Es ist somit möglich die Summe der Totalvariationen von $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ über (a, t) als Funktion $\alpha(t)$ zu wählen]. Zum Beweise vergleiche man Saks, Théorie de l'int., S. 59, 60; daneben Lebesgue, loc. cit.[4]), S. 288 und 301 (183). Wir bemerken noch, *daß für* $\alpha(t) \equiv S(a, t)$, was offenbar erlaubt ist, *in allen Punkten von* (a, b), *diejenigen einer Menge vom* $S(a, t)$*-Maße* (L) *Null ausgenommen, gilt:*

$$1 = \left\{\frac{d\,x(t)}{d\,S(a, t)}\right\}^2 + \left\{\frac{d\,y(t)}{d\,S(a, t)}\right\}^2 + \left\{\frac{d\,z(t)}{d\,S(a, t)}\right\}^2;$$

ein auf dasselbe hinauskommendes Resultat wurde in anderer Weise gefunden von Lebesgue, loc. cit.[4]), S. 201.

adjungierte $\alpha(x)$-Majorante, wenn: 1. $\psi_\alpha(a) = 0$ ist; 2. $\psi_\alpha(x)$ in (a, b) nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten erster Art, und zwar nur in den linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, haben kann; 3. in jedem Punkte x von (a, b) $\psi_\alpha(x-0)$, $\psi_\alpha(x+0)$ endlich sind, während in einem beiderseitigen Unstetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$ $\frac{\psi_\alpha(\xi-0)-\psi_\alpha(\xi)}{\alpha(\xi-0)-\alpha(\xi)} = \frac{\psi_\alpha(\xi+0)-\psi_\alpha(\xi)}{\alpha(\xi+0)-\alpha(\xi)}$ ist; 4. die untere $\alpha(x)$-Derivierte von $\psi_\alpha(x)$ (in bezug auf (a, b)) in allen Punkten von (a, b), eine (eventuell leere) abzählbare Menge P von Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ ausgenommen, existiert, $\neq -\infty$ und $\geqq f(x)$ ist[17]).

Definition B. $\varphi_\alpha(x)$ ist *eine zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte $\alpha(x)$-Minorante*, wenn: 1. $\varphi_\alpha(a) = 0$ ist; 2. $\varphi_\alpha(x)$ in (a, b) nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten erster Art, und zwar nur in den linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, haben kann; 3. in jedem Punkte x von (a, b) $\varphi_\alpha(x-0)$, $\varphi_\alpha(x+0)$ endlich sind, während in einem beiderseitigen Unstetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$

$$\frac{\varphi_\alpha(\xi-0)-\varphi_\alpha(\xi)}{\alpha(\xi-0)-\alpha(\xi)} = \frac{\varphi_\alpha(\xi+0)-\varphi_\alpha(\xi)}{\alpha(\xi+0)-\alpha(\xi)}$$

ist; 4. die obere $\alpha(x)$-Derivierte von $\varphi_\alpha(x)$ (in bezug auf (a, b)) in allen Punkten von (a, b), eine (eventuell leere) abzählbare Menge Q von Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ ausgenommen, existiert, $\neq +\infty$ und $\leqq f(x)$ ist[17]).

Satz IV. *Wenn $\alpha(x)$ in (a, b) (monoton) nicht-abnehmend ist, wird auch die Differenz einer jeden $\alpha(x)$-Majorante $\psi_\alpha(x)$ und einer jeden $\alpha(x)$-Minorante $\varphi_\alpha(x)$, beide adjungiert in (a, b) zu einer daselbst definierten Funktion $f(x)$, nicht-abnehmend sein in (a, b).*

Erster (unmittelbarer) Beweis. Wenn a nicht zu den Mengen P und Q (siehe die Definitionen A und B) gehört, hat $\omega_\alpha(x) \equiv \psi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x)$ in a eine rechte untere α-Derivierte $\geqq 0$ oder a ist linker Endpunkt eines abgeschlossenen Intervalls, in dem $\alpha(x)$ konstant ist (im Fall, daß $\underline{D}_{\alpha(x),\,r}\,\omega_\alpha(x)$ in a unbestimmt ist). In beiden Fällen wird es ein Intervall (a, ξ) geben, so daß bei willkürlich gewähltem positiven ε und $a < x \leqq \xi$:

$$\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(a) \geqq -\varepsilon\,\{\alpha(x) - \alpha(a)\} \tag{12}$$

ist. Diejenigen Punkte (x) mit $a \leqq x < b$, in welchen $\alpha(x)$ nur linksseitig unstetig ist oder welche zu $P + Q$ gehören, kann man ordnen in

[17]) In einem Unbestimmtheitspunkte von $\underline{D}_\alpha\,\psi_\alpha(x)$ oder $\overline{D}_\alpha\,\varphi_\alpha(x)$ betrachten wir die Bedingungen aus Definition A, 3. bzw. Definition B, 3. als erfüllt.

eine endliche oder abzählbar unendliche Folge $\{x_n\}$. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ eine nach ε konvergierende Reihe von positiven Zahlen ist, so läßt sich zu jedem Punkt x_n der Folge ein Intervall $(x_n < x \leqq \xi_n)$ bestimmen, derartig, daß

$$\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(x_n) \geqq -\eta_n - \varepsilon \cdot \{\alpha(x) - \alpha(x_n)\} \tag{13}$$

ist. Zu jedem weiteren inneren Punkt x_0 von (a, b) gibt es ein Intervall $(x_0 < x \leqq \xi_0)$ mit

$$\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(x_0) \geqq -\varepsilon \cdot \{\alpha(x) - \alpha(x_0)\}; \tag{14}$$

dies folgt daraus, daß in jedem derartigen Punkte $\underline{D}_{\alpha(x),\, r}\, \omega_\alpha(x_0)$ existiert und entweder $\geqq 0$ oder unbestimmt ist.

Die obere Schranke der inneren Punkte (ξ) von (a, b) mit der Eigenschaft, daß für jedes x zwischen a und ξ:

$$\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(a) \geqq -\varepsilon \cdot \{\alpha(x) - \alpha(a)\} - \sum_a^x \eta_n \tag{15}$$

ist, wobei in der letzten Summe nur diejenigen η_n-Werte vorkommen, für deren jeden der zugehörige linksseitige Unstetigkeitspunkt x_n von $\alpha(x)$ den Bedingungen $a \leqq x_n < x$ genügt, muß mit b zusammenfallen. Denn aus (12) oder (13) folgt, daß die Menge der ξ-Punkte jedenfalls nicht leer ist; wäre ihre obere Schranke $b' < b$, so folgte aus (15):

$$\omega_\alpha(b' - 0) - \omega_\alpha(a) \geqq -\varepsilon \cdot \{\alpha(b' - 0) - \alpha(a)\} - \sum_a^{b'} \eta_n,$$

und dadurch auch, da $D_{\alpha(x),\, l}\, \omega_\alpha(b')$ existiert und $\geqq 0$ ist, oder $\omega_\alpha(x)$ und $\alpha(x)$ linksseitig stetig sind in b', oder beides gilt, daß

$$\omega_\alpha(b') - \omega_\alpha(a) \geqq -\varepsilon \cdot \{\alpha(b') - \alpha(a)\} - \sum_a^{b'} \eta_n$$

wäre. Sowohl im Falle, daß b' zu den Punkten (x_n) gehörte wie im entgegengesetzten Falle, müßte es, nach (13) oder (14), ein Intervall $(b', b' + h)$ geben, so daß für $b' < x \leqq b' + h$:

$$\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(b') \geqq -\varepsilon \cdot \{\alpha(x) - \alpha(b')\} - \sum_{b'}^x \eta_n$$

wäre. Man hätte somit:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(a) &= \{\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(b')\} + \{\omega_\alpha(b') - \omega_\alpha(a)\} \\ &\geqq -\varepsilon \cdot \{\alpha(x) - \alpha(a)\} - \sum_a^x \eta_n \end{aligned}$$

und b' wäre nicht die obere Schranke gewesen.

Also muß:

$$\omega_\alpha(b - 0) - \omega_\alpha(a) \geqq -\varepsilon \cdot \{\alpha(b - 0) - \alpha(a)\} - \sum_{(n)} \eta_n$$

und dadurch weiter

$$\omega_\alpha(b) - \omega_\alpha(a) \geqq -\varepsilon \cdot \{\alpha(b) - \alpha(a)\} - \varepsilon$$

sein. Da ε willkürlich ist und dasselbe Beweisverfahren für jedes Teilintervall von (a, b) angewandt werden kann, ist $\omega_\alpha(x)$ nicht-abnehmend in (a, b).

Zweiter Beweis durch Zurückführung auf das gewöhnliche P-Integral. Das abgeschlossene Intervall (a, b) wird durch $t = \alpha(x)$ abgebildet auf das abgeschlossene Intervall $[\alpha(a), \alpha(b)]$ der t-Achse, wobei sich jeder Unstetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$ abbildet in die Punkte des abgeschlossenen Intervalls $[\alpha(\xi - 0), \alpha(\xi + 0)]$. Aus der Funktion $f(x)$ geht dabei eine Funktion $F(t)$ hervor, welcher wir in $[\alpha(\xi - 0), \alpha(\xi + 0)]$ den Wert $f(\xi)$ beilegen; $F(t)$ kann nur in abzählbar vielen Punkten mehrdeutig sein. Jede Majorante $\psi_\alpha(x)$ geht in eine Funktion $\psi(t)$ über, welche in allen Punkten von $[\alpha(a), \alpha(b)]$ definiert und eindeutig ist, wenn ihr in jedem Intervall $[\alpha(\xi - 0), \alpha(\xi + 0)]$ derartige Werte gegeben werden, daß sie sich dort linear ändert von $\psi_\alpha(\xi - 0)$ bis zu $\psi_\alpha(\xi + 0)$. Außerdem ist $\psi(t)$ stetig, während in jedem Punkte von $[\alpha(a), \alpha(b)]$, mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlich vieler, $\underline{D}\,\psi(t) \neq -\infty$ und $\geqq F(t)$ ist. $\psi(t)$ ist somit eine Majorante von $F(t)$. Da sich $\varphi_\alpha(x)$ in analoger Weise überführen läßt in eine Minorante $\varphi(t)$ von $F(t)$ und aus der Theorie des gewöhnlichen Perronschen Integrals bekannt ist, daß $\psi(t) - \varphi(t)$ nicht-abnehmend ist in $[\alpha(a), \alpha(b)]$[18]), hat somit $\psi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x)$ die gleiche Eigenschaft in (a, b)[19]).

Definition 6. $\alpha(x)$ sei *nicht-abnehmend* in (a, b). Wenn die Funktion $f(x)$ in (a, b) $\alpha(x)$-Majoranten $\{\psi_\alpha(x)\}$ und $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi_\alpha(x)\}$ hat, setze man den Wert des *unbestimmten oberen* $\alpha(x)$*-Integrals* $\Psi_\alpha(x)$ in einem willkürlichen Punkte x von (a, b) gleich der unteren Schranke aller ψ_α-Werte in diesem Punkte, und den Wert des *unbestimmten unteren* $\alpha(x)$*-Integrals* $\Phi_\alpha(x)$ in x gleich der oberen Schranke aller φ_α-Werte in x. Wir schreiben:

$$\Psi_\alpha(x) \equiv \int_a^{-x} (P) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin inf } \psi_\alpha(x)$$

und

$$\Phi_\alpha(x) \equiv \int_{-a}^{x} (P) f(x)\, d\alpha(x) = \text{fin sup } \varphi_\alpha(x).$$

---

[18]) Siehe z. B. Saks, l. c. [16]), S. 127 (Th. 1) oder Ridder, l. c. [3]), S. 256, 257 (§ 9) und 254 (Satz XX).

[19]) Auch sehr viele weitere Sätze lassen sich unmittelbar und mittelbar durch Zurückführung auf gewöhnliche P-Integrale beweisen. Wenn man die gewöhnlichen Perron-Denjoyschen Integrationstheorien nicht als bekannt annehmen will, sondern sie als Spezialfälle aus den hier behandelten Theorien abzuleiten wünscht ($\alpha(x) \equiv x$), muß man alle Beweise unmittelbar führen. Im entgegengesetzten Falle wird man meistens den mittelbaren Beweis als den kürzeren den Vorzug geben.

Wenn in (a, b) $\Psi_\alpha(x) = \Phi_\alpha(x)$ ist, so definiert ihr gemeinsamer Wert *das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral* $S_\alpha(x)$ von $f(x)$ in (a, b).

Es wird immer $\Psi_\alpha(x) \geqq \Phi_\alpha(x)$ sein.

Satz V. *Wenn das bestimmte $\alpha(x)$-Integral von $f(x)$ über (a, b) existiert, d. h. $\Psi_\alpha(b) = \Phi_\alpha(b)$ ist, so existiert in (a, b) auch das unbestimmte Integral $S_\alpha(x)$.*

Satz VI. *Wenn $S_\alpha(x)$ in (a, b) existiert, so sind Differenzen $\psi_\alpha(x) - S_\alpha(x)$ und $S_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x)$ in (a, b) immer nicht-abnehmend.*

Satz VII. *Das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral von $f(x)$ hat eine $\alpha(x)$-Ableitung $= f(x)$ in allen Punkten des abgeschlossenen Intervalls (a, b), mit Ausnahme derjenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße* (L) *Null.*

Unmittelbarer Beweis. Wenn $\{\psi_\alpha^{(k)}(x)\}$ und $\{\varphi_\alpha^{(k)}(x)\}$ Folgen von α-Majoranten bzw. α-Minoranten sind, welche mit zunehmendem k (gleichmäßig) nach $S_\alpha(x)$ konvergieren, so wird in den Punkten des abgeschlossenen Intervalls (a, b), diejenigen einer Menge N vom $\alpha(x)$-Maße (L) Null ausgenommen, jedes $\psi_\alpha^{(k)}$ und jedes $\varphi_\alpha^{(k)}$ eine endliche Ableitung haben; dies folgt aus Satz III und den Definitionen A und B.

Es sei ξ ein Punkt von $(a, b) - N$. Dann wird, nach Satz VI, für ein willkürlich gewähltes k und jedes $x > \xi$:

$$\psi_\alpha^{(k)}(x) - S_\alpha(x) \geqq \psi_\alpha^{(k)}(\xi) - S_\alpha(\xi) \text{ und } S_\alpha(x) - \varphi_\alpha^{(k)}(x) \geqq S_\alpha(\xi) - \varphi_\alpha^{(k)}(\xi)$$

oder

$$\psi_\alpha^{(k)}(x) - \psi_\alpha^{(k)}(\xi) \geqq S_\alpha(x) - S_\alpha(\xi) \geqq \varphi_\alpha^{(k)}(x) - \varphi_\alpha^{(k)}(\xi)$$

sein. Aus diesen Ungleichungen und den damit übereinstimmenden, für den Fall $x < \xi$, folgt, daß die obere und die untere α-Derivierte von $S_\alpha(x)$ in ξ existieren und entweder unbestimmt sind oder zwischen $\frac{d\,\psi_\alpha^{(k)}(\xi)}{d\,\alpha(\xi)}$ und $\frac{d\,\varphi_\alpha^{(k)}(\xi)}{d\,\alpha(\xi)}$ liegen. Also wird, nach Satz III, $\frac{d\,S_\alpha(x)}{d\,\alpha(x)}$ existieren und endlich sein in allen Punkten des abgeschlossenen Intervalls (a, b), die Punkte einer Menge $N_0 \geqq N$ vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen.

Bei positivem ε sei $K_j(\varepsilon)$ die Menge derjenigen Punkte von $(a, b) - N_0$, in denen die α-Ableitungen von $\psi_\alpha^{(j)}$ und $\varphi_\alpha^{(j)}$ bestimmte Werte haben, deren Differenz $\geqq \varepsilon$ ist. Das $\alpha(x)$-Maß dieser Menge wird mit zunehmendem j nach Null konvergieren. Sonst existierte eine positive Zahl δ, derartig, daß für unendlich viele Werte (j') $m_\alpha[K_{j'}(\varepsilon)] > \delta$ wäre. Dies ist jedoch unmöglich. Anwendung des Vitalischen Überdeckungssatzes (Satz I) würde zeigen, daß für die nicht-abnehmenden Funktionen $\{\psi_\alpha^{(j')} - \varphi_\alpha^{(j')}\}$:

$$\psi_\alpha^{(j')}(b) - \varphi_\alpha^{(j')}(b) > \delta \cdot \varepsilon$$

wäre, was unmöglich ist, denn:

$$\lim_{j' \to \infty} \{\psi_\alpha^{(j')}(b) - \varphi_\alpha^{(j')}(b)\} = 0.$$

Daraus folgt (siehe auch Definition A und B), daß $\frac{dS_\alpha(x)}{d\alpha(x)}$ in den Punkten von (a, b), diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, bestimmt ist und um weniger als ε von $f(x)$ abweicht. Da ε willkürlich ist, folgt daraus der Satz[20]).

Satz VIII. *Das unbestimmte Integral $S_\alpha(x)$ von $f(x)$ in (a, b) ist jedenfalls konstant in jedem (offenen oder abgeschlossenen) Intervall, in welchem $\alpha(x)$ konstant ist; in jedem linksseitigen Unstetigkeitspunkte x_1 von $\alpha(x)$ ist*

$$\frac{S_\alpha(x_1 - 0) - S_\alpha(x_1)}{\alpha(x_1 - 0) - \alpha(x_1)} = f(x_1),$$

in jedem rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte x_2 von $\alpha(x)$ ist:

$$\frac{S_\alpha(x_2 + 0) - S_\alpha(x_2)}{\alpha(x_2 + 0) - \alpha(x_2)} = f(x_2);$$

in jedem linksseitigen oder rechtsseitigen Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ ist auch $S_\alpha(x)$ linksseitig bzw. rechtsseitig stetig.

§ 6. Definition A_1. $f(x)$ sei definiert für die Punkte des abgeschlossenen Intervalls (a, b); $\alpha(x)$ sei *(monoton) nicht-abnehmend* in (a, b). Dann soll *eine zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte $\alpha(x)$-Majorante* $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ die Eigenschaften haben: 1. $\psi_\alpha^{(1)}(a) = 0$; 2. $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ ist endlich, hat nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten erster Art, und zwar nur in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, und außerdem ist sie konstant in jedem (offenen oder abgeschlossenen) Intervall, in welchem $\alpha(x)$ konstant ist; 3. in jedem Punkte x von (a, b) sind $\psi_\alpha^{(1)}(x - 0)$ und $\psi_\alpha^{(1)}(x + 0)$ endlich, während in einem beiderseitigen Unstetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$ immer

$$\frac{\psi_\alpha^{(1)}(\xi - 0) - \psi_\alpha^{(1)}(\xi)}{\alpha(\xi - 0) - \alpha(\xi)} = \frac{\psi_\alpha^{(1)}(\xi + 0) - \psi_\alpha^{(1)}(\xi)}{\alpha(\xi + 0) - \alpha(\xi)}$$

ist; 4. es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer (eventuell leeren) abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (H_k), derartig, daß $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ *auf jedem H_k unterhalb totalstetig** ist

[20]) Der indirekte Beweis beruht auf Saks, l. c. [16]), S. 127—129 und 130 (Th. 7) oder Ridder, l. c. [3]). S. 256, 257 (§ 9) und 255 (Satz XXIII).

in bezug auf $\alpha(x)$[21]); 5. die [in allen Punkten von (a, b), diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, existierende und endliche[22])] $\alpha(x)$-Ableitung: $\frac{d\,\varphi_\alpha^{(1)}(x)}{d\,\alpha(x)}$ ist in den Punkten ihrer Existenzmenge, diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, $\geqq f(x)$.

Definition B_1. *Eine zu* $f(x)$ *in* (a,b) *adjungierte* $\alpha(x)$*-Minorante* $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ hat die Eigenschaften: 1. $\varphi_\alpha^{(1)}(a) = 0$; 2. $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ ist endlich, hat nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten erster Art, und zwar in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, und außerdem ist sie konstant in jedem (offenen oder abgeschlossenen) Intervall, in welchem $\alpha(x)$ konstant ist; 3. in jedem Punkte x von (a, b) sind $\varphi_\alpha^{(1)}(x-0)$ und $\varphi_\alpha^{(1)}(x+0)$ endlich, während in einem beiderseitigen Unstetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$ immer

$$\frac{\varphi_\alpha^{(1)}(\xi-0)-\varphi_\alpha^{(1)}(\xi)}{\alpha(\xi-0)-\alpha(\xi)} = \frac{\varphi_\alpha^{(1)}(\xi+0)-\varphi_\alpha^{(1)}(\xi)}{\alpha(\xi+0)-\alpha(\xi)}$$

ist; 4. es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (P_k), derartig, daß $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$ *auf jedem* P_k *oberhalb totalstetig** ist *in bezug auf* $\alpha(x)$[23]); 5. die [in allen Punkten von (a, b), diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, existierende und endliche[22])] $\alpha(x)$-Ableitung: $\frac{d\,\varphi_\alpha^{(1)}(x)}{d\,\alpha(x)}$ ist in den Punkten ihrer Existenzmenge, diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, $\leqq f(x)$.

---

[21]) D. h. die Summen von Funktionsdifferenzen:

$$\sum_{(j)}\left\{\varphi_\alpha^{(1)}(b_j)-\varphi_\alpha^{(1)}(c_j)\right\} \quad \text{und} \quad \sum_{(j)}\left\{\varphi_\alpha^{(1)}(c_j)-\varphi_\alpha^{(1)}(a_j)\right\},$$

wobei $a_j \leqq c_j \leqq b_j$ ist und die Paare $\{a_j, b_j\}$ zu H_k gehörende Endpunkte sind von endlich vielen, nicht übereinander greifenden Intervallen, haben immer einen unteren Limes $\geqq 0$, sobald die Summe $\sum_{(j)}\{\alpha(b_j)-\alpha(a_j)\}$ gegen Null konvergiert.

[22]) Dies folgt durch Anwendung von oder läßt sich unmittelbar beweisen wie Satz XVIII in Ridder, l. c. [3]), S. 252; beim letzten Beweisverfahren (man vergleiche die Betrachtungen l. c. [3]), S. 253. 254) müssen selbstverständlich die l. c. angewandten Sätze, in welchen das Lebesguesche lineare Maß benutzt wird, vorher erweitert werden (soweit dies oben im Texte noch nicht geschah) auf den Fall, daß das Maß Lebesguesches $\alpha(x)$-Maß ist (mit $\alpha(x)$ nicht-abnehmend).

[23]) D. h. die Summen von Funktionsdifferenzen:

$$\sum_{(j)}\left\{\varphi_\alpha^{(1)}(b_j)-\varphi_\alpha^{(1)}(c_j)\right\} \quad \text{und} \quad \sum_{(j)}\left\{\varphi_\alpha^{(1)}(c_j)-\varphi_\alpha^{(1)}(a_j)\right\},$$

wobei $a_j \leqq c_j \leqq b_j$ ist und die Paare $\{a_j, b_j\}$ zu P_k gehörende Endpunkte sind von endlich vielen, nicht übereinander greifenden Intervallen, haben immer einen oberen Limes $\leqq 0$, sobald die Summe $\sum_{(j)}\{\alpha(b_j)-\alpha(a_j)\}$ gegen Null konvergiert.

Satz IX. *Wenn $\alpha(x)$ (monoton) nicht-abnehmend ist im abgeschlossenen Intervall (a, b), ist auch die Differenz einer jeden $\alpha(x)$-Majorante $\psi_\alpha^{(1)}(x)$ und einer jeden $\alpha(x)$-Minorante $\varphi_\alpha^{(1)}(x)$, (gemäß den Definitionen A_1 und B_1) adjungiert zu der in (a, b) definierten Funktion $f(x)$, nicht-abnehmend in (a, b)*[24]).

Definition 7. Wenn bei *nicht-abnehmender* Funktion $\alpha(x)$ $f(x)$ in (a, b) $\alpha(x)$-Majoranten $\{\psi_\alpha^{(1)}(x)\}$ und $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi_\alpha^{(1)}(x)\}$ hat, nehme man den Wert des *unbestimmten oberen $\alpha(x)$-Integrals* $\Psi_\alpha^{(1)}(x)$ in einem Punkte x von (a, b) gleich der unteren Schranke aller $\psi_\alpha^{(1)}$-Werte in x und den Wert des *unbestimmten unteren $\alpha(x)$-Integrals* $\Phi_\alpha^{(1)}(x)$ gleich der oberen Schranke aller $\varphi_\alpha^{(1)}$-Werte in x. Wenn in (a, b) $\Psi_\alpha^{(1)}(x) = \Phi_\alpha^{(1)}(x)$ ist, so definiert ihr gemeinsamer Wert *das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral* $S_\alpha^{(1)}(x)$ von $f(x)$ in (a, b).

Satz X. *Wenn $S_\alpha^{(1)}(b)$ existiert $[= \Psi_\alpha^{(1)}(b) = \Phi_\alpha^{(1)}(b)]$, so existiert $S_\alpha^{(1)}(x)$ in jedem Punkte von (a, b).*

Satz XI. *Wenn $S_\alpha^{(1)}(x)$ in (a, b) existiert, so sind Differenzen $\psi_\alpha^{(1)}(x) - S_\alpha^{(1)}(x)$ und $S_\alpha^{(1)}(x) - \varphi_\alpha^{(1)}(x)$ in (a, b) immer nicht-abnehmend.*

Satz XII. *Das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(1)}(x)$ von $f(x)$ hat eine $\alpha(x)$-Ableitung $= f(x)$ in allen Punkten des abgeschlossenen Intervalls (a, b), mit Ausnahme derjenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße* (L) *Null*[25]).

Da die in den Definitionen A und B eingeführten α-Majoranten und α-Minoranten Teilklassen bilden der $\{\psi_\alpha^{(1)}\}$ und der $\{\varphi_\alpha^{(1)}\}$, eingeführt in den Definitionen A_1 und B_1[26]), hat man:

Satz XIII. *Jede nach Definition 6 über (a, b) $\alpha(x)$-integrierbare Funktion ist es auch nach Definition 7 und die Integralwerte sind einander gleich.*

§ 7. Definition 8. Eine Funktion $f(x)$, definiert für $a \leqq x \leqq b$, hat in (a, b) *ein unbestimmtes $\alpha(x)$-Integral* $S_\alpha^{(2)}(x)$, wobei $\alpha(x)$ *(monoton) nicht-abnehmend* in (a, b), wenn sich auf $f(x)$ die folgenden Konstruktionsprinzipien für das Integral anwenden lassen:

1. wenn $a \leqq c < d \leqq b$ ist und $f(x)$ schon integrierbar ist über jedes Teilintervall (p, q) mit $c < p < q < d$, soll immer

$$\int_{c+0}^{d-0} f(x)\, d\alpha(x) \equiv \lim_{\substack{p \to c,\, q \to d; \\ c<p<q<d}} \int_p^q f(x)\, d\alpha(x)$$

[24]) Dies folgt mit Hilfe von oder läßt sich beweisen wie Satz XX in Ridder, l. c. [3]), S. 254.

[25]) Zum Beweise siehe man Ridder, l. c. [3]), S. 255 (Satz XXIII) [und S. 249 (Satz XVII)].

[26]) Zum Beweise siehe man Ridder, l. c. [3]), S. 256, 257.

existieren; die Produkte $f(c) \times \{\alpha(c+0) - \alpha(c)\}$, $f(d) \times \{\alpha(d) - \alpha(d-0)\}$ sollen immer endlich sein oder die Form $\pm \infty \times 0$ haben, in welchem Falle man für sie den Wert Null annehme. Man kann somit definieren:

$$\int_c^d f(x)\, d\alpha(x) = \int_{c+0}^{d-0} f(x)\, d\alpha(x) + f(c) \times \{\alpha(c+0) - \alpha(c)\} + f(d) \times \{\alpha(d) - \alpha(d-0)\};$$

2. wenn $a \leqq p < q < r \leqq b$ und $f(x)$ schon integrierbar ist über (p, q) und (q, r), so nehme man:

$$\int_p^r f(x)\, d\alpha(x) = \int_p^q f(x)\, d\alpha(x) + \int_q^r f(x)\, d\alpha(x);$$

3. jede perfekte Teilmenge P von (a, b) (mit den Endpunkten c und d), welche die Eigenschaft hat, daß in den in bezug auf (c, d) komplementären (offenen) Intervallen von P das $\alpha(x)$-Integral schon bekannt ist, enthält ein Stück $\tilde{\omega}$ (mit den Endpunkten p und q), derartig, daß: a) $f(x)$ über $\tilde{\omega}$ ein Lebesgue-Stieltjessches Integral in bezug auf $\alpha(x)$ hat; b) die Oszillationen des unbestimmten $\alpha(x)$-Integrals in den offenen, zu $\tilde{\omega}$ komplementären Teilintervallen (p_n, q_n) von (p, q) eine konvergente Reihe bilden. Dann definiere man:

$$\int_{p-0}^{q+0} f(x)\, d\alpha(x) = \int_{\tilde{\omega}} (\mathrm{L\,S})\, f\, d\alpha(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p_n+0}^{q_n-0} f\, d\alpha(x)\ ^{27}).$$

1., 2., 3. liefern schließlich

$$S_\alpha^{(2)}(b) \equiv \int_a^b f\, d\alpha(x);$$

und ebenso $S_\alpha^{(2)}(x)$ für jedes x in (a, b).

Definition 9. Bei *nicht-abnehmender* Funktion $\alpha(x)$ hat $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) *ein unbestimmtes $\alpha(x)$-Integral* $S_\alpha^{(3)}(x)$, wenn $S_\alpha^{(3)}(x)$ die folgenden Eigenschaften haben kann: 1. $S_\alpha^{(3)}(a) = 0$; 2. $S_\alpha^{(3)}(x)$ ist endlich, hat nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten erster Art, und zwar in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, und außerdem ist sie konstant in jedem (offenen oder abgeschlossenen) Intervall, in welchem $\alpha(x)$ konstant ist; 3. in jedem

---

[27]) Es ist

$$\int_p^q f(x)\, d\alpha(x) = \int_{p-0}^{q+0} f(x)\, d\alpha(x) - f(p) \times \{\alpha(p) - \alpha(p-0)\} - f(q) \times \{\alpha(q+0) - \alpha(q)\},$$

wobei $\pm \infty \times 0$ wieder gleich Null gesetzt werde.

Punkte x von (a, b) sind $S_\alpha^{(3)}(x-0)$ und $S_\alpha^{(3)}(x+0)$ endlich, während in einem beiderseitigen Unstetigkeitspunkt ξ von $\alpha(x)$ immer

$$\frac{S_\alpha^{(3)}(\xi-0)-S_\alpha^{(3)}(\xi)}{\alpha(\xi-0)-\alpha(\xi)} = \frac{S_\alpha^{(3)}(\xi+0)-S_\alpha^{(3)}(\xi)}{\alpha(\xi+0)-\alpha(\xi)}$$

ist; 4. es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (P_k), derartig, daß $S_\alpha^{(3)}(x)$ *auf jedem* P_k *totalstetig** ist *in bezug auf* $\alpha(x)$[28]; 5. die [in allen Punkten von (a, b), diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, existierende und endliche[22])] $\alpha(x)$-Ableitung von $S_\alpha^{(3)}(x)$ ist in den Punkten ihrer Existenzmenge, diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, $= f(x)$.

Satz XIV. *Die Definitionen* 8 *und* 9 *sind einander äquivalent*[29]).

§ 8. Satz XV. *Die Definitionen* 9 *und* 7 *sind einander äquivalent*[30]).

Durch Anwendung von Satz XIII und des bekannten Satzes, nach dem das gewöhnliche Perronsche und das spezielle Denjoysche Integrationsverfahren genau ebenso weit führen, läßt sich Satz XIII erweitern zu:

Satz XVI. *Die Definitionen* 7 *und* 6 *sind einander äquivalent*[31]).

Die Definitionen 8 und 9 sind zu betrachten als Verallgemeinerungen der von Denjoy gegebenen konstruktiven bzw. deskriptiven Definitionen seines speziellen Integrals; Definition 6 verallgemeinert die Perron-Bauersche Integraldefinition, Definition 7 die von uns l. c. [3]), S. 254 gegebene Integraldefinition.

§ 9. Der Umfang der Definitionen 6 bis 9 läßt sich noch etwas erweitern, ohne daß dabei ihre gegenseitige Äquivalenz verloren geht. Es seien hier nur die Definitionen ausgesprochen, welche die Definitionen A, B, 6 und 8 ersetzen sollen.

Definition A*. $\alpha(x)$ sei *(monoton) nicht-abnehmend* im abgeschlossenen Intervall (a, b). Die Funktion $f(x)$ sei eindeutig in allen Stetigkeits- und einseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$; in den beiderseitigen Unstetigkeitspunkten (x_n) von $\alpha(x)$ habe sie zwei Werte: $f(x_n^l)$,

---

[28]) D. h. $S_\alpha^{(3)}(x)$ ist auf P_k sowohl unterhalb totalstetig* wie oberhalb totalstetig* in bezug auf $\alpha(x)$; siehe die Fußnoten [21]) und [23]). Man vergleiche Ridder, l. c. [3]), S. 251 (Definition 17*).

[29]) Zum Beweise vergleiche Ridder, Fund. Math. 21 (1933), S. 1—10, speziell Fußnote [13]).

[30]) Dies folgt mit Hilfe von oder läßt sich beweisen wie Satz E in Ridder, l. c. [3]), S. 255.

[31]) In direkter Weise läßt sich der Satz beweisen mittels eines Beweisverfahrens wie in Ridder, Fund. Math. 22 (1934), S. 141—144.

$f(x_n^r)$, welche auch zusammenfallen können. Dann soll *eine in* (a, b) *zu* $f(x)$ *adjungierte* $\alpha(x)$*-Majorante* $\psi_\alpha^0(x)$ die folgenden Eigenschaften haben: 1. $\psi_\alpha^0(a) = 0$; 2. $\psi_\alpha^0(x)$ hat in (a, b) nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten, und zwar nur in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$; 3. in jedem Punkte x von (a, b) sind $\psi_\alpha^0(x-0)$, $\psi_\alpha^0(x+0)$ endlich; 4. die untere $\alpha(x)$-Derivierte[17]) von $\psi_\alpha^0(x)$ ist in allen Stetigkeits- und einseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, eine (eventuell leere) abzählbare Menge von Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ ausgenommen, $\neq -\infty$ und $\geqq f(x)$, während in jedem beiderseitigen Unstetigkeitspunkt x_n von $\alpha(x)$ gilt:

$$\underline{D}_{\alpha(x),\,l}\,\psi_\alpha^0(x_n) \geqq f(x_n^l) \quad \text{und} \quad \underline{D}_{\alpha(x),\,r}\,\psi_\alpha^0(x_n) \geqq f(x_n^r).$$

Wir können die Herleitung von Definition B* aus Definition B unterdrücken. Definition 6 geht in Definition 6* über, wenn $\{\psi_\alpha(x)\}$ und $\{\varphi_\alpha(x)\}$ durch $\{\psi_\alpha^0(x)\}$ bzw. $\{\varphi_\alpha^0(x)\}$ ersetzt werden; *das so erhaltene unbestimmte* $\alpha(x)$*-Integral schreiben wir* $S_\alpha^0(x)$.

Die konstruktive Definition 8 hat ihr Analogon in

Definition 8*, hervorgehend aus Definition 8 mittels der folgenden Abänderungen in den Konstruktionsprinzipien: I. Nur wenn c bzw. d beiderseitige Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ sind, lese man

$$f(c^r) \times \{\alpha(c+0) - \alpha(c)\} \quad \text{bzw.} \quad f(d^l) \times \{\alpha(d) - \alpha(d-0)\}$$

statt

$$f(c) \times \{\alpha(c+0) - \alpha(c)\} \quad \text{bzw.} \quad f(d) \times \{\alpha(d) - \alpha(d-0)\}.$$

II. Wenn $\widetilde{\omega}$ (in Bedingung 3.) beiderseitige Unstetigkeitspunkte (ξ_n) von $\alpha(x)$ enthält, soll $\int_{\widetilde{\omega}} (\mathrm{LS})\, f(x)\, d\,\alpha(x)$ die Bedeutung haben:

$$\int_{\widetilde{\omega} - \sum_{(n)} \xi_n} (\mathrm{LS})\, f(x)\, d\,\alpha(x) + \sum_{(n)} f(\xi_n^l) \times \{\alpha(\xi_n) - \alpha(\xi_n - 0)\} + \sum_{(n)} f(\xi_n^r) \times \{\alpha(\xi_n + 0) - \alpha(\xi_n)\},$$

wobei das Integral über $\widetilde{\omega} - \sum_{(n)} \xi_n$ ein gewöhnliches LS-Integral darstellt und die beiden Summen absolut konvergieren sollen.

Das hierbei erhaltene unbestimmte $\alpha(x)$*-Integral schreiben wir:* $S_\alpha^{0\,(2)}(x)$.

Die Sätze VII und XII ändern sich in:

Satz XVII. *Das unbestimmte* $\alpha(x)$*-Integral* $S_\alpha^0(x) \equiv S_\alpha^{0\,(2)}(x)$ *von* $f(x)$ *hat eine* $\alpha(x)$*-Ableitung* $= f(x)$ *in allen Stetigkeits- und einseitigen Unstetigkeitspunkten von* $\alpha(x)$, *die Punkte einer Menge vom* $\alpha(x)$*-Maße* (L) *Null ausgenommen; in den beiderseitigen Unstetigkeitspunkten von* $\alpha(x)$ *ist die linke* $\alpha(x)$*-Ableitung des* $\alpha(x)$*-Integrals* $= f(x^l)$ *und die rechte* $\alpha(x)$*-Ableitung* $= f(x^r)$.

§ 10. Satz XVIII. *$\alpha(x)$ sei (monoton) nicht-abnehmend im abgeschlossenen Intervall (a, b). Die endliche Funktion $F(x)$ möge nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten erster Art, und zwar nur in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ haben; $F(x-0)$, $F(x+0)$ seien immer endlich. Gilt dann für $F(x)$ in allen Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, vielleicht diejenigen einer abzählbaren Menge ausgenommen, entweder*

$$-\infty < \underline{D}_{\alpha(x),r} F(x) \leqq \overline{D}_{\alpha(x),r} F(x) < +\infty$$

oder

$$-\infty < \underline{D}_{\alpha(x),l} F(x) \leqq \overline{D}_{\alpha(x),l} F(x) < +\infty$$

oder beides[32]*), so wird $F(x) - F(a)$ das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral $S^0_\alpha(x)$ (gemäß Definition 6*) einer Funktion $f(x)$ sein, welche: 1. in jedem Stetigkeitspunkte und jedem einseitigen Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$, diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße* (L) *Null ausgenommen, gleich der $\alpha(x)$-Ableitung von $F(x)$ ist, 2. in jedem beiderseitigen Unstetigkeitspunkt x von $\alpha(x)$ Werte $f(x^l)$, $f(x^r)$ hat, welche gleich der linken bzw. rechten $\alpha(x)$-Ableitung von $F(x)$ in x sind.*

Dieser Satz folgt durch Anwendung von oder läßt sich beweisen wie Satz IV[33]) in Ridder, l. c. [31]), S. 145.

§ 11. *$\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b)*, $V(x)$ ihre Totalvariation über (a, x) für jeden Punkt x von (a, b). Dann hat $\alpha(x)$ in den Stetigkeits- und einseitigen Unstetigkeitspunkten von $V(x)$, eine Menge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen, eine $V(x)$-Ableitung $= +1$ oder -1[10]); in den beiderseitigen Unstetigkeitspunkten von $V(x)$ existieren die linke und die rechte $V(x)$-Ableitung von $\alpha(x)$ und können nur die Werte $+1$, -1 haben. Aus jeder auf (a, b) definierten Funktion $f(x)$, zweideutig in den beiderseitigen Unstetigkeitspunkten von $V(x)$ und übrigens eindeutig, erhalten wir eine Funktion $g_\alpha(x)$ in folgender Weise: 1. in jedem Stetigkeits- oder einseitigen Unstetigkeitspunkte von $V(x)$, in welchem $\frac{d\alpha(x)}{dV(x)}$ existiert, sei $g_\alpha(x) = f(x) \times \frac{d\alpha(x)}{dV(x)}$; 2. in jedem beiderseitigen Unstetigkeitspunkte von

---

[32]) Das schließt somit für jeden Punkt x die Existenz der in den zugehörigen Ungleichungen vorkommenden äußeren Derivierten ein; in einem Punkte, in welchem eine derartige Derivierte unbestimmt ist, betrachten wir sie als endlich.

[33]) Wir bemerken, daß das in diesem Satze benutzte unbestimmte „α"-Integral mit dem speziellen Denjoyschen Integral der integrierten Funktion zusammenfällt, sobald feststeht, daß das „α"-Integral eine stetige Funktion ihrer oberen Grenze ist. Auch der Satz V (mit $F(x)$ stetig) auf S. 146 der eben zitierten Arbeit läßt eine Erweiterung für $S^0_\alpha(x)$-Integrale (mit $\alpha(x)$ nicht-abnehmend) zu.

$V(x)$ sei $g_\alpha(x^l) = f(x^l) \times D_{V(x),\,l}\,\alpha(x)$ und $g_\alpha(x^r) = f(x^r) \times D_{V(x),\,r}\,\alpha(x)$; 3. in den übrigen Punkten von (a, b) nehme man z. P $g_\alpha(x) = 0$.

Definition C. Dann soll jede, gemäß Definition A*, in (a, b) zu $g_\alpha(x)$ adjungierte $V(x)$-Majorante $\psi^0_V(x)$ *eine* $\alpha(x)$*-Majorante von* $f(x)$ *in* (a, b) sein.

Definition D. Jede, gemäß Definition B*, in (a, b) zu $g_\alpha(x)$ adjungierte $V(x)$-Minorante $\varphi^0_V(x)$ sei *eine* $\alpha(x)$*-Minorante von* $f(x)$ *in* (a, b).

Definition 10. Wenn, bei $\alpha(x)$ *von beschränkter Variation in* (a, b), $f(x)$ $\alpha(x)$-Majoranten $\{\psi^0_V(x)\}$ und $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi^0_V(x)\}$ hat und die untere Schranke aller $\psi^0_V(x)$-Werte und die obere Schranke aller $\varphi^0_V(x)$-Werte für jeden Punkt x von (a, b) einander gleich sind, so definieren diese gemeinsamen Werte *das unbestimmte* $\alpha(x)$*-Integral* $S^0_\alpha(x)$ *von* $f(x)$ *in* (a, b).

Satz XIX. *Wenn* $\alpha(x)$ *in* (a, b) *von beschränkter Variation ist und* $V(x)$ *ihre Totalvariation über* (a, x) *darstellt, dann hat das unbestimmte* $\alpha(x)$*-Integral* $S^0_\alpha(x)$ *von* $f(x)$ *eine* $\alpha(x)$*-Ableitung* $= f(x)$ *in allen Stetigkeits- und einseitigen Unstetigkeitspunkten von* $\alpha(x)$, *mit Ausnahme derjenigen einer Menge vom* $V(x)$*-Maße* (L) *Null; in den beiderseitigen Unstetigkeitspunkten von* $\alpha(x)$ *ist*

$$D_{\alpha(x),\,l}\,S^0_\alpha(x) = f(x^l) \quad \textit{und} \quad D_{\alpha(x),\,r}\,S^0_\alpha(x) = f(x^r).$$

Der Beweis folgt durch Anwendung von Satz XVII.

Definition 10 erweitert die Definitionen 6 und 6*; auch die Definitionen 7, 8, 9 und 7*, 8*, 9* haben mit Definition 10 äquivalente Analoga für $\alpha(x)$ von beschränkter Variation in (a, b). So ist z. B. Definition 8 analog mit

Definition 11, hervorgehend aus Definition 8 mittels der gleichen Abänderungen, welche zu Definition 8* führten; nur wird diesmal $\alpha(x)$ *von beschränkter Variation sein. Das hierbei erhaltene unbestimmte* $\alpha(x)$*-Integral schreiben wir:* $S^{0\,(2)}_\alpha(x)$.

Satz XX. *Die Definitionen* 10 *und* 11 *sind einander äquivalent.*

Beweis. $\alpha(x)$, $V(x)$, $f(x)$ mögen die im Anfang dieses Paragraphen angegebene Bedeutung haben; $g_\alpha(x)$ sei in der angegebenen Weise aus $f(x)$ hergeleitet. Wenn dann $f(x)$ in (a, b) ein Lebesgue-Stieltjessches Integral[34]) in bezug auf $\alpha(x)$ hat:

$$\int_a^x (\mathrm{L\,S})\, f(x)\, d\,\alpha(x) \equiv G(x),$$

[34]) Hierbei ist ein Lebesgue-Stieltjessches Integral im schon in Definition 8* angegebenen Sinne gemeint (mit $\alpha(x)$ von beschränkter Variation).

so ist in allen beiderseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$

$$D_{\alpha(x),l}G(x) = f(x^l),\ D_{\alpha(x),r}G(x) = f(x^r)$$

und somit

$$D_{V(x),l}G(x) = f(x^l) \times D_{V(x),l}\alpha(x) = g_\alpha(x^l),$$
$$D_{V(x),r}G(x) = f(x^r) \times D_{V(x),r}\alpha(x) = g_\alpha(x^r),$$

während in den übrigen Punkten von (a, b), eine Menge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen,

$$D_{\alpha(x)}\ G(x) = f(x) \quad \text{und} \quad D_{V(x)}\ G(x) = f(x) \times D_{V(x)}\alpha(x) = g_\alpha(x)$$

ist. Daraus folgt jedoch[35]), *daß $G(x)$ auch das Lebesgue-Stieltjessche Integral von $g(x)$ über (a, x) und in bezug auf $V(x)$*[34]) *darstellt.*

Mit Hilfe dieser Eigenschaft läßt sich mittels transfiniter Induktion leicht zeigen, daß das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{0\,(2)}(x)$ einer nun nach Definition 11 $\alpha(x)$-integrierbaren Funktion $f(x)$ zugleich das mittels Definition 8* erhaltene unbestimmte $V(x)$-Integral der zugehörigen Funktion $g_\alpha(x)$ ist. Auch das Umgekehrte gilt.

Aus der Gleichwertigkeit der Definitionen 6* und 8* folgt nun unmittelbar dasselbe für die Definitionen 10 und 11.

§ 12. Man könnte geneigt sein zu denken, daß der durch die Definitionen 10 und 11 erhaltene Integralwert $S_\alpha^0(b) = S_\alpha^{0\,(2)}(b)$ bei der Integration von $f(x)$ in bezug auf die Funktion $\alpha(x)$, von beschränkter Variation in (a, b), auch erhalten werden könnte, indem man $f(x)$ in bezug auf $P(x)$ und in bezug auf $N(x)$ integrierte über (a, b) gemäß einer der Definitionen 6* bis 9* und dann die Differenz dieser Integrale als Resultat für die Integration in bezug auf $\alpha(x)$ annähme; hierbei sind $P(x)$ und $N(x)$ die positive bzw. negative Variation von $\alpha(x)$ über (a, x). *Zwar führt diese Differenzbildung immer zu dem richtigen Werte des $\alpha(x)$-Integrals, falls die $P(x)$- und $N(x)$-Integrale von $f(x)$ existieren,* wie am einfachsten aus den Definitionen 8* und 11 folgt. Jedoch zeigt das folgende Beispiel, *daß umgekehrt aus der Existenz des $\alpha(x)$-Integrals die Existenz der $P(x)$- und $N(x)$-Integrale nicht notwendig zu folgen braucht,* wie dies immer beim Lebesgue-Stieltjesschen Integral der Fall ist.

Man nehme im Intervall (a, b) eine zunehmende Folge von Punkten $a < x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 \ldots < x_n < \xi_n \ldots$ an, welche nach b konvergieren und definiere $P(x) = \sum_{(x_n)}^{x} \frac{1}{n^2}$ und $N(x) = \sum_{(\xi_n)}^{x} \frac{1}{n^2}$, wobei die erste

---

[35]) Durch Anwendung von Lebesgue, l. c. [4]), S. 288 und 301 [zweiter Satz; man siehe auch hier Fußnote [11])]; die zitierten Sätze sollen hierbei eine leicht ersichtliche Abänderung erfahren zufolge der etwas verallgemeinerten Auffassung des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals, welche im obigen Text angewandt wird.

Summe zu jedem Punkte $x_n \leqq x$ und die zweite Summe zu jedem Punkte $\xi_n \leqq x$ einen Beitrag $\frac{1}{n^2}$ enthält. Setzt man $\alpha(x) \equiv P(x) - N(x)$, so sind $P(x)$ und $N(x)$ positive bzw. negative Variation von $\alpha(x)$ über (a, x); $\alpha(x)$ hat nur linksseitige Unstetigkeitspunkte erster Art. Man definiere weiter $f(x) = 0$ in allen Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ und $= n$ in x_n und ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Dann liefern die Definitionen 10 und 11 bei diesen Funktionen $f(x)$, $\alpha(x)$, daß $S_\alpha^0(b) = 0$ ist und daß $S_P^0(b)$ und $S_N^0(b)$ nicht existieren.

§ 13. Neben Satz XVIII haben wir den

Satz XXI. *$\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b). Die endliche Funktion $F(x)$ möge nur linksseitige und rechtsseitige Unstetigkeiten erster Art, und zwar nur in linksseitigen bzw. rechtsseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$, haben; $F(x-0)$, $F(x+0)$ seien immer endlich. Genügt dann $F(x)$ in allen Stetigkeitspunkten (x) von $\alpha(x)$, vielleicht diejenigen einer abzählbaren Menge ausgenommen, den Bedingungen:*

1. *entweder*

$$-\infty < \underline{D}_{\alpha(x),\,r} F(x) \leqq \overline{D}_{\alpha(x),\,r} F(x) < +\infty,$$

oder

$$-\infty < \underline{D}_{\alpha(x),\,l} F(x) \leqq \overline{D}_{\alpha(x),\,r} F(x) < +\infty,$$

oder beides gilt,

2. *jeder derartige Punkt x hat eine genügend kleine Umgebung, in deren (ev. fehlenden) Punkten (ξ) mit $\alpha(\xi) = \alpha(x)$ auch $F(\xi) = F(x)$ ist;*

so wird $F(x) - F(a)$ das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^0(x)$ (gemäß Definition 10) einer Funktion $f(x)$ sein, welche:

I. *in jedem Stetigkeits- oder einseitigen Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$, diejenigen einer Menge vom $V(x)$-Maße* (L) *Null ausgenommen, gleich der $\alpha(x)$-Ableitung von $F(x)$ ist,*

II. *in jedem beiderseitigen Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ Werte $f(x^l)$, $f(x^r)$ hat, welche gleich der linken bzw. rechten $\alpha(x)$-Ableitung von $F(x)$ in x sind.*

Beweis. Eine leichte, etwas umständliche Betrachtung zeigt, daß $F(x)$ in bezug auf die Totalvariation $V(x)$ den Bedingungen von Satz XVIII genügt. Dadurch folgt obiger Satz aus Satz XVIII und den Definitionen 6* und 10.

Drittes Kapitel.

„β"-Integration im Stieltjesschen Sinne.

§ 14. Definition 12. $\alpha(x)$ sei *stetig und nicht-abnehmend* im abgeschlossenen Intervall (a, b). Eine in (a, b) definierte endliche Funk-

tion $F(x)$ ist *linksseitig- bzw. rechtsseitig-approximativ stetig in bezug auf* $\alpha(x)$ in einem Punkt x von (a, b), der kein rechter bzw. linker Endpunkt eines Intervalls ist, in welchem $\alpha(x)$ konstant ist, wenn es eine $\alpha(x)$-meßbare Teilmenge P_x von (a, x) bzw. Q_x von (x, b) gibt, welche x enthält, in x, bei Betrachtung von $\alpha(x)$ nur in (a, x) bzw. nur in (x, b), eine $\alpha(x)$-Dichte 1 hat (siehe Def. 3) und auf der $F(x)$ linksseitig bzw. rechtsseitig stetig ist in x. Auch wenn ein Punkt x rechter bzw. linker Endpunkt eines Intervalls ist, in dem $F(x)$ und $\alpha(x)$ beide konstant sind, betrachten wir $F(x)$ als linksseitig- bzw. rechtsseitig-approximativ stetig in x in bezug auf $\alpha(x)$.

Definition 13. Wenn $\alpha(x)$ *stetig und von beschränkter Variation* in (a, b) ist und $V(x)$ ihre Totalvariation über (a, x) darstellt, ist für die in (a, b) endliche, $\alpha(x)$-meßbare Funktion $F(x)$ in einem Punkte x von (a, b), der kein rechter bzw. linker Endpunkt eines Intervalls ist, in welchem $\alpha(x)$ konstant ist, *die linke bzw. rechte untere approximative* $\alpha(x)$*-Derivierte*, $\underline{A}\,D_{\alpha(x),\,l}\,F(x)$ bzw. $\underline{A}\,D_{\alpha(x),\,r}\,F(x)$, gleich der oberen Schranke der (endlichen oder unendlichen) Zahlenwerte (p) bzw. (q), für die, bei Betrachtung von $\alpha(x)$ in (a, x) bzw. in (x, b), die Teilmengen

$$E_1\left[\frac{F(\xi)-F(x)}{\alpha(\xi)-\alpha(x)} \geqq p;\ V(\xi) < V(x) \text{ und } \alpha(\xi) \neq \alpha(x)\right]$$

in (a, x) bzw.

$$E_2\left[\frac{F(x)-F(\xi)}{\alpha(x)-\alpha(\xi)} \geqq q;\ V(\xi) > V(x) \text{ und } \alpha(\xi) \neq \alpha(x)\right]$$

in (x, b) im Punkte x die $V(x)$-Dichte 1 haben. Auch wenn x rechter bzw. linker Endpunkt eines Intervalls ist, in dem $F(x)$ und $\alpha(x)$ konstant sind, betrachten wir $\underline{A}\,D_{\alpha(x),\,l}\,F(x)$ bzw. $\underline{A}\,D_{\alpha(x),\,r}\,F(x)$ als existierend in x. Gibt es dann auf der anderen Seite eine gemäß dem ersten Teile dieser Definition erhaltene, einseitige untere approximative $\alpha(x)$-Derivierte von bestimmtem Werte, so geben wir beiden einseitigen Derivierten diesen Wert; sonst sei der Wert von $\underline{A}\,D_{\alpha(x),\,l}$ bzw. $\underline{A}\,D_{\alpha(x),\,r}\,F(x)$ unbestimmt in x.

Die Definition *der linken bzw. rechten oberen approximativen* $\alpha(x)$*-Derivierten von* $F(x)$, $\overline{A}\,D_{\alpha(x),\,l}\,F(x)$ bzw. $\overline{A}\,D_{\alpha(x),\,r}\,F(x)$, in einem Punkte von (a, b) ist hiernach evident.

Definition 14. $\alpha(x)$, $V(x)$, $F(x)$ mögen die gleiche Bedeutung haben wie in Definition 13. In einem Punkte x von (a, b) sei *die untere approximative* $\alpha(x)$*-Derivierte von* $F(x)$, $\underline{A}\,D_{\alpha(x)}\,F(x)$:

1. wenn x mit a bzw. b zusammenfällt und $\underline{A}\,D_{\alpha(x),\,r}\,F(a)$ bzw. $\underline{A}\,D_{\alpha(x),\,l}\,F(b)$ existiert, gleich dieser;

2. wenn $x \neq a, \neq b$ ist, gleich dem kleineren der Werte von $A D_{\alpha(x),l} F(x)$, $A D_{\alpha(x),r} F(x)$, falls diese Derivierten existieren und ihre Werte bestimmt sind. Existieren diese Derivierten, aber haben sie dabei unbestimmte Werte, so betrachte man $\underline{A D}_{\alpha(x)} F(x)$ zwar als existierend, jedoch von unbestimmtem Werte.

Die Definition *der oberen approximativen* $\alpha(x)$*-Derivierten von* $F(x)$, $\overline{A D}_{\alpha(x)} F(x)$, in einem Punkte von (a, b) ist hiernach evident.

Sind in einem Punkte $\underline{A D}_{\alpha(x)} F(x)$ und $\overline{A D}_{\alpha(x)} F(x)$ einander gleich oder haben beide unbestimmte Werte, so betrachten wir *die approximative* $\alpha(x)$*-Ableitung von* $F(x)$, $A D_{\alpha(x)} F(x)$, als existierend in x, und zwar im ersten Fall gleich dem gemeinsamen Werte von $\underline{A D}_{\alpha(x)} F(x)$, $\overline{A D}_{\alpha(x)} F(x)$, im zweiten Fall als von unbestimmtem Werte.

Diese Definitionen ermöglichen es, die Definitionen und wichtigsten Eigenschaften des (approximativ stetigen) β-Integrals [2]) zu erweitern auf den Fall, daß man Integration in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, monoton oder von beschränkter Variation, betrachtet. Noch mehr als dies schon im zweiten Kapitel der Fall war, können wir uns auf kurze Andeutungen der Beweise beschränken.

§ 15. Definition E_1. $\alpha(x)$ sei *stetig und (monoton) nicht-abnehmend* im abgeschlossenen Intervall (a, b); $f(x)$ sei eindeutig in (a, b). Dann soll *eine in* (a, b) *zu* $f(x)$ *adjungierte* $\alpha(x)$*-Majorante* $\psi_\alpha^{(4)}(x)$ die Eigenschaften haben: 1. $\psi_\alpha^{(4)}(a) = 0$; 2. $\psi_\alpha^{(4)}(x)$ ist endlich, linksseitig approximativ stetig in bezug auf $\alpha(x)$ in b und in jedem inneren Punkt von (a, b), rechtsseitig a. s. i. b. a. $\alpha(x)$ in a und in jedem inneren Punkt von (a, b) [36]); 3. es läßt sich (a, b), ausgenommen vielleicht in abzählbar vielen Punkten, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (H_k), derartig, daß $\psi_\alpha^{(4)}(x)$ *auf jedem* H_k *unterhalb totalstetig* ist *in bezug auf* $\alpha(x)$ [37]); 4. die [in den Punkten von (a, b), diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, existierende und endliche [38])] approximative $\alpha(x)$-Ableitung von $\psi_\alpha^{(4)}(x)$ ist in den Punkten ihrer Existenzmenge, diejenige einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, $\geqq f(x)$.

Definition F_1. *Eine zu* $f(x)$ *in* (a, b) *adjungierte* $\alpha(x)$*-Minorante* $\varphi_\alpha^{(4)}(x)$ hat die Eigenschaften: 1. $\varphi_\alpha^{(4)}(a) = 0$; 2. $\varphi_\alpha^{(4)}(x)$ ist endlich, linksseitig

[36]) Diese Funktion ist dadurch $\alpha(x)$-meßbar in (a, b).

[37]) D. h. die Summe von Funktionsdifferenzen $\sum_j \{\psi_\alpha^{(4)}(b_j) - \psi_\alpha^{(4)}(a_j)\}$ in den zu H_k gehörenden Endpunkten $a_j < b_j$ von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden Intervallen hat immer einen unteren Limes $\geqq 0$, sobald die Summe $\sum_{(j)} \{\alpha(b_j) - \alpha(a_j)\}$ gegen Null konvergiert.

[38]) Dies folgt durch Anwendung von oder läßt sich unmittelbar beweisen wie Satz XI in Ridder, l. c. [3]), S. 245; für den zweiten Beweis vergleiche man l. c. [3]), S. 246, 236 und 237.

approximativ stetig in bezug auf $\alpha(x)$ in b und in jedem inneren Punkt von (a, b), rechtsseitig a. s. i. b. a. $\alpha(x)$ in a und in jedem inneren Punkt von (a, b)[36]; 3. es läßt sich (a, b), ausgenommen vielleicht in abzählbar vielen Punkten, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (P_k), derartig, daß $\varphi_\alpha^{(4)}(x)$ *auf jedem* P_k *unterhalb totalstetig* ist *in bezug auf* $\alpha(x)$[39]; 4. die [in den Punkten von (a, b), diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, existierende und endliche[38])] approximative $\alpha(x)$-Ableitung von $\varphi_\alpha^{(4)}(x)$ ist in den Punkten ihrer Existenzmenge, diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, $\leqq f(x)$.

Satz XXII. *Wenn* $\alpha(x)$ *stetig und nicht-abnehmend ist im abgeschlossenen Intervall* (a, b), *ist auch die Differenz einer jeden* $\alpha(x)$*-Majorante* $\psi_\alpha^{(4)}(x)$ *und einer jeden* $\alpha(x)$*-Minorante* $\varphi_\alpha^{(4)}(x)$, *(gemäß den Definitionen* E_1 *und* F_1*) adjungiert zu der in* (a, b) *definierten Funktion* $f(x)$, *nicht-abnehmend in* (a, b)[40]).

Definition 15 *des unbestimmten* $\alpha(x)$*-Integrals* $S_\alpha^{(4)}(x)$ von $f(x)$ in (a, b) hat, unter Anwendung der $\{\psi_\alpha^{(4)}(x)\}$ und der $\{\varphi_\alpha^{(3)}(x)\}$, dieselbe Form wie Definition 7.

Satz XXIII. *Das unbestimmte* $\alpha(x)$*-Integral* $S_\alpha^{(4)}(x)$ *von* $f(x)$ *in* (a, b) *ist jedenfalls konstant in jedem (offenen oder abgeschlossenen) Intervall, in welchem* $\alpha(x)$ *konstant ist; es ist linksseitig approximativ stetig in bezug auf* $\alpha(x)$ *in* b *und in jedem inneren Punkte von* (a, b), *und rechtsseitig approximativ stetig in bezug auf* $\alpha(x)$ *in* a *und in jedem inneren Punkte von* (a, b).

In allen Punkten von (a, b), *diejenigen einer Menge vom* $\alpha(x)$*-Maße* (L) *Null ausgenommen, ist*

$$A\,D_{\alpha(x)} S_\alpha^{(4)}(x) = f(x)\,[41]).$$

§ 16. Definition E. $\alpha(x)$ sei *stetig und nicht-abnehmend* in (a, b); $f(x)$ sei eindeutig in (a, b). Dann soll *eine in* (a, b) *zu* $f(x)$ *adjungierte* $\alpha(x)$*-Majorante* $\psi_\alpha^{(5)}(x)$ die Eigenschaften haben: 1. $\psi_\alpha^{(5)}(a) = 0$; 2. $\psi_\alpha^{(5)}(x)$ ist endlich, linksseitig-approximativ stetig in bezug auf $\alpha(x)$ in b und

---

[39]) D. h. die Summe von Funktionsdifferenzen $\sum_{(j)} \{\varphi_\alpha^{(4)}(b_j) - \varphi_\alpha^{(4)}(a_j)\}$ in den zu P_k gehörenden Endpunkten $a_j < b_j$ von endlich vielen, nicht übereinandergreifenden Intervallen hat immer einen oberen Limes $\leqq 0$, sobald die Summe $\sum_{(j)} \{\alpha(b_j) - \alpha(a_j)\}$ gegen Null konvergiert.

[40]) Dies folgt durch Anwendung von oder läßt sich beweisen wie Ridder, l. c. [29]), S. 4 (Satz).

[41]) Diese letzte Behauptung folgt durch Anwendung von oder läßt sich beweisen wie Ridder, l. c. [29]). S. 5 (Satz).

jedem inneren Punkt von (a, b), rechtsseitig a. s. i. b. a. $\alpha(x)$ in a und jedem inneren Punkt von (a, b)[36]; 3. es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge M, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (H_k), derartig, daß: A. jede Funktion $\psi^{(5)}_{\alpha;k}(x)$, welche in a und b, in den größten, abgeschlossenen, Punkte von H_k enthaltenden Teilintervallen $(i^{(k)}_{k'})$ von (a, b), in deren jedem $\alpha(x)$ konstant ist, und weiter in allen Punkten von H_k mit $\psi^{(5)}_{\alpha}(x)$ zusammenfällt, und welche sich linear ändert in den zu der abgeschlossenen Menge $\{(a) + (b) + \sum_{(k')} i^{(k)}_{k'} + H_k\}$ komplementären Intervallen $(u^{(k)}_j)$ von (a, b), den gleichen Bedingungen genügt wie in 2. für $\psi^{(5)}_{\alpha}(x)$ gefordert wurden, und daß: B. in den Punkten von H_k, diejenigen einer abzählbaren Menge M_k ausgenommen,

$$\underline{A D}_{\alpha_k(x)}\, \psi^{(5)}_{\alpha;k}(x) \text{ existiert, } \neq -\infty \text{ und } \geqq f(x)\,^{42})$$

ist, wobei $\alpha_k(x)$ in der gleichen Weise aus $\alpha(x)$ hervorgegangen sein soll wie $\psi^{(5)}_{\alpha;k}(x)$ aus $\psi^{(5)}_{\alpha}(x)$.

Definition F. *Eine zu $f(x)$ in (a, b) adjungierte $\alpha(x)$-Minorante* $\varphi^{(5)}_{\alpha}(x)$ hat die Eigenschaften: 1. $\varphi^{(5)}_{\alpha}(a) = 0$; 2. $\varphi^{(5)}_{\alpha}(x)$ ist endlich, linksseitig-approximativ stetig in bezug auf $\alpha(x)$ in b und jedem inneren Punkt von (a, b), rechtsseitig a. s. i. b. a. $\alpha(x)$ in a und jedem inneren Punkt von (a, b)[36]; 3. es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge N, überdecken von abzählbar vielen perfekten Teilmengen (P_k), derartig, daß: A. jede Funktion $\varphi^{(5)}_{\alpha;k}(x)$, welche in a und b, in den größten, abgeschlossenen, Punkte von P_k enthaltenden Teilintervallen $(v^{(k)}_{k'})$ von (a, b), in deren jedem $\alpha(x)$ konstant ist, und weiter in allen Punkten von P_k mit $\varphi^{(5)}_{\alpha}(x)$ zusammenfällt, und welche sich linear ändert in den zu der Menge $\{(a) + (b) + \sum_{(k')} v^{(k)}_{k'} + P_k\}$ komplementären Intervallen $(w^{(k)}_j)$ von (a, b), den gleichen Bedingungen genügt wie in 2. für $\varphi^{(5)}_{\alpha}(x)$ gefordert wurden, und daß: B. in den Punkten von P_k, diejenigen einer abzählbaren Menge N_k ausgenommen,

$$\overline{A D}_{\alpha_k(x)}\, \varphi^{(5)}_{\alpha;k}(x) \text{ existiert, } \neq +\infty \text{ und } \leqq f x)\,^{42})$$

ist, wobei $\alpha_k(x)$ in der gleichen Weise aus $\alpha(x)$ hervorgegangen sein soll wie $\varphi^{(5)}_{\alpha;k}(x)$ aus $\varphi^{(5)}_{\alpha}(x)$.

Da in den Definitionen E und F die Begriffe „oberhalb totalstetig" und „unterhalb totalstetig" nicht angewandt wurden, schließen sie sich enger an die ursprünglichen Perron-Bauerschen Majoranten- und Minorantendefinitionen an als dies mit den Definitionen E_1 und F_1 der Fall ist.

---

[42]) Wir betrachten auch in einem Unbestimmtheitspunkte der approximativen Derivierten die beiden letzten Bedingungen als erfüllt.

Satz XXIV. *Die $\alpha(x)$-Majoranten $\{\psi_\alpha^{(5)}(x)\}$ bilden eine Teilklasse der $\alpha(x)$-Majoranten $\{\psi_\alpha^{(4)}(x)\}$, die $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi_\alpha^{(5)}(x)\}$ eine Teilklasse der $\{\varphi_\alpha^{(4)}(x)\}$* [43]).

Dieser Satz und Satz XXII machen es möglich, einzuführen die

Definition 16. Wenn die untere Schranke aller $\psi_\alpha^{(5)}(x)$-Werte (siehe Definition E) und die obere Schranke aller $\varphi_\alpha^{(5)}(x)$-Werte (siehe Definition F) in jedem Punkte x von (a, b) einander gleich sind, so definieren ihre gemeinsamen Werte *das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral* $S_\alpha^{(5)}(x)$ von $f(x)$ in (a, b) [44]).

Satz XXV. *Jede nach Definition* 16 *über* (a, b) *$\alpha(x)$-integrierbare Funktion $f(x)$ ist es auch nach Definition* 15 *und die Integralwerte sind einander gleich.*

§ 17. Definition 17. Eine eindeutige Funktion $f(x)$, definiert für $a \leqq x \leqq b$, wird in (a, b) *ein unbestimmtes $\alpha(x)$-Integral* $S_\alpha^{(6)}(x)$ haben, wobei $\alpha(x)$ *stetig und nicht-abnehmend* in (a, b), wenn die folgenden Konstruktionsprinzipien, in jedem Intervall (a, x) angewandt auf $f(x)$, zu einer in (a, b) in bezug auf $\alpha(x)$ sowohl linksseitig- wie rechtsseitig-approximativ stetigen Funktion führen, welche dann $S_\alpha^{(6)}(x)$ sei:

1. wenn $a \leqq c < d \leqq b$ ist und $f(x)$ schon integrierbar ist über jedes Intervall (p, q) mit $c < p < q < d$, soll es immer Teilmengen E_c und E_d von (c, d) geben, welche in c bzw. in d, bei Betrachtung von $\alpha(x)$ nur in (c, d), eine $\alpha(x)$-Dichte 1 haben, derartig, daß für $p < q$ und $p \varepsilon E_c$, $q \varepsilon E_d$ ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{\substack{p \to c \\ q \to d}} \int_p^q f(x)\, d\alpha(x)$$

existiert, welcher dann das $\alpha(x)$-Integral über (c, d) definiere;

2. wenn $a \leqq p < q < r \leqq b$ und $f(x)$ schon integrierbar ist über (p, q) und (q, r), so nehme man:

$$\int_p^r f(x)\, d\alpha(x) = \int_p^q f(x)\, d\alpha(x) + \int_q^r f(x)\, d\alpha(x);$$

3. jede perfekte Teilmenge P eines Intervalls (a, x) (mit den Endpunkten c und d), welche die Eigenschaft hat, daß in den in bezug auf

---

[43]) Dies läßt sich beweisen wie Satz IX in Ridder. l. c. [31]), S. 150.

[44]) Läßt man in den Definitionen E und F das Wort „approximativ" überall fort (ebenso der Buchstabe „A" in „$A\,D$", obgleich man dies auch unterlassen könnte) und nimmt man $\alpha(x) \equiv x$, so führt Definition 16, in der so abgeänderten Form, zu einem verallgemeinerten Perron-Bauerschen Integral, und die Definition ist nun völlig äquivalent mit der allgemeinen Denjoyschen Integraldefinition [man vergleiche Ridder, l. c. [3]) S. 235 und 263].

(c, d) komplementären Intervallen von P das $\alpha(x)$-Integral schon bekannt ist, enthält ein Stück $\tilde{\omega}$ (mit den Endpunkten p und q), derartig, daß: a) $f(x)$ über $\tilde{\omega}$ ein Lebesgue-Stieltjessches Integral in bezug auf $\alpha(x)$ hat; b) die Werte des Integrals über die zu $\tilde{\omega}$ komplementären Teilintervallen (p_n, q_n) von (p, q) eine absolut konvergente Reihen bilden. Dann definiere man:

$$\int_p^q f(x)\,d\alpha(x) = \int_{\tilde{\omega}} (\mathrm{LS}) f(x)\,d\alpha(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{p_n}^{q_n} f(x)\,d\alpha(x).$$

Definition 18. Bei *stetiger* und *nicht-abnehmender* Funktion $\alpha(x)$ wird $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) *ein unbestimmtes* $\alpha(x)$*-Integral* $S_\alpha^{(7)}(x)$ haben, wenn $S_\alpha^{(7)}(x)$ die folgenden Eigenschaften haben kann: 1. $S_\alpha^{(7)}(a) = 0$; 2. $S_\alpha^{(7)}(x)$ ist in (a, b) linksseitig- und rechtsseitig-approximativ stetig in bezug auf $\alpha(x)$; 3. es läßt sich (a, b), ausgenommen in den Punkten einer abzählbaren Menge, überdecken von abzählbar vielen perfekten Mengen (P_k), derartig, daß $S_\alpha^{(7)}(x)$ *auf jedem* P_k *totalstetig* ist *in bezug auf* $\alpha(x)$ [45]); 4. die [in allen Punkten von (a, b), diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, existierende und endliche [38])] approximative $\alpha(x)$-Ableitung von $S_\alpha^{(7)}(x)$ ist in den Punkten ihrer Existenzmenge, diejenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße Null ausgenommen, gleich $f(x)$.

Satz XXVI. *Die Definitionen* 17 *und* 18 *sind einander äquivalent* [46]).

§ 18. Satz XXVII. *Die Definitionen* 18 *und* 15 *sind einander äquivalent* [47]).

Satz XXVIII. *Die Definitionen* 15 *und* 16 *sind einander äquivalent* [48]).

Dieser Satz erweitert Satz XXV [49]).

§ 19. Von den Eigenschaften des in den §§ 14—18 behandelten Integralbegriffs nennen wir nur:

---

[45]) D. h. $S_\alpha^{(7)}(x)$ ist auf P_k unterhalb und oberhalb totalstetig in bezug auf $\alpha(x)$; siehe die Fußnoten 37 und 39. Man vergleiche Ridder, l. c. [3]), S. 244 (Definition 10*).

[46]) Dies folgt mit Hilfe von oder läßt sich beweisen wie Ridder, l. c. [29]), S. 2 (Satz) und 3 (Satz).

[47]) Dies folgt mit Hilfe von oder läßt sich beweisen wie Ridder, l. c. [29]), S. 6 (Satz).

[48]) Dies läßt sich beweisen wie der Satz in Ridder, l. c. [31]), S. 153.

[49]) Wir bemerken bei den Definitionen 15 bis 18 noch folgendes. Wenn $\alpha(x)$ (monoton) nicht-abnehmend ist in (a, b), *daneben unstetig in den Punkten* (x_n) *von* (a, b), und wenn $f(x)$ eine in (a, b) definierte Funktion ist, welche in den beiderseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ einen linken und einen rechten Wert $f(x^l)$ bzw. $f(x^r)$ hat, so kann man sich (a, b) dadurch vergrößert denken, daß man jeden Unstetigkeitspunkt x_n sich ausbreiten läßt zu einem abgeschlossenen Intervall, z. B. mit der Länge $\alpha(x_n + 0) - \alpha(x_n - 0)$. Dadurch geht (a, b) in ein Intervall I mit der Länge $(b - a) + \sum_{(n)} [\alpha(x_n + 0) - \alpha(x_n - 0)]$ über; $\alpha(x)$ hat sich geändert in

Satz XXIX. *$\alpha(x)$ sei stetig und nicht-abnehmend im abgeschlossenen Intervall (a, b); $F(x)$ sei in (a, b) endlich und linksseitig- und rechtsseitig-approximativ stetig in bezug auf $\alpha(x)$. Läßt sich dann (a, b) überdecken durch eine abzählbare Menge M und abzählbar viele perfekte Mengen H_k, deren jede die Eigenschaft hat, daß:* A. *die Funktion $F_k(x)$, welche in a und b, in den größten, abgeschlossenen, Punkte von H_k enthaltenden Teilintervallen $(i_j^{(k)})$ von (a, b), in deren jedem $\alpha(x)$ konstant ist, und weiter in allen Punkten von H_k mit $F(x)$ zusammenfällt und welche sich linear ändert in den zu der abgeschlossenen Menge $\{(a) + (b) + \sum_{(j)} i_j^{(k)} + H_k\}$ komplementären Teilintervallen $(u_{j'}^{(k)})$ von (a, b), in (a, b) linksseitig und rechtsseitig-approximativ stetig ist in bezug auf $\alpha(x)$, und daß:* B. *in den Punkten von H_k, diejenigen einer abzählbaren Menge M_k ausgenommen, entweder*

$$-\infty < \underline{AD}_{\alpha_k(x),\,l} F_k(x) \leqq \overline{AD}_{\alpha_k(x),\,l} F_k(x) < +\infty$$

oder

$$-\infty < \underline{AD}_{\alpha_k(x),\,r} F_k(x) \leqq \overline{AD}_{\alpha_k(x),\,r} F_k(x) < +\infty$$

oder beides gilt, wobei $\alpha_k(x)$ in der gleichen Weise aus $\alpha(x)$ hervorgegangen sein soll, wie $F_k(x)$ aus $F(x)$,

so wird $F(x) - F(a)$ das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(7)}(x)$ (gemäß Definition 18) *einer Funktion $f(x)$ sein, welche in den Punkten, in denen $AD_{\alpha(x)} F(x)$ existiert, mit dieser zusammenfällt, und übrigens willkürlich ist*[50]).

Wir weisen noch auf den Spezialfall dieses Satzes hin, welchen man erhält bei M leer und nur einer mit (a, b) zusammenfallenden Menge H_k; er ist eine Verallgemeinerung eines bekannten Denjoyschen Satzes über sein allgemeines Integral[51]).

---

eine in I nicht-abnehmende stetige Funktion $\beta(x)$, wenn man $\beta(x)$ sich linear ände n läßt in den aus den Punkten (x_n) hervorgegangenen, abgeschlossenen Intervallen und $\beta(\xi) = \alpha(x)$ setzt in dem durch diese Transformation aus dem Stetigkeitspunkte x von $\alpha(x)$ hervorgegangenen Bildpunkt ξ; $f(x)$ geht über in eine eindeutige Funktion $F(x)$, definiert für alle Punkte von I, wenn man ihr in jedem aus einem einseitigen Unstetigkeitspunkt x_j' von $\alpha(x)$ hervorgegangenen Intervall i_j den konstanten Wert $f(x_j')$ beilegt, und jedes aus einem beiderseitigen Unstetigkeitspunkt x_k'' entstandene Intervall i_k zerlegt in ein linkes Teilintervall i_k^l (offen nach rechts) mit der Länge $\alpha(x_k'') - \alpha(x_k'' - 0)$ und ein (abgeschlossenes) rechtes Teilintervall i_k^r und der Funktion $F(x)$ in i_k^l den Wert $f(x_k''^{\,l})$, in i_k^r den Wert $f(x_k''^{\,r})$ beilegt. *Man kann dann $f(x)$ in (a, b) als integrierbar in bezug auf $\alpha(x)$ betrachten, wenn $F(x)$ in I in bezug auf $\beta(x)$ nach einer der Definitionen* 15 *bis* 18 *integrierbar ist.*

[50]) Dies läßt sich beweisen wie Satz X in Ridder, l. c. [31]), S. 157.

[51]) Ebenso ist der Spezialfall eine Verallgemeinerung von Ridder, l. c. [31]), S. 157 (§ 11, Schluß). Auch der Satz XI, l. c. [31]), S. 159 läßt sich auf $S_\alpha^{(7)}(x)$-Integrale erweitern.

§ 20. $\alpha(x)$ *sei stetig und von beschränkter Variation in* (a, b); $V(x)$ sei ihre Totalvariation über (a, x) für jeden Punkt x von (a, b). Dann hat $\alpha(x)$ in den Punkten von (a, b), eine Menge vom $V(x)$-Maße Null ausgenommen, eine $V(x)$-Ableitung $= +1$ oder -1[10]). Aus jeder in (a, b) eindeutigen Funktion $f(x)$ erhalten wir eine Funktion $g_\alpha(x)$ in dieser Weise: 1. in jedem Punkte x, in welchem $\frac{d\alpha(x)}{dV(x)}$ existiert, sei $g_\alpha(x) = f(x) \times \frac{d\alpha(x)}{dV(x)}$; 2. in den übrigen Punkten von (a, b) sei z. B. $g_\alpha(x) = 0$.

Definition G. Dann soll jede, gemäß Definition E, in (a, b) zu $g_\alpha(x)$ adjungierte $V(x)$-Majorante $\psi_V^{(5)}(x)$ *eine* $\alpha(x)$*-Majorante von* $f(x)$ *in* (a, b) sein.

Definition H. Jede, gemäß Definition F, in (a, b) zu $g_\alpha(x)$ adjungierte $V(x)$-Minorante $\varphi_V^{(5)}(x)$ sei *eine* $\alpha(x)$*-Minorante von* $f(x)$ *in* (a, b).

Definition 19. Wenn, bei $\alpha(x)$ *stetig und von beschränkter Variation in* (a, b), $f(x)$ $\alpha(x)$-Majoranten $\{\psi_V^{(5)}(x)\}$ und $\alpha(x)$-Minoranten $\{\varphi_V^{(5)}(x)\}$ hat und die untere Schranke aller $\psi_V^{(5)}(x)$-Werte und die obere Schranke aller $\varphi_V^{(5)}(x)$-Werte in jedem Punkt x von (a, b) einander gleich sind, so definieren diese gemeinsamen Werte *das unbestimmte* $\alpha(x)$*-Integral* $S_\alpha^{(5)}(x)$ *von* $f(x)$ *in* (a, b).

Satz XXX. *Wenn* $\alpha(x)$ *in* (a, b) *stetig und von beschränkter Variation ist und* $V(x)$ *ihre Totalvariation über* (a, x) *darstellt, wird das unbestimmte* $\alpha(x)$*-Integral* $S_\alpha^{(5)}(x)$ *einer Funktion* $f(x)$ *in* (a, b) *linksseitig- und rechtsseitig-approximativ stetig sein in bezug auf* $V(x)$ *und in allen Punkten von* (a, b), *mit Ausnahme derjenigen einer Menge vom* $V(x)$*-Maße Null, eine approximative* $\alpha(x)$*-Ableitung* $= f(x)$ *haben.*

Der Beweis folgt mit Hilfe von Satz XXIII und Satz XXV.

Definition 19 erweitert die Definition 16; auch die Definitionen 15, 17 und 18 haben mit Definition 19 äquivalente Analoga bei $\alpha(x)$ stetig und von beschränkter Variation in (a, b). So ist Definition 17 analog mit:

Definition 20. $f(x)$ wird in (a, b) *ein unbestimmtes* $\alpha(x)$*-Integral* $S_\alpha^{(6)}(x)$ haben, wobei $\alpha(x)$ *stetig und von beschränkter Variation in* (a, b) und mit der Totalvariation $V(x)$ über (a, x), wenn die folgenden Konstruktionsprinzipien, in jedem Intervall (a, x) angewandt auf $f(x)$, zu einer in (a, b) in bezug auf $V(x)$ sowohl linksseitig- wie rechtsseitig-approximativ stetigen Funktion führen, welche dann $S_\alpha^{(6)}(x)$ sei:

1. wenn $a \leqq c < d \leqq b$ ist und $f(x)$ schon integrierbar ist über jedes Intervall (p, q) mit $c < p < q < d$, soll es immer Teilmengen E_c und E_d von (c, d) geben, welche in c bzw. in d, bei Betrachtung von

$V(x)$ nur in (c, d), eine $V(x)$-Dichte 1 haben, derartig, daß für $p < q$ und $p \varepsilon E_c$, $q \varepsilon E_d$ ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{\substack{p \to c \\ q \to d}} \int_p^q f(x)\, d\alpha(x)$$

existiert, welcher dann das $\alpha(x)$-Integral über (c, d) definiere;

2. und 3., gleichlautend mit den Prinzipien 2. bzw. 3. in Definition 17.

Satz XXXI. *Die Definitionen* 19 *und* 20 *sind einander äquivalent.*

Der Beweis verläuft wie der des Satzes XX [52]).

§ 21. Neben Satz XXIX haben wir den

Satz XXXII. *$\alpha(x)$ sei stetig und von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b); $F(x)$ sei in (a, b) endlich und linksseitig- und rechtsseitig-approximativ stetig in bezug auf die Totalvariation $V(x)$ von $\alpha(x)$ über (a, x). Genügt $F(x)$ dann in bezug auf diese Funktion $\alpha(x)$ von den gleichen Bedingungen wie $F(x)$ in Satz* XXIX *in bezug auf die dort betrachtete monotone Funktion, wobei nur unter* A *„linksseitig- und rechtsseitig-approximativ stetig in bezug auf $V(x)$" gelesen werde,*

so wird $F(x) - F(a)$ das unbestimmte $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(5)}(x)$ (gemäß Definition 19*) einer Funktion $f(x)$ sein, welche in den Punkten, in denen $AD_{\alpha(x)}\, F(x)$ existiert, mit dieser zusammenfällt und übrigens willkürlich ist.*

Beweis. $F(x)$ genügt in bezug auf die Totalvariation $V(x)$ den Bedingungen von Satz XXIX. Dadurch folgt obiger Satz aus den Sätzen XXIX, XXVII, XXVIII und den Definitionen 16 und 19.

---

[52]) Wenn $\alpha(x)$ *von beschränkter Variation und unstetig* ist *in* (a, b), kann man zur $\alpha(x)$-Integration einer in den beiderseitigen Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ (im allgemeinen) zweiwertigen Funktion $f(x)$ das Intervall (a, b) mittels der totalen Variation $V(x)$ von $\alpha(x)$ in gleicher Weise in ein neues Intervall I überführen wie dies in Fußnote 49, für $\alpha(x)$ nicht-abnehmend und unstetig, angegeben wurde. Läßt sich dann die hierbei aus $f(x)$ hervorgegangene eindeutige Funktion $F(x)$ in bezug auf die aus $\alpha(x)$ hervorgegangene Funktion $\beta(x)$, welche in I von beschränkter Variation und stetig ist, über I integrieren nach einer der Definitionen 19 und 20 und betrachten wir dann das $\alpha(x)$-Integral von $f(x)$ über (a, b) als existierend und zwar gleich dem $\beta(x)$-Integral von $F(x)$ über I, so erhalten wir *eine Integration in bezug auf* $\alpha(x)$, welche die von Lebesgue, l. c. [4]), S. 303 und 304 definierte Denjoy-Stieltjessche Integration umfaßt.

Wir bemerken weiter, daß sich auch in bezug auf die von Lebesgue, l. c. [4]), S. 310 betrachteten Funktionen $\{\alpha(x)\}$, welche allgemeiner sind als die stetigen oder unstetigen Funktionen von beschränkter Variation, ein Integrationsverfahren definieren läßt, das ähnlich verläuft wie das in Definition 19 enthaltene; die mit Definition 19 äquivalenten Definitionen, welche Majoranten und Minoranten benutzen, lassen sich diesmal nicht in einfacher Weise übertragen.

Korollar. *Wenn $\alpha(x)$ in (a, b) stetig und von beschränkter Variation ist, wenn $F(x)$ in (a, b) linksseitig- und rechtsseitig-approximativ stetig ist in bezug auf die Totalvariation $V(x)$ und wenn in allen Punkten von (a, b), diejenigen einer abzählbaren Menge ausgenommen, eine endliche einseitige approximative $\alpha(x)$-Ableitung von $F(x)$ existiert, dann wird $F(x) - F(a)$ ein unbestimmtes $\alpha(x)$-Integral $S_\alpha^{(5)}(x)$ (gemäß Definition 19) sein*[53]).

Die elementaren Eigenschaften des Integrals sind bei allen hier eingeführten Integraldefinitionen erhalten geblieben[54]).

Es wäre wohl möglich gewesen, in den Definitionen dieses letzten Kapitels die Bedingungen über linksseitig- und rechtsseitig-approximative Stetigkeit in bezug auf $\alpha(x)$ oder $V(x)$ durch eine weniger fordernde zu ersetzen[55]). Die so elementare Eigenschaft, daß aus der Integration von zwei Funktionen auch die ihrer Summe folgt, bleibt dann nur unter besonderen Bedingungen gültig; darum scheinen uns derartige Erweiterungen weniger wichtig zu sein.

---

[53]) Kennt man außerdem in jedem Punkte, in welchem $A D_{\alpha(x),\,l} F(x)$ bzw. $A D_{\alpha(x),\,r} F(x)$ existiert, ihren Wert, so ist $F(x)$ dadurch bis auf eine additive Konstante bestimmt.

[54]) Dies gilt von den Sätzen 1 bis 4 in Ridder, l. c. [29]), S. 8 und 9. Die Sätze 5, 6 und 7, l. c. S. 9 und 10, lassen sich hier in leicht ersichtlicher Weise auf alle diejenigen $\alpha(x)$-Integrationen übertragen, in welchen $\alpha(x)$ nicht-abnehmend angenommen wurde, wobei dann das Lebesgue-Stieltjessche Integral das L-Integral ersetzen soll.

[55]) Man siehe für in dieser Richtung liegende Integraldefinitionen (mit $\alpha(x) \equiv x$) die folgenden Arbeiten: S. Izumi, Proc. Imp. Ac. Japan 9 (1933), S. 570–573 und 10 (1934), S. 57, 58; J. Ridder, l. c. [31]), S. 162; M. D. Kennedy and S. Pollard, Math. Zeitschr. 39 (1934), S. 432 — 454.

(Eingegangen am 29. Januar 1935.)

Zu der von R. v. Mises gegebenen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zweite Mitteilung:

Allgemeine Wahrscheinlichkeitstheorie.

Von

Karl Dörge in Köln.

Das Ziel meiner unter diesem Titel veröffentlichten Arbeiten[1]) ist es, unter möglichst weitgehender Aufrechterhaltung der beiden v. Misesschen Ansätze, das ist der Definition der Wahrscheinlichkeit als limes der relativen Häufigkeiten und des Prinzips des ausgeschlossenen Spielsystems, die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu axiomatisieren.

Meine Idee ist die: Ich axiomatisiere nicht das einzelne Kollektiv, sondern den Bereich aller „Grundkollektivs" und die „zulässigen" Auswahlen durch Eigenschaften gegeneinander und leite aus den Grundkollektivs durch Operationen alle betrachteten Kollektivs ab. Insbesondere erreiche ich damit, daß ich definieren kann, welche Kollektivs unabhängig sind im Bereich aller Kollektivs und daß ich dann die Multiplikationsregel beweisen kann, ohne dies bei der Definition vorauszusetzen.

In der ersten als Theorie des Glückspiels betitelten Arbeit habe ich vorausgesetzt, daß jedes Grundkollektiv ohne Nachwirkung ist, d. h. daß der Ausfall an irgendeiner Stelle des Kollektivs von dem Ausfall an anderen Stellen unabhängig ist, und daß zwischen je zwei Grundkollektivs eine Abhängigkeit nicht besteht, d. h. daß der Ausfall in einem Kollektiv nicht den Ausfall in den anderen beeinflußt.

In der vorliegenden Arbeit zeige ich, daß sich meine Axiomatisierung auch dann durchführen läßt, wenn die Kollektivs eine Nachwirkung haben und wenn zwischen ihnen eine Abhängigkeit besteht. Viel Neues ist zu den Ansätzen der ersten Arbeit nicht hinzugekommen, vielmehr bildet diese das ganze Gerüst auch der allgemeinen Theorie.

Eine Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der ersten Mitteilung ist für das Folgende nicht erforderlich.

Der Einwand, daß für die Theorie in meiner ersten Note ein nur triviales Beispiel angegeben wird, trifft auch für diese zweite Note zu. Ob die Theorie also jemals innerhalb der Mathematik angewandt werden

---

[1]) Die erste Mitteilung steht in Bd. 32 dieser Zeitschrift.

wird, ist nicht gewiß. Es besteht aber kein Zweifel daran, daß die Physiker von ihren — zu unendlichen idealisierten — Experimentalreihen statt meiner Grundkollektivs das Erfülltsein meiner Axiome annehmen, also sie dauernd anwenden.

Hiermit ist die von mir beabsichtigte Formalisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels unendlicher Folgen abgeschlossen.

Ich hoffe, diese Theorie später zu finitisieren, da selbstverständlich jede Wahrscheinlichkeitstheorie mit unendlichen Versuchsreihen als Elementen nur als eine vereinfachte Theorie der in Wahrheit endlichen Folgen zu gelten hat.

Die vorliegenden Arbeiten behandeln die „Häufigkeitstheorie", das ist die Wahrscheinlichkeitstheorie, welche bei statistischen Untersuchungen gebraucht wird. Ich bin nicht der Meinung, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie damit erschöpft ist, glaube vielmehr, daß für physikalische Probleme noch andere Ansätze benötigt werden. Diese finden sich in allen älteren Lehrbüchern. Ob man sie noch als mathematisch bezeichnen will, ist belanglos.

Was fehlt, ist der Übergang von den physikalischen Ansätzen zur Häufigkeitstheorie. Hier besteht das Anwendungsproblem. Ich werde eine teilweise Antwort auf dieses und auf das Induktionsproblem, d. i. die Frage: Warum induzieren wir mit größerem Recht aus einer größeren Anzahl von Beobachtungen als aus einer kleineren? mitteilen.

Um unwesentliche Weitläufigkeiten zu vermeiden, beschränke ich mich auf Kollektivs mit endlich vielen Merkmalen.

§ 1.

Merkmalfolge, Auswahl, Teilung.

Wenn man das Roulette einmal dreht, so ergibt sich als Resultat des Versuches eine Zahl aus der Reihe 0, 1, 2, ..., 36. Denkt man sich nun den Versuch unendlich oft ausgeführt, so hat man eine unendliche Folge von Elementen erhalten, von denen jedes eine Zahl aus der Reihe 0, 1, ..., 36 ist. Eine solche Folge werden wir als eine Merkmalfolge bezeichnen, die Ziffern (eindimensionalen Punkte) 0, 1, ..., 36 als die Merkmale, die Menge $\{0, 1, \ldots, 36\}$ als die Merkmalmenge. Nun ist die Annahme, daß unendlich oft gespielt sei, eine Idealisation, welcher im Konkreten, genau genommen, nichts entspricht. In einer mathematischen Theorie, wie sie hier entwickelt werden soll, tritt an Stelle der unendlich häufigen Wiederholung ein die unendliche Folge erzeugendes Gesetz. Wir definieren daher so: Definition: $\mathfrak{F}$ sei eine — gesetzlich bestimmte — unendliche Folge von Elementen: $a_1, a_2, \ldots$. Jedes sei ein Punkt aus der

endlichen Punktmenge $M = \{P_1, \ldots, P_l\}$. Dann heißt $\mathfrak{F}$ eine *Merkmalfolge*, jedes P_λ ein *Merkmal* und die Menge M die *Merkmalmenge* von $\mathfrak{F}$.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich nun mit der relativen Häufigkeit des Auftretens der Ziffern 0, 1, ..., 36 in der Folge der Roulettedrehungen, aber auch z. B. in der Folge, die entsteht, wenn man nur auf jedes 10te Element achtet, also $a_{10}, a_{20}, \ldots$. Wir werden sagen, daß diese Folge entsteht durch Anwendung der Auswahl 10, 20, ... Demgemäß definieren wir: Definition: Unter einer *Auswahl* $\mathsf{A} = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ verstehen wir eine unendliche Folge wachsender ganzer positiver Zahlen: $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots$.

Die Dichte der Auswahl A definieren wir so: $z(\nu)$ sei die Anzahl der α unterhalb ν. $\overline{\lim} \frac{z(\nu)}{\nu}$ ist dann die Dichte von A. A heißt dicht, wenn die Dichte von A größer als 0 ist, d. h. wenn es eine kleine positive Zahl η gibt, so daß immer wieder einmal $z(\nu) > \nu \cdot \eta$ ist.

Aus Gründen formaler Vereinfachung werden wir uns später, und zwar von einer Stelle an, wo dies noch ausdrücklich angegeben wird, auf Auswahlen beschränken, welche dicht sind.

Zwei Auswahlen $\mathsf{A} = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und $\mathsf{B} = \beta_1, \beta_2, \ldots$ heißen *gleich*, wenn sie völlig übereinstimmen, d. h. $\alpha_\nu = \beta_\nu$ für alle ν. Weil es sich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung aber immer nur um Grenzwerte von relativen Häufigkeiten handeln wird, wo endlich viele Elemente in den Merkmalfolgen keine Rolle spielen, ist der Begriff der Gleichheit von Auswahlen von geringer Wichtigkeit. Vielmehr heißen A, B *fast gleich*, wenn $\alpha_\nu = \beta_\nu$ für fast alle ν, A, B *fast total verschieden*, wenn $\alpha_\nu \neq \beta_\nu$ für fast alle ν und schließlich A, B *total verschieden*, wenn $\alpha_\nu \neq \beta_\nu$ für alle ν. Endlich heißen in dem einzigen noch übrigen Falle, das ist, wenn $\alpha_\nu = \beta_\nu$ für unendlich viele ν und gleichzeitig $\alpha_\nu \neq \beta_\nu$ für unendlich viele ν, die Auswahlen A und B *halb gleich* oder auch *halb verschieden*.

Man treffe nun aus der Folge der Roulettedrehungen nacheinander erst die Auswahl $\mathsf{A} = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und dann aus dem Resultat die Auswahl $\mathsf{B} = \beta_1, \beta_2, \ldots$. Offenbar hat man dann im ganzen aus der Folge unendlich viele Stellen ausgewählt und zwar die Stellen mit den Indizes $\alpha_{\beta_1}, \alpha_{\beta_2}, \ldots$. Wir definieren daher: Definition: Unter dem *Produkt der beiden Auswahlen* $\mathsf{A} = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\mathsf{B} = \beta_1, \beta_2, \ldots$ verstehen wir die Auswahl $\alpha_{\beta_1}, \alpha_{\beta_2}, \ldots$. Diese bezeichen wir mit $\mathsf{A}\,\mathsf{B}$. Sukzessive ergibt sich dann als Operation, welche entsteht, wenn man beliebig viele Auswahlen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_k$ nacheinander ausführt, wieder eine Auswahl, nämlich ihr Produkt, welches wir mit $\mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2 \ldots \mathsf{A}_k$ bezeichnen.

Bei dieser Multiplikation von Auswahlen gilt offenbar das assoziative Gesetz. Dagegen gilt nicht das commutative Gesetz. Es habeu z. B.,

wenn $\mathsf{A} = 2, 2^2, \ldots$. $\mathsf{B} = 3, 3^2, 3^3, \ldots$ ist, AB und BA sogar kein einziges gemeinsames Element, weil AB nur Ziffern aus A, BA nur solche aus B enthält.

Die Auswahl $\mathsf{E} = 1, 2, 3, \ldots$, die Identität, welche aus jeder Merkmalfolge die ganze Folge auswählt, spielt bei der Auswahlmultiplikation die Rolle der 1, weil offenbar für jedes A ist: $\mathsf{AE} = \mathsf{EA} = \mathsf{A}$.

Wir haben den Begriff Auswahl $\mathsf{A} = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eingeführt, weil wir neben $\mathfrak{F} = a_1, a_2, \ldots$ auch die Teilfolgen $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots$ nötig haben. Wir bezeichnen diese Folge nun mit $\mathfrak{F}\mathsf{A} = a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots$ und nennen $\mathfrak{F}\mathsf{A}$ die Merkmalfolge, welche *durch Anwendung der Auswahl* A *auf die Merkmalfolge* $\mathfrak{F}$ *oder durch Auswahl* A *aus* $\mathfrak{F}$ *entsteht.*

Man denke sich in einem Roulettesaal zwei Roulettes betrieben. Das erste liefert — idealisiert — die Merkmalfolge $\mathfrak{F}_1 = a_1, a_2, \ldots$. das zweite $\mathfrak{F}_2 = b_1, b_2, \ldots$. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat sich dann u. a. auch dafür zu interessieren, wann z. B. gleichzeitig, d. h. an gleicher Stelle ν bei $\mathfrak{F}_1$ eine gerade Ziffer und bei $\mathfrak{F}_2$ irgendein vorgegebenes Resultat erscheint. Es handelt sich hier um die Betrachtung der Teilfolge, welche aus $\mathfrak{F}_2$ entsteht, indem man die Elemente herausgreift an den Stellen, an welchen in $\mathfrak{F}_1$ eine gerade Ziffer herauskommt. Das geschieht durch eine Auswahl aus $\mathfrak{F}_2$ und zwar eine solche, die durch eine andere Merkmalfolge definiert ist, physikalisch könnte man sagen, eine Auswahl, welche nicht durch ein arithmetisches Gesetz, sondern durch Naturereignisse bestimmt ist. Gleichwohl muß zur Vermeidung von Mißverständnissen betont werden, daß in unserer mathematischen Theorie andere als durch ein mathematisches Gesetz bestimmte Auswahlen nicht möglich sind, insbesondere ist auch die betrachtete Auswahl, da die Merkmalfolgen, insbesondere also $\mathfrak{F}_1$, durch ein mathematisches Gesetz bestimmt sind, durch eine mathematische Vorschrift charakterisiert. Etwas allgemeiner ist die entsprechende Betrachtung von $\mathfrak{F}_1\mathsf{A}$ und $\mathfrak{F}_2$, wo also zuerst aus $\mathfrak{F}_1$ eine Teilfolge herausgegriffen wird und diese Teilfolge dann benutzt wird, um aus $\mathfrak{F}_2$ auszuwählen. Die Auswahlen dieses betrachteten Typus sind so bestimmt: Definition: $\mathfrak{F} = a_1, a_2, \ldots$ sei eine Merkmalfolge, M ihre Merkmalmenge. $N < M$ eine Teilmenge von M. A sei eine Auswahl. Aus $\mathfrak{F}\mathsf{A} = a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots$ greife man alle Elemente heraus, die zu N gehören. Sie mögen, nach den Indizes geordnet, sein: $a_{\alpha_{\gamma_1}}, a_{\alpha_{\gamma_2}}, \ldots$. Wir nehmen an, diese Folge möge nicht abbrechen. Dann ist $\mathsf{T} = \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eine Auswahl. Wir sagen, diese sei die *Teilung von* $\mathfrak{F}\mathsf{A}$ *auf* N und bezeichnen sie als $\mathsf{T}(\mathfrak{F}\mathsf{A}, N)$. Wir benutzen auch die Bezeichnung $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{F}, N)$ und sprechen von der Teilung von A an $\mathfrak{F}$ auf N.

$\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{F}, N)$ besteht also aus den Stellen, an welchen $\mathfrak{F}\mathsf{A}$ ein Element aus der Teilmenge N von der Merkmalmenge M von $\mathfrak{F}$ hat.

Es ist nun unbequem, daß $\mathsf{T}(\mathfrak{F}\mathsf{A}, N)$ nicht für alle A, N definiert ist, sondern nur dann, wenn unbegrenzt viele Stellen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ herauskommen. Um diesen Ausnahmefall formal nicht ausschalten zu müssen, führen wir daher noch eine uneigentliche Auswahl Λ ein, indem wir festsetzen:

Definition: Wenn $\mathfrak{F}\mathsf{A}$ entweder gar keine oder nur endlich viele Elemente hat, welche zu N gehören, so ist bisher $\mathsf{T}(\mathfrak{F}\mathsf{A}, N)$ nicht definiert. Wir setzen $\mathsf{T}(\mathfrak{F}\mathsf{A}, N)$ dann gleich Λ und nennen Λ auch eine Auswahl, *die uneigentliche Auswahl.*

Die Definition des Produktes von Auswahlen ergänzen wir jetzt nach Einführung von Λ noch durch die Festsetzung: Produkte von Auswahlen, in denen der Faktor Λ vorkommt, sind gleich Λ zu setzen.

Sind $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ zwei Merkmalfolgen, und bildet man $\mathfrak{F}_1' = \mathfrak{F}_1\mathsf{T}(\mathfrak{F}_2, N)$, so entsteht dies durch eine Auswahl aus $\mathfrak{F}_1$ und zwar sagen wir, $\mathfrak{F}_1'$ *entsteht durch Teilung an* $\mathfrak{F}_2$. $\mathfrak{F}_1\mathsf{T}(\mathfrak{F}_1, N)$ ist die Merkmalfolge, welche entsteht, wenn man in $\mathfrak{F}_1$ alle Glieder fortläßt bis auf die, welche zur Teilmenge N gehören. Wenn man also nur auf Elemente aus N achtet. Definition: Wir bezeichnen $\mathfrak{F}_1\mathsf{T}(\mathfrak{F}_1, N)$ auch mit $\mathfrak{F}_{1N}^*$ oder, wenn N bekannt ist, mit $\mathfrak{F}_1^*$ und sagen, dies entstehe durch — *eigentliche oder echte* — *Teilung* von $\mathfrak{F}_1$ auf N.

§ 2.

Wahrscheinlichkeit, Additionsregel, Divisionsregel.

$\mathfrak{F} = a_1, a_2, \ldots$ sei eine Merkmalfolge, $M = \{P_1, \ldots, P_l\}$ ihre Merkmalmenge. Man greife P_λ heraus. Die Anzahl, wie oft unter $a_1, \ldots, a_\nu$ das P_λ vorkommt, werde mit $z(\nu)$ bezeichnet. $\frac{z(\nu)}{\nu}$ ist dann die relative Häufigkeit von P_λ in $\mathfrak{F}$.

Definition: Wenn $\lim\frac{z(\nu)}{\nu}$ existiert, so sagen wir, dieser limes sei die *Wahrscheinlichkeit von* P_λ *in* $\mathfrak{F}$ und setzen $\lim\frac{z(\nu)}{\nu} = w(P_\lambda)$. Offenbar ist $w(P_\lambda)$ eine Zahl zwischen 0 und 1.

Ist $w(P_\lambda) = 0$, so heißt dies, daß P_λ schließlich selten in $\mathfrak{F}$ auftritt, es bedeutet aber nicht, daß das Auftreten von P_λ in $\mathfrak{F}$ unmöglich ist. Ebenso bedeutet $w(P_\lambda) = 1$, daß P_λ sehr oft, jedoch nicht, daß es mit Sicherheit immer in $\mathfrak{F}$ auftritt.

Wenn jedes Merkmal $P_1, \ldots, P_l$ von $\mathfrak{F}$ eine Wahrscheinlichkeit $w(P_1), \ldots, w(P_l)$ hat, so nennen wir das System dieser Zahlen die *Verteilung von* $\mathfrak{F}$ und kürzen dies ab mit $\mathfrak{V}$. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat es fast ausschließlich nur mit Merkmalfolgen zu tun, zu welchen Verteilungen gehören.

$\mathfrak{F}$ habe jetzt eine Verteilung und es sei N Teilmenge von M, nämlich $N = \{P_{\alpha_1} \dots P_{\alpha_k}\}$[2]). $z_N(\nu)$ gebe an, wie oft unter den $a_1, \dots a_\nu$ ein Element aus N vorkommt. Dann ist offenbar $z_N(\nu) = z_{P_{\alpha_1}}(\nu) + \dots + z_{P_{\alpha_k}}(\nu)$, also ist $\lim \frac{z_N(\nu)}{\nu}$ vorhanden und zwar gleich $w(P_{\alpha_1}) + \dots + w(P_{\alpha_k})$. Wir setzen $\lim \frac{z_N(\nu)}{\nu} = w(N)$ und nennen es die *Wahrscheinlichkeit von N in $\mathfrak{F}$*. Offenbar ist dies wieder eine Zahl zwischen 0 und 1. Sind N und L zwei elementfremde Teilmengen von M, $N = \{P_{\alpha_1}, \dots P_{\alpha_k}\}$, $L = \{P_{\beta_1}, \dots P_{\beta_l}\}$, so ist offenbar $w(N+L) = \Sigma w(P_{\alpha_\varkappa}) + \Sigma w(P_{\beta_\lambda})$, also $= w(N) + w(L)$. Offenbar ergibt sich entsprechend für endlich viele, je zwei elementfremde Teilmengen von $M: N_1, N_2, \dots N_s: w(M) = \Sigma w(N_\sigma)$, das ist die *Additions- oder Mischungsregel.*

Schließlich gilt auch schon jetzt, also bevor wir über die Merkmalfolgen irgendwelche Axiome gefordert haben: Satz: *$\mathfrak{F}$ habe die Merkmalmenge M. Es sei $N < M$, $w(N) \neq 0$. Dann gilt: Wenn zu $\mathfrak{F}$ eine Verteilung $\mathfrak{B}$ gehört, so gehört auch zu $\mathfrak{F}_N^*$ eine Verteilung. Man bezeichne dann die Wahrscheinlichkeiten in $\mathfrak{F}$ mit w, in $\mathfrak{F}^*$ mit w^*. Dann gilt für jede Teilmenge A von N:*

$$w^*(A) = w(A) \cdot \frac{1}{w(N)}.$$

Beweis: Es genügt offenbar wegen der Additionsregel, den Satz für die speziellen Teilmengen von N zu beweisen, welche nur aus einem Punkte bestehen. Es sei also P_λ ein Punkt von N. Ferner sei $\mathfrak{F}_N^* = a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2} \dots$. Wir suchen nun unter diesen diejenigen auf, welche P_λ sind, diese bezeichne man fortlaufend mit $a_{\alpha_{\beta_1}}, a_{\alpha_{\beta_2}}, \dots$. $z(\varrho)$ sei die Anzahl der P_λ aus $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots a_{\alpha_\varrho}$. Wir haben zu untersuchen $\frac{z(\varrho)}{\varrho}$. Wenn nun die Folge der $\beta_1, \beta_2, \dots$ nur aus endlich vielen Zahlen besteht, so ist offenbar $w^*(P_\lambda) = 0$ und $w(P_\lambda) = 0$ und dann stimmt offenbar die Behauptung. Andernfalls kann man die ϱ von der Stelle β_1 ab einschließen in ein Intervall $\beta_\nu, \beta_{\nu+1}$, so daß $\beta_\nu \leqq \varrho < \beta_{\nu+1}$. $z(\varrho)$ ist dann offenbar ν und die relative Häufigkeit $\frac{z(\varrho)}{\varrho}$ liegt zwischen $\frac{\nu}{\beta_\nu}$ und $\frac{\nu}{\beta_{\nu+1}}$. Mit wachsendem ϱ wächst ν nun über alle Grenzen und es ist unter Berücksichtigung von

$$w(N) \neq 0 \text{ der } \lim \frac{\nu}{\beta_\nu} = \lim \frac{\nu}{\alpha_{\beta_\nu}} \cdot \frac{\alpha_{\beta_\nu}}{\beta_\nu} = w(P_\lambda) \cdot \frac{1}{w(N)}.$$

---

[2]) Wir werden später auch sagen: N ist ein neues Merkmal, welches aus $P_{\alpha_1}, \dots, P_{\alpha_k}$ durch Mischung entsteht.

Ferner ist

$$\frac{\nu}{\beta_{\nu+1}} = \frac{\nu+1}{\beta_{\nu+1}} - \frac{1}{\beta_{\nu+1}}$$

und daher auch

$$\lim \frac{\nu}{\beta_{\nu+1}} = w(P_i) \cdot \frac{1}{w(N)}.$$

Mithin ist wirklich $\lim \frac{z(\varrho)}{\varrho}$ vorhanden und ist gleich $w(P_i) \frac{1}{w(N)}$, w. z. b. w. Offenbar sind nach diesem Satz die Wahrscheinlichkeiten der Punkte aus N in $\mathfrak{F}^*$ auch so bestimmt: Die Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten sind die gleichen wie in $\mathfrak{F}$. Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 sein muß, sind sie wirklich dadurch bestimmt.

§ 3.

Die Axiome.

Die fortgesetzten Würfe mit einem Würfel geben, idealisiert, eine Merkmalfolge mit den Merkmalen 1, 2, ..., 6. Ist der Würfel symmetrisch, so sind die Wahrscheinlichkeiten, wie wir annehmen, jede $\frac{1}{6}$. Ist nun an einer Stelle die Augenzahl 5 gefallen, so wird dadurch, wie wir annehmen, das Resultat des folgenden Wurfes in keiner Weise beeinflußt oder, was dasselbe nach unserer Auffassung präziser beschreibt: Greift man aus der Folge nur die Würfe heraus, die unmittelbar hinter einem Wurf mit dem Resultat 5 kommen, so erhält man eine neue ausgewählte Merkmalfolge, in der aber die Wahrscheinlichkeiten sich keineswegs geändert haben. Allgemeiner: Trifft man aus der Folge zwei fast total verschiedene Auswahlen, so erhält man zwei Merkmalfolgen, zwischen deren Wahrscheinlichkeiten eine Abhängigkeit nicht besteht. Diese Eigenschaft der Würfelfolge ist es, die wir durch die Bezeichnung „*ohne Nachwirkung*" bezeichnen und welche im folgenden durch die Axiome präzisiert wird. Nicht alle Merkmalfolgen sind ohne Nachwirkung. Verfolgt man die Todesursachen der Einwohner einer Stadt, indem man feststellt, ob die Personen an einer ansteckenden Krankheit gestorben sind oder nicht, so erhält man — idealisiert — eine Merkmalfolge, welche jetzt jedoch — wie ich annehme — die Eigentümlichkeit hat: Hinter der Todesursache ansteckende Krankheit kommt häufiger die gleiche Todesursache als der Wahrscheinlichkeit in der Gesamtfolge entspricht, mit anderen Worten, greift man die Todesfälle heraus unmittelbar hinter einem durch ansteckende Krankheit, so erhält man eine neue Folge, und hierin hat die Ursache: ansteckende Krankheit eine größere Wahrscheinlichkeit als in der ursprünglichen Folge. In diesem Todesregister gibt es also eine Nachwirkung.

Hat man die Geburtenregister zweier benachbarter Städte, in denen das Geschlecht der Neugeborenen eingetragen ist, so können wir aus der Kenntnis des einen Registers nichts über das andere schließen. Hat man dagegen die Todesregister der Städte, enthaltend die Angaben, ob die Todesursache eine ansteckende Krankheit war oder nicht, so übt die Ursache ansteckende Krankheit auf die gleiche beim anderen Register, weil die beiden Städte benachbart sein sollten, eine Anziehung aus. Die Merkmalfolgen, die die Idealisierungen der Geburtenregister sind, nennen wir daher *fremd*, die der Todesregister nennen wir *verwandt*. Die Verwandtschaftsbeziehung wird im folgenden durch die Axiome präzisiert werden. Alle verwandten Merkmalfolgen werden wir zusammenfassen zu „Familien".

Als die Hauptelemente der aufzustellenden Wahrscheinlichkeitstheorie sind uns vorgelegt endlich oder unendlich viele Merkmalfolgen, die eindeutig zu Familien zusammengefaßt sind mit je endlich oder unendlich vielen Familiengliedern: $\mathfrak{G}_{11}, \mathfrak{G}_{12}, \ldots; \mathfrak{G}_{21}, \mathfrak{G}_{22}, \ldots; \ldots \mathfrak{G}_{k1}, \mathfrak{G}_{k2}, \ldots; \ldots$. Diese Merkmalfolgen heißen die *Grundkollektivs*. Als erstes Axiom fordern wir:

Axiom I: *Jedes Grundkollektiv hat eine Verteilung.*

Die $\mathfrak{G}$ mit gleichem ersten Index bilden eine *Familie*. Zwei $\mathfrak{G}$ derselben Familie heißen *verwandt*, zwei $\mathfrak{G}$ mit verschiedenen ersten Indizes heißen *fremd*. Manche der $\mathfrak{G}$ heißen *ohne Nachwirkung*, manche *mit Nachwirkung*.

Dann gilt: Sind zwei Grundkollektivs einem dritten verwandt, dann sind sie untereinander verwandt.

Die Bezeichnung der $\mathfrak{G}$ mit Doppelindizes ist gewählt worden, um zu Anfang die Einteilung in Familien, die über das Verhalten der Grundkollektivs zueinander alles entscheiden wird, anschaulich zu betonen. Im folgenden sollen jedoch der Einfachheit halber die Grundkollektivs auch bezeichnet werden als $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ oder $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}', \ldots$ oder ähnlich. Die Schreibweisen $\mathfrak{G} \, v \, \mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G} \, f \, \mathfrak{G}'$ bedeuten dann: $\mathfrak{G}$ verwandt $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}$ fremd $\mathfrak{G}'$. Die Grundkollektivs werden nun außer dem gänzlich unproblematischen ersten Axiom weiteren Forderungen unterworfen werden. Als charakteristische Forderung seiner Theorie hat von Mises folgendes verlangt: Trifft man aus einem Grundkollektiv irgendeine Auswahl, ohne dabei die Merkmale der auszuwählenden Elemente zu benutzen, so erhält man eine neue Merkmalfolge mit ungeänderter Verteilung. Das ist die Forderung des ausgeschlossenen Spielsystems. Die Folge von Roulettedrehungen wird, idealisiert, aufgefaßt als ein Grundkollektiv und dann wird gesagt: Wenn man irgendwie auswählt — nur darf man nicht gerade z. B. sagen: Ich wähle die Drehungen, wo ein vorgegebenes Merkmal herauskommt, allgemeiner, man darf nicht die Merkmale der auszu-

wählenden Stellen schon benutzen — so ist es unmöglich, die ursprünglichen Grenzwerte der relativen Häufigkeiten der Ziffern 0, 1, ... 36 zu verändern. Meiner Ansicht nach wird hiermit zu viel verlangt. Ich lege daher, und es ergibt sich, daß dies ausreicht, der Theorie irgendeinen fest umrissenen Bereich von „Stellenauswahlen" zugrunde durch die *Definition:* Neben den Grundkollektivs $\mathfrak{G}$ habe man noch eine Gruppe[3]) von Auswahlen fest vorgegeben, bestimmt durch mathematische Gesetze. Diese Auswahlen bezeichne man mit Σ, Σ_1, ... und nenne sie die *„Stellenauswahlen"*. Die Gruppe bezeichne man mit $\mathfrak{S}$. Wir haben jetzt die Grundkollektivs und die Stellenauswahlen Σ. *Diese sind die (einzigen) Elemente, und deren Gesamtheit wird nicht mehr erweitert werden. Außerdem ist uns noch allein vorgegeben bei den verwandten Grundkollektivs ihre Verwandtschaft, d. h. wie wir später präzis formulieren werden, wir wissen, wie die Wahrscheinlichkeiten sich abändern, wenn man an verwandten Grundkollektivs teilt.*

Wendet man nun auf die Grundkollektivs jedesmal alle Stellenauswahlen an, so erhält man neue Merkmalfolgen, ich nenne sie von *erster Art*, und wir werden nunmehr verlangen, daß bei dieser Auswahl die Verteilungen der Grundkollektivs ungeändert bleiben. Hat man im Bereich dieser abgeleiteten Merkmalfolgen erster Art zwei, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{G}_1 \Sigma_1$, $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{G}_2 \Sigma_2$, so werden wir auch die Frage zu beantworten haben: Was geschieht, wenn man in $\mathfrak{F}_1$ nur auf die Stellen achtet, bei denen in $\mathfrak{F}_2$ ein vorgegebenes Resultat auftritt? Das ist eine Frage an die Merkmalfolge, die aus $\mathfrak{F}_1$ entsteht durch eine Teilung an $\mathfrak{F}_2$: $\mathfrak{F}_1 \mathsf{T} (\mathfrak{F}_2, \ldots)$ $= \mathfrak{G}_1 \Sigma_1 \mathsf{T} (\Sigma_2, \mathfrak{G}_2, \ldots)$. Man wird also durch die Gruppe der Stellenauswahlen dazu geführt, daneben die Teilungen der Σ an den $\mathfrak{G}$ zu betrachten, diese nenne man die *Teilungen erster Art*, und dann die Produkte der Stellenauswahlen mit den Teilungen erster Art auf die $\mathfrak{G}$ anzuwenden. Diese Produkte nenne man die *Auswahlen zweiter Art*. Wendet man eine solche auf ein $\mathfrak{G}$ an, so erhält man eine abgeleitete Merkmalfolge zweiter Art. Die Teilungen einer Auswahl zweiter Art an einem $\mathfrak{G}$ nenne man Teilungen zweiter Art. Die Produkte von Auswahlen höchstens zweiter Art mit Teilungen zweiter Art nenne man Auswahlen dritter Art. Die Merkmalfolgen, welche durch solche Auswahlen, angewandt auf die $\mathfrak{G}$, entstehen, heißen abgeleitete Merkmalfolgen dritter Art. Man sieht: Nachdem man, so fortschreitend, die Auswahlen ν-ter Art und die abgeleiteten Merkmalfolgen ν-ter Art erhalten hat, ergeben sich Aufgaben, welche dazu führen, noch die Teilungen der Auswahlen ν-ter Art an den $\mathfrak{G}$, die Teilungen

[3]) Unter einer Gruppe von Auswahlen verstehe ich eine Gesamtheit, welche neben je zwei auch deren Produkt enthält.

ν-ter Art, und die Produkte von Auswahlen höchstens ν-ter Art mit Teilungen ν-ter Art einzuführen, *die (zusammengesetzten) Auswahlen* $(\nu+1)$*-ter Art.* Diese erzeugen aus den Grundkollektivs die *abgeleiteten Merkmalfolgen* $(\nu+1)$*-ter Art.*

Definition: Zu den Stellenauswahlen, welche als die Auswahlen erster Art definiert sind, nehme man hinzu die Auswahlen ν-ter Art (für alle $\nu = 1, 2, \ldots$). Diese Gesamtheit bildet offenbar eine Gruppe. *Man nenne sie die Gruppe* $\hat{\mathfrak{S}}$. Durch die Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist somit die ursprüngliche Gruppe $\mathfrak{S}$ der Stellenauswahlen vergrößert worden zu der umfassenderen Gruppe $\hat{\mathfrak{S}}$, welche nicht mehr nur aus Stellenauswahlen besteht, sondern welche zwar alle Stellenauswahlen enthält, außerdem aber, wenn sie die Auswahl A enthält, auch daneben jede Teilung $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}, \ldots)$ enthält, ferner neben irgendwelchen Auswahlen auch deren Produkt.

Die Gruppe $\hat{\mathfrak{S}}$ kann mithin offenbar auch so charakterisiert werden:

1. Sie ist eine Menge, welche jede Stellenauswahl enthält.
2. Wenn A zu $\hat{\mathfrak{S}}$ gehört, so auch $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}, \ldots)$ für jedes $\mathfrak{G}$.
3. $\hat{\mathfrak{S}}$ ist eine Gruppe.
4. Unnötig, d. h. außer zur Genüge der Forderungen 1, 2, 3, werden nicht Elemente in $\hat{\mathfrak{S}}$ aufgenommen, d. h. $\hat{\mathfrak{S}}$ ist die kleinste Gruppe (der Durchschnitt aller Gruppen) mit den Eigenschaften 1, 2, 3.

Über die Elemente von $\hat{\mathfrak{S}}$ gilt folgender Satz:

Definition: Unter einem *Normalprodukt* verstehe man ein Produkt von Stellenauswahlen und von Teilungen von Auswahlen aus $\hat{\mathfrak{S}}$ an irgendwelchen Grundkollektivs $\mathfrak{G}$. Dann gilt: Jedes Element aus $\hat{\mathfrak{S}}$ läßt sich als Normalprodukt darstellen.

Beweis: $\hat{\mathfrak{S}}$ besteht per definitionem aus allen Auswahlen ν-ter Art für $\nu = 1, 2, \ldots$. Wir schließen dann von ν auf $\nu+1$. Die Auswahlen erster Art sind selbst Stellenauswahlen, für sie gilt also die Behauptung. Die Auswahlen $(\nu+1)$-ter Art sind definiert als die Produkte von Auswahlen höchstens ν-ter Art mit Teilungen von Auswahlen ν-ter Art. Diese Teilungen sind selbstverständlich Teilungen von Auswahlen aus $\hat{\mathfrak{S}}$ und für die Auswahlen höchstens ν-ter Art gilt der Satz bereits nach unserer Annahme. Daraus folgt die Behauptung.

Wir wissen damit: Jede Auswahl aus $\hat{\mathfrak{S}}$ kann geschrieben werden in der Form $\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_k$ (wo jedes $\mathsf{P}_\varkappa$ entweder ein Σ ist oder ein $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}, \ldots)$), mit einem zu $\hat{\mathfrak{S}}$ gehörenden A. Es ist hingegen nicht behauptet worden, daß etwa diese Darstellung eindeutig ist.

Unsere Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestehen darin, daß wir, nachdem wir zunächst verlangt haben, daß die Grundkollektivs eine Verteilung haben, nun fordern, was mit dieser Verteilung geschieht, wenn

wir aus den Grundkollektivs durch Auswahl neue Merkmalfolgen ableiten. Welche Auswahlen hierbei betrachtet werden, ist zunächst durch Konstruktion von $\hat{\mathfrak{S}}$ eingeschränkt worden. In Wirklichkeit war diese Konstruktion noch ein wenig zu grob, und wir werden jetzt für die Elemente von $\hat{\mathfrak{S}}$ bestimmen, welche wir außer Acht lassen — wir werden sie irregulär nennen — und welchen wir ihr Verhalten gegenüber den Grundkollektivs vorschreiben. Diese Vorschriften sind unsere Forderungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wegen des letzten Satzes haben wir für die zu betrachtenden Auswahlen aus $\hat{\mathfrak{S}}$ die bequeme Darstellung als Normalprodukte. Wir werden uns in den Normalprodukten die Faktoren der Reihe nach einzeln ansehen, das sind die Stellenauswahlen und die Teilungen und werden dann von den Faktoren an ihrer Stelle im Normalprodukt einzeln verlangen, wie sie auf die Grundkollektivs einwirken sollen.

Nun machen wir vorerst diese Vorbemerkung: Das Normalprodukt $\Pi = \mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_k$ möge an der Stelle P_k eine Teilung $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}', N)$ enthalten. Es soll nun Π angewandt werden auf $\mathfrak{G}$. Man kann das auch so machen. Man bilde erst $\mathfrak{G} \cdot (\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_{k-1}) = \mathfrak{F}$ und dann $\mathfrak{F} \cdot \mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}', N)$. Nehmen wir an, wir wüßten bereits irgendwoher, daß die Teilfolge $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ eine Verteilung hat. $\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_{k-1}$ setze man gleich Γ. Auf $\mathfrak{G}\Gamma$ wird dann angewandt $\mathsf{T}(\mathfrak{G}'\mathsf{A}, N)$. Man erinnere sich nun an die in § 2 besprochene Operation der echten Teilung. Wenn nämlich $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$ ist und $\mathsf{A} = \Gamma$, so haben wir genau diesen Fall vor uns. Wenn dann noch die Wahrscheinlichkeit von N in $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}\Gamma$ nicht gerade verschwindet, dann wissen wir, daß bei der Teilung $\mathsf{T}(\mathfrak{G}\mathsf{A}, N)$ die Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten der Merkmale von N ungeändert bleiben. Beachten wir also, daß in diesem Falle nichts zu verlangen ist, daß wir also hier gebunden sind durch den Satz aus § 2.

Wie aber, wenn die Wahrscheinlichkeit von N in $\mathfrak{F}$ verschwindet? Dieser Fall ist von geringer Wichtigkeit und zur formalen Vereinfachung der Theorie soll er verboten werden. In diesem Falle ist die Auswahl $\mathsf{T}(\mathfrak{G}\mathsf{A}, N)$ offenbar nicht dicht. Erst recht ist dann offenbar das Normalprodukt $\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_k$ nicht dicht. Ich werde nicht dichte Normalprodukte später nicht mehr in Betracht ziehen, indem ich sie in die Klasse der irregulären Normalprodukte tue, in welcher alles Unangenehme oder zu Schwierige abgelegt wird. Dazu setze ich jetzt nachträglich fest: *Jede Stellenauswahl aus* $\mathfrak{S}$ *ist dicht.*

Definition: Eine *nicht dichte Teilung* in einem Normalprodukte heißt bezüglich jedes Grundkollektivs $\mathfrak{G}$ irregulär.

Folgerung: *Mithin sind jetzt alle Normalprodukte ohne eine irreguläre Teilung (bezüglich irgendeines* $\mathfrak{G}$*) dicht.*

Nach dieser, den Ausschluß der nicht dichten Auswahlen erläuternden Vorbemerkung nehme man irgendein Normalprodukt $\Pi = \mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_k$ und irgendein Grundkollektiv $\mathfrak{G}$. $\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_{k-1}$ heißt der *Abschnitt von* P_k *innerhalb* Π. Er sei $\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_{k-1} = \Gamma$. Nehmen wir einmal an, wir wüßten bereits, daß $\mathfrak{G}\Gamma$ wieder eine Verteilung hat. Was wird nun vermutlich geschehen, wenn wir P_k anwenden?

I. P_k sei eine Stellenauswahl. Dann werden wir verlangen (in Übereinstimmung mit der Erfahrungstatsache, daß z. B. beim Glücksspiel bei hinreichend langem Spiel noch immer der Unternehmer gewonnen hat), daß $(\mathfrak{G}\Gamma)\mathsf{P}_k$ wieder eine Verteilung hat, und zwar wieder die gleiche wie $\mathfrak{G}\Gamma$.

II. P_k sei eine Teilung: $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}', N)$. Diese Auswahl T sei dicht.

1.) Und es sei $\mathfrak{G} f \mathfrak{G}'$. $\mathfrak{G}\Gamma$ ist jetzt eine Teilfolge von $\mathfrak{G}$. Aus dieser wird ausgewählt mit Hilfe des Ausfalls von $\mathfrak{G}'\mathsf{A}$. Nun sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ fremd, daher besteht, wie wir annehmen, zwischen $\mathfrak{G}\Gamma$ und $\mathfrak{G}'\mathsf{A}$ kein Zusammenhang. Wir werden daher fordern, daß $(\mathfrak{G}\Gamma)\mathsf{P}_k$ wieder eine Verteilung hat und wieder dieselbe wie $\mathfrak{G}\Gamma$. Im Falle II_1, der bei weitem der wichtigste ist, werden wir die Teilung T „*in* Π *einfach regulär bezüglich* $\mathfrak{G}$“ nennen.

Von den Fällen $\mathfrak{G} v \mathfrak{G}'$ heben wir hervor:

2.) $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}$ ohne Nachwirkung, A fast total verschieden zu Γ. Dann sind $\mathfrak{G}\Gamma$ und $\mathfrak{G}\mathsf{A}$ zwar demselben Grundkollektiv entnommen, es sind aber höchstens endlich oft dieselben Stellen ausgewählt. Ferner ist dieses $\mathfrak{G}$ ohne Nachwirkung. Zwischen $\mathfrak{G}\Gamma$ und $\mathfrak{G}\mathsf{A}$ besteht daher wiederum keine Abhängigkeit. Wir werden daher wieder fordern, daß $(\mathfrak{G}\Gamma)\mathsf{P}_k$ die gleiche Verteilung hat wie $\mathfrak{G}\Gamma$. Im Falle II_2 heißt T „*im* Π *bezüglich* $\mathfrak{G}$ *kritisch regulär*“.

3.) $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, $\Gamma = \mathsf{A}$. Das ist der vorweggenommene Fall, wo $\mathfrak{G}\Gamma$ einer echten Teilung unterworfen wird und hier ist durch den Satz in § 2 bereits bestimmt, was geschieht. In diesem Falle heißt T „*in* Π *bezüglich* $\mathfrak{G}$ (*kritisch*) *singulär*“.

Es bleiben noch übrig die Fälle: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}$ mit Nachwirkung; $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}$ ohne Nachwirkung, Γ, A halb gleich; $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}'$ aber $\mathfrak{G} v \mathfrak{G}'$, im Ganzen bleiben also übrig $\mathfrak{G} v \mathfrak{G}'$ bis auf II_2, II_3. Jetzt wird also $\mathfrak{G}\Gamma$ geteilt an $\mathfrak{G}'\mathsf{A}$ und es sind $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ verwandt. Die beiden vorgenommenen Fälle II_2, II_3 sind offenbar die einzigen, in welchen ohne Rücksicht auf die spezielle Verwandtschaft zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ eine Aussage erwartet werden kann. Liegt jedoch eine konkrete Theorie vor, so wird, wenn eben überhaupt die Verwandschaften der Grundkollektivs ins Gewicht fallen, in einigen weiteren Fällen bekannt sein, wie hier P_k die Verteilung von $\mathfrak{G}\Gamma$ abändert. Es kommt nunmehr darauf an, was wir

über die Verwandtschaft der Grundkollektivs wissen. Da hier alles möglich ist, können wir hier eine spezielle Annahme nicht allgemein machen. Wir nehmen aber an: Uns ist von vornherein bekannt bei einigen Paaren von Grundkollektivs $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ und einigen Paaren von Auswahlen Γ, A — es spielen nur solche aus $\hat{\mathfrak{S}}$ eine Rolle —, wobei $\mathfrak{G}\Gamma$ wieder eine Verteilung hat, wie sich diese abändert bei der Teilung $\mathsf{T}(\mathfrak{G}', \mathsf{A}, N)$, wobei N eine Teilmenge der Merkmalmenge von $\mathfrak{G}'$ ist. Wir wollen dann die Teilung T hinter Γ für $\mathfrak{G}$ wesentlich kritisch nennen. Ist nun im Normalprodukt Π der Faktor $\mathsf{P}_k = \mathsf{T}(\mathfrak{G}'\mathsf{A}, N)$, $\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_{k-1} = \Gamma$ und T wesentlich kritisch bezüglich $\mathfrak{G}$ hinter Γ, so heiße T *in Π bezüglich $\mathfrak{G}$ wesentlich kritisch*. Wenn wir dann also die Verteilung von $\mathfrak{G}\Gamma$ noch kennen, so ist uns mithin durch unsere vorgegebene Bekanntschaft mit der Verwandtschaft von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ auch die Verteilung von $\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_k$ bekannt.

Wissen wir hingegen nichts über die Einwirkung von T auf $\mathfrak{G}\Gamma$, ist uns also nicht genug über die Verwandtschaft von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ bekannt, so heiße T *in Π bezüglich $\mathfrak{G}$ irregulär*.

Schließlich heißt die Teilung T *in Π bezüglich jedes $\mathfrak{G}$ irregulär*, wenn sie nicht dicht ist.

Von den Teilungen eines Normalproduktes haben somit je nach ihrer Stellung im Normalprodukt bezüglich eines jeden Grundkollektivs $\mathfrak{G}$ einige die Bezeichnung irregulär erhalten. Von ihnen wissen wir nicht, wie sie bei Anwendung von Π auf $\mathfrak{G}$ wirken, die übrigen aber, und das sind wegen II_1 die wichtigsten und sozusagen die meisten, sind uns in ihrer Einwirkung an ihrer Stelle im Normalprodukt auf $\mathfrak{G}$ bekannt.

Wir wissen also jetzt von allen Normalprodukten bis auf die, welche bezüglich $\mathfrak{G}$ irreguläre Teilungen enthalten, was wir als deren Wirkung auf $\mathfrak{G}$ zu fordern haben.

Um dies kurz ausdrücken zu können, führen wir noch eine Bezeichnung ein. Die zu einer Merkmalfolge gehörende Verteilung ist ein System von l Zahlen $\mathfrak{V}: w(P_1), \ldots, w(P_l)$. Die Abänderung der Verteilung wollen wir jetzt immer dadurch bewerkstelligen, daß wir jede Zahl aus $\mathfrak{V}$ mit einer geeigneten Zahl multiplizieren. Wir werden mithin unter einem *Multiplikator von* $\mathfrak{V}$ ein System von l nicht negativen reellen Zahlen verstehen und mit K, L oder ähnlichen Buchstaben abkürzen. Wir wollen diese Multiplikatoren, weil sie l Zahlen enthalten, l stellig nennen. Ist dann $K = [\tau_1, \ldots, \tau_l]$, so wollen wir unter $\mathfrak{V}K$ die Verteilung verstehen $w^*P(\mathrm{P}_1), \ldots, w^*(P_l)$, worin

$$w^*(P_1) = w(P_1)\tau_1, \ldots, w^*(P_l) = w(P_l)\cdot\tau_l$$

ist. Als Produkt von Multiplikatoren $K = [\tau_1, \ldots, \tau_l]$, $L = [\sigma_1, \ldots, \sigma_l]$ definieren wir den Multiplikator $K \cdot L = [\tau_1\sigma_1, \ldots, \tau_l\sigma_l]$. Entsprechend

wird das Produkt von beliebig vielen Multiplikatoren definiert. Offenbar ist dann $(\mathfrak{V}K)L = \mathfrak{V}(KL)$. Wir schreiben dafür $\mathfrak{V}KL$ und entsprechend für beliebig viele Multiplikatoren. Die Erhaltung einer Verteilung ist dann gleichbedeutend mit der Multiplikation mit dem Einheitsmultiplikator $E = [1, 1, \ldots, 1]$.

Den Multiplikator für eigentliche Teilung können wir angeben. Hat $\mathfrak{F}$ die Merkmalmenge M und bildet man $\mathfrak{F}_N^*$, wobei etwa $M = (P_1, \ldots, P_l)$, $N = (P_{\alpha_1}, \ldots, P_{\alpha_r})$ sei, so ist die Verteilung $\mathfrak{V}^*$ von $\mathfrak{F}^*$ offenbar

$$\mathfrak{V}\left[0, 0, \ldots, \frac{1}{w(N)}\ 0, \ldots, \frac{1}{w(N)}, \ldots, \frac{1}{w(N)}, \ldots, 0\right],$$

wobei an den Stellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die Zahl $\frac{1}{w(N)}$ steht und sonst Nullen. Wir wollen diesen l stelligen Multiplikator mit $\left[\frac{\mathfrak{V}}{N}\right]$ bezeichnen. Hat man dann aus einem Grundkollektiv mittels $\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_{k-1}$ abgeleitet, und weiß man bereits, daß dabei die Verteilung $\mathfrak{V}K_1 \ldots K_{k-1}$ herausgekommen ist, so wird danach offenbar die Operation P_k, wenn sie die singuläre Teilung $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}, N)$ ist, die Verteilung multiplizieren mit $\left[\frac{\mathfrak{V}K_1 \ldots K_{k-1}}{N}\right]$. Was wir von der Einwirkung der Normalprodukte auf die Grundkollektivs fordern wollen, läßt sich jetzt so ausdrücken. Das Normalprodukt sei $\Pi = \mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{P}_k$. Es werde angewandt auf $\mathfrak{G}$. Die Verteilung von $\mathfrak{G}$ sei l stellig. Wir benutzen daher jetzt l stellige Multiplikatoren. Wir ordnen nun den Stellenauswahlen, den bezüglich $\mathfrak{G}$ einfach regulären und den bezüglich $\mathfrak{G}$ kritisch regulären Teilungen von Π den Multiplikator E zu. Den wesentlich kritischen Teilungen gehört ein Multiplikator zu, den wir in der konkreten Theorie haben, hier in der allgemeinen Theorie offen lassen. Ist P_k eine kritisch singuläre Teilung auf die Teilmenge N und haben die $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_{k-1}$ bereits die Multiplikatoren $K_1, \ldots, K_{k-1}$ erhalten, so ordne man P_k zu den Multiplikator

$$\left[\frac{\mathfrak{V}K_1 \ldots K_{k-1}}{N}\right].$$

Auf diese Weise erhält sukzessive jede singuläre Teilung einen Multiplikator. Etwaigen irregulären Teilungen ordnen wir nichts zu. Enthält dann Π keine bezüglich $\mathfrak{G}$ irregulären Teilungen, so gehört zu jedem Faktor von Π bezüglich $\mathfrak{G}$ ein Multiplikator und man erhält $K_1, \ldots, K_k$. Und wir verlangen: $\mathfrak{G}\Pi$ hat eine Verteilung und zwar gerade $\mathfrak{V}K_1 \ldots K_k$. Wir wollen unsere Forderung präzis und knapp, aber vollständig wiederholen und zum Teil etwas ergänzen.

Zusammenfassung: Ein Produkt von Stellenauswahlen mit Teilungen von Auswahlen aus $\dot{\mathfrak{S}}$ an den $\mathfrak{G}$ heißt ein Normalprodukt.

$\Pi = \mathsf{P}_1 \dots \mathsf{P}_k$ sei ein Normalprodukt. $\Gamma = \mathsf{P}_1 \dots \mathsf{P}_{k-1}$ heißt der Abschnitt von P_k in Π.

Es sei $\mathsf{P}_k = \mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}', N)$, wo A aus $\hat{\mathfrak{S}}$ und N Teilmenge der Merkmalmenge von $\mathfrak{G}'$ ist. Es sei T dicht.

Ist $\mathfrak{G}' \mid \mathfrak{G}$, so heißt T in Π bezüglich $\mathfrak{G}$ einfach regulär.

Ist $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$, A fast gleich Γ, so heißt T in Π bezüglich $\mathfrak{G}$ kritisch singulär.

Ist $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ ohne Nachwirkung, A fast total verschieden von Γ, so heißt T in Π bezüglich $\mathfrak{G}$ kritisch regulär.

Für manche Paare verwandter Grundkollektivs $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ und manche Auswahlen Γ, A aus $\hat{\mathfrak{S}}$ heißt $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}', N)$ für $\mathfrak{G}$ hinter Γ kritisch. Den kritischen Teilungen ist von vornherein — also ehe noch von einem Normalprodukt die Rede war — in der Wahrscheinlichkeitstheorie ein Multiplikator zugeordnet, mit welchem sich die Verteilung von $\mathfrak{G}\Gamma$ multipliziert beim Übergang zu $\mathfrak{G}\Gamma\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}', N)$.

Nunmehr gilt:

Ist $\mathfrak{G} \vee \mathfrak{G}'$, $\mathsf{T}(\mathsf{A}, \mathfrak{G}', N)$ (von vornherein) kritisch für $\mathfrak{G}$ hinter Γ, so heißt T in Π bezüglich $\mathfrak{G}$ (wesentlich) kritisch.

Alle übrigen Teilungen in Π heißen irregulär.

Ein Normalprodukt mit einer bezüglich $\mathfrak{G}$ irregulären Teilung nenne man bezüglich $\mathfrak{G}$ irregulär. Ein Normalprodukt mit bezüglich $\mathfrak{G}$ nur regulären Teilungen heiße bezüglich $\mathfrak{G}$ regulär.

Ein Normalprodukt mit nur bezüglich $\mathfrak{G}$ regulären und singulären, aber mindestens einer singulären Teilung heiße bezüglich $\mathfrak{G}$ singulär.

Ein nicht irreguläres Normalprodukt mit mindestens einer bezüglich $\mathfrak{G}$ wesentlich kritischen Teilung heiße bezüglich $\mathfrak{G}$ wesentlich kritisch.

Jetzt ordne man den Stellenauswahlen, den einfach regulären und den kritisch regulären Teilungen in Π den Multiplikator E zu. Den wesentlich kritischen Teilungen ordne man den Multiplikator zu, welcher ihnen von vornherein zugeordnet ist. Jetzt sind nur noch außer den irregulären Teilungen die kritisch singulären übrig. Die erste von ihnen sei P_k. Sie gehe auf die Teilmenge N. Den vorhergehenden Faktoren haben wir schon die Multiplikatoren $K_1, \dots, K_{k-1}$ zugeordnet. P_k ordnen wir $K_k = \left[\frac{\mathfrak{B} K_1 \dots K_{k-1}}{N}\right]$ zu. Entsprechend verfahre man der Reihe nach mit den späteren kritisch singulären Teilungen.

In jedem Normalprodukt $\Pi = \mathsf{P}_1 \dots \mathsf{P}_k$ ohne bezüglich $\mathfrak{G}$ irreguläre Teilung hat jeder Faktor bezüglich $\mathfrak{G}$ einen Multiplikator $K_1, \dots, K_k$. Dem Normalprodukt Π ordne man bezüglich $\mathfrak{G}$ den Faktor $K_1 \dots K_k$ zu. Diesen Multiplikator bezeichne man als $K_{\mathfrak{G}}(\Pi)$.

Hauptaxiom: II. *Π sei bezüglich $\mathfrak{G}$ nicht irregulär. Dann gehört zu $\mathfrak{G}\Pi$ eine Verteilung und zwar $\mathfrak{B} K_{\mathfrak{G}}(\Pi)$.*

Mit Rücksicht auf folgendes soll noch definiert werden:

A, B seien zwei Auswahlen aus $\dot{\mathfrak{S}}$, also als Normalprodukte darstellbar. Dann heißt B hinter A bezüglich $\mathfrak{G}$ regulär, oder singulär, oder kritisch, wenn es Normalproduktdarstellungen $\Pi(A)$, $\Pi(B)$ von A und B gibt, so daß die Normalprodukte $\Pi(A)\Pi(B)$ hinter $\Pi(A)$ regulär oder singulär oder kritisch sind, d. h. hinter $\Pi(A)$ bezüglich $\mathfrak{G}$ nur reguläre Teilungen oder nur reguläre und singuläre und mindestens eine singuläre Teilung oder nur nicht irreguläre und mindestens eine kritische Teilung aufweisen.

Trifft keins zu, so heißt B hinter A bezüglich $\mathfrak{G}$ irregulär.

§ 4.

Abgeleitete Kollektivs erster Art.

Man wende auf jedes Grundkollektiv $\mathfrak{G}$ alle für $\mathfrak{G}$ nicht irregulären Auswahlen aus $\dot{\mathfrak{S}}$ an. Es entstehen neue Merkmalfolgen $\mathfrak{G}A$. Diese heißen die *abgeleiteten Kollektivs erster Art*. Weil zu $\mathfrak{S}$, also auch zu $\dot{\mathfrak{S}}$ die identische Auswahl E gehörte, so umfaßt der Bereich der abgeleiteten Kollektivs erster Art auch die Grundkollektivs $\mathfrak{G}$. Dieser Bereich ist erzeugt durch die vorgegebenen Grundkollektivs und durch die vorgegebenen Stellenauswahlen — außerdem hängt er davon ab, welche Abhängigkeiten bei den verwandten $\mathfrak{G}$ wir vorgegeben haben — und die Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt von diesen Kollektivs.

Wir wollen statt abgeleitetes Kollektiv erster Art kurz Kollektiv sagen. Jedes solche ist in der Form $\mathfrak{G}A$ vorgegeben, wo A eine bezüglich $\mathfrak{G}$ reguläre oder singuläre Auswahl aus $\dot{\mathfrak{S}}$ ist. Von diesem Kollektiv sagen wir, es entstamme aus $\mathfrak{G}$. Nun kann es sein, daß das gleiche Kollektiv aus demselben Grundkollektiv durch verschiedene nicht irreguläre Auswahlen hervorgeht. Und es kann auch sein, daß das gleiche Kollektiv aus verschiedenen Grundkollektivs zugleich entstammt. Beides können wir nicht widerlegen. Wir können jedoch zeigen, und das ist von großer Wichtigkeit, weil es hierauf beruht, daß wir für den Bereich aller Kollektivs den Begriff der Unabhängigkeit definieren können, das gleiche Kollektiv kann nicht zugleich aus zwei verschiedenen Familien entstammen. Wir müssen nur eine triviale Ausnahme machen.

Definition: Ein Kollektiv heißt konstant, wenn es unter den Merkmalen nur eins mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit — diese ist dann offenbar 1 — gibt.

Dann gilt der Satz:

Es ist unmöglich, daß ein nicht konstantes Kollektiv aus zwei Grundkollektivs verschiedener Familien entstammt.

Beweis: Andernfalls wäre $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}\,\mathsf{A} = \mathfrak{G}'\,\mathsf{B}$, $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}'$, A und B aus $\hat{\mathfrak{S}}$. Die Merkmalmenge von $\mathfrak{R}$ enthielte wenigstens zwei Merkmale mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit, etwa P und Q. Die Operation $\mathsf{A}\,\mathsf{T}(\mathfrak{G}\,\mathsf{A}, \{P\})$ ist dann offenbar, indem man A als ein für $\mathfrak{G}$ nicht irreguläres Normalprodukt Π schreibt, im ganzen eine Auswahl aus $\hat{\mathfrak{S}}$ und zwar ist sie für $\mathfrak{G}$ nicht irregulär. Der Multiplikator von $\mathsf{T}(\mathfrak{G}\,\mathsf{A}, \{P\})$ ist ferner wegen der Bestimmung von P von E verschieden, weil das Merkmal Q von $\mathfrak{G}\,\mathsf{A}$ fortfällt. Andererseits ist die Operation $\mathsf{T}(\mathfrak{G}'\,\mathsf{B}, \{P\})$ einerseits gleich $\mathsf{T}(\mathfrak{G}\,\mathsf{A}, \{P\})$ und andererseits, da $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{G}'$, in dem Normalprodukt Π das $\mathsf{T}(\mathfrak{G}'\,\mathsf{B}, \{P\})$ bezüglich $\mathfrak{G}$ regulär und daraus folgt, daß zu T der Multiplikator E gehört und daß die Verteilung von $\mathfrak{G}\,\mathsf{A}$ und $\mathfrak{G}\,\mathsf{A}\,\mathsf{T}(\mathfrak{G}\,\mathsf{A}, \{P\})$ dieselbe ist. Das ist ein Widerspruch, womit der Satz indirekt bewiesen ist.

Zu jedem Kollektiv $\mathfrak{R}$, welches nicht konstant ist, gibt es also eine eindeutig bestimmte Familie — man nenne sie $\Phi(\mathfrak{R})$ — der es entstammt, wo hingegen ein eindeutiges Stammgrundkollektiv nur angegeben werden kann in dem nicht allgemeinen, wenngleich in den Anwendungen wichtigsten Falle, wenn die Familie nur ein Grundkollektiv enthält.

Zur Vereinheitlichung der Ausdrucksweise setze man als Stammfamilie jedes konstanten Kollektivs irgendeine beliebige der Familien, aus denen es entstammt, eindeutig fest.

$\Phi(\mathfrak{R})$ ist nun eine eindeutige Funktion für den Bereich aller Kollektivs.

Wir nennen dann zwei Kollektivs *verwandt*, wenn sie zur gleichen Familie gehören, andernfalls *fremd*. Offenbar sind dann immer zwei Kollektivs, wenn sie zu einem dritten verwandt sind, untereinander verwandt.

Entscheidend für das Verhalten der Kollektivs zueinander in der praktisch wichtigsten Beziehung zueinander — nämlich darin, ob bei der Verbindung, wie wir später sagen werden, die Multiplikationsregel gilt — ist ein Begriff, der ein klein wenig weniger besagt als ihre Fremdheit. Nämlich: Definition: *Zwei nichtkonstante Kollektivs heißen unabhängig:*

1. *wenn sie fremd sind,*

2. *wenn sie demselben Grundkollektiv ohne Nachwirkung entstammen und aus diesem durch fast total verschiedene nicht irreguläre Auswahlen ableitbar sind. Ein konstantes Kollektiv und ein anderes heißen immer unabhängig.*

Der Zusatz über konstante Kollektivs ist vielleicht unerwartet. Er beruht einfach darauf, daß, wie wir sehen werden, die Multiplikationsregel, d. i. der Satz, dem zuliebe der Begriff der Unabhängigkeit eingeführt ist, wenn eins der beiden Kollektivs konstant ist, trivial sein wird.

Für je zwei Kollektivs steht jetzt fest, ob sie unabhängig sind oder abhängig.

Es ist jetzt aus formalen Gründen zweckmäßig, den Auswahlen aus $\hat{\mathfrak{S}}$ auch bezüglich den abgeleiteten Merkmalfolgen einen Regularitätscharakter zu geben.

Es sei $\mathfrak{F}$ ein abgeleitetes Kollektiv. Es kann dann vielleicht auf verschiedene Weise in der Form $\mathfrak{G}\,\mathsf{A}$ geschrieben werden, worin $\mathfrak{G}$ ein Grundkollektiv, A eine bezüglich $\mathfrak{G}$ nicht irreguläre Auswahl aus $\hat{\mathfrak{S}}$ ist. Man denke sich alle Schreibweisen von $\mathfrak{F}$ aufgestellt: $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_1\mathsf{A}_1 = \mathfrak{G}_2\mathsf{A}_2 = \ldots$. Dann nenne man B *bezüglich* $\mathfrak{F}$ *regulär*, wenn einmal B hinter A_ν bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ regulär ist, *singulär*, wenn einmal B hinter A_ν bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ singulär und *kritisch*, wenn B einmal hinter A_ν bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ kritisch ist.

Dagegen heiße B *irregulär* bezüglich $\mathfrak{F}$, wenn B für jedes ν hinter A_ν bezüglich $\mathfrak{G}_\nu$ irregulär ist.

Dann kann zwar gleichzeitig B für $\mathfrak{F}$ regulär, singulär und kritisch sein, aber es ist, wenn eins davon zutrifft, nicht gleichzeitig irregulär.

Offenbar gilt dann: *Reguläre Auswahlen erzeugen aus Kollektivs wieder Kollektivs mit unveränderter Verteilung. Singuläre Auswahlen erzeugen aus Kollektivs wieder Kollektivs und die Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten der wirklich auftretenden Merkmale bleiben unverändert. Kritische Auswahlen lassen ebenfalls die Kollektiveigenschaft unangetastet.* Wie aber die Verteilung sich abändert, ist nicht allgemein bekannt und hängt von der Art der Verwandtschaften ab.

Zur Formulierung der folgenden Hauptsätze führen wir die Bezeichnung ein: Eine nichtdünne Teilung an einem Grundkollektiv oder abgeleiteten Kollektiv heiße *zulässige Teilung*. Dann gelten:

Hauptsatz I: *Wendet man auf ein Kollektiv eine Stellenauswahl an, so erhält man wieder ein Kollektiv, und zwar mit ungeänderter Verteilung.*

Beweis: Eine Stellenauswahl ist offenbar für jedes Kollektiv eine reguläre Auswahl.

Hauptsatz II: *Wendet man auf ein Kollektiv eine zulässige Teilung durch ein unabhängiges Kollektiv an, so erhält man wieder ein Kollektiv, und zwar mit unveränderter Verteilung.*

Beweis: Auf $\mathfrak{K}$ soll $\mathsf{T}(\mathfrak{K}_1, N)$ angewandt werden.

Da $\mathfrak{K}_1$ zu $\mathfrak{K}$ unabhängig ist, ist entweder $\Phi(\mathfrak{K}_1) \neq \Phi(\mathfrak{K})$, also $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ fremd oder $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ entstammen demselben $\mathfrak{G}$ ohne Nachwirkung mittels fast total verschiedener Auswahlen. In jedem Falle ist dann die Teilung an $\mathfrak{K}_1$ eine reguläre Operation für $\mathfrak{K}$, woraus die Behauptung folgt.

Hauptsatz III: *Wendet man auf ein Kollektiv $\mathfrak{K}$ mit der Verteilung $\mathfrak{B}$ eine zulässige eigentliche Teilung auf die Teilmenge N von der*

Merkmalmenge von $\mathfrak{K}$ an, so entsteht wieder ein Kollektiv mit der Verteilung $\left[\frac{\mathfrak{B}}{N}\right]$.

Die Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten der nicht herausfallenden Merkmale bleiben mithin unverändert.

Beweis: Offenbar ist die eigentliche Teilung für jedes Kollektiv eine singuläre Operation.

Schließlich gilt, wie noch zur Vollständigkeit formuliert werde, wenn man definiert:

Definition: Zwei abhängige Kollektivs $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{G}_1 \mathsf{A}_1, \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{G}_2 \mathsf{A}_2$ heißen *kritisch abhängig zueinander*, wenn alle nichtdünnen Teilungen durch jedes für das andere kritisch sind.

Offenbar gilt dann:

Hauptsatz IV: *Jede zulässige Teilung eines Kollektivs durch ein kritisch abhängiges Kollektiv erzeugt wieder ein Kollektiv.*

Über die neue Verteilung können wir eine Aussage nicht machen, es ist aber bei Festlegung der Verwandtschaftsbeziehung von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ vorgeschrieben, mit welchen Multiplikatoren sich die Verteilungen multiplizieren.

Aus den Hauptsätzen I, II, III, IV folgt: Geht man von den durch die Grundkollektivs erzeugten Kollektivs $\mathfrak{K}$ aus und wendet nacheinander in beliebiger Reihenfolge die Operationen an: Stellenauswahl, zulässige Teilung durch ein unabhängiges Kollektiv, eigentliche Teilung und Teilung durch ein kritisches Kollektiv, so kommt man aus dem Bereich aller Kollektivs nicht heraus. Insbesondere bleibt, wenn man nur Stellenauswahl und Teilung durch unabhängige Kollektivs anwendet, die Verteilung invariant, während bei weiterer Hinzunahme der eigentlichen Teilung einzelne Merkmale fortfallen, die Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten der übrigbleibenden aber unverändert bleiben. Kommen außerdem Teilungen durch kritisch abhängige Kollektivs hinzu, so kann aber auch dies nicht mehr behauptet werden.

§ 5.

Verbindung.

Die wichtigste Operation der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Verbindung. Dieselbe soll jetzt besprochen werden. Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Merkmalfolgen $\mathfrak{A} = a_1, a_2, \ldots, \mathfrak{B} = b_1, b_2, \ldots$. Die Merkmale von $\mathfrak{A}$ seien die ϱ-dimensionalen Punkte $P_1, \ldots, P_k$, sie bilden die Merkmalmenge M. Die Merkmale von $\mathfrak{B}$ seien die σ-dimensionalen Punkte $Q_1, \ldots, Q_l$, sie bilden die Merkmalmenge U.

Hat $P_\varkappa$ die Koordinaten $p_1, \ldots, p_\varrho$ und Q_λ die Koordinaten $q_1, \ldots, q_\sigma$, *so verstehen wir unter* $P_\varkappa \times Q_\lambda$ *den* $(\varrho+\sigma)$*-dimensionalen Punkt* $r_1, \ldots, r_{\varrho+\sigma}$, *wobei* $r_1 = p_1, \ldots, r_\varrho = p_\varrho, r_{\varrho+1} = q_1, \ldots, r_{\varrho+\sigma} = q_\sigma$ *ist.* Unter der *Punktmenge* $M \times U$ verstehen wir die Gesamtheit der kl Punkte $P_\varkappa \times Q_\lambda$. Unter der *Merkmalfolge* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ verstehen wir die folgende $c_1, c_2, \ldots$, wobei c_ν gleich dem Produkte der Punkte ist, die hier mit a_ν, b_ν bezeichnet sind, also $c_\nu = a_\nu \times b_\nu$. Die Merkmalmenge von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist also $\varrho+\sigma$ dimensional. Sie ist gewiß in $M \times U$ enthalten. Entsprechend definieren wir *das Produkt von mehr als zwei Merkmalfolgen.* Bei dieser Multiplikation gilt das assoziative, aber nicht das kommutative Gesetz. Statt Produkt sagen wir auch Verbindung.

Wir betrachten jetzt Produkte von Kollektivs erster Art. Die Sätze, auf welche wir unsere Überlegungen stützen, sind diese: Teilt man ein Kollektiv $\mathfrak{A}$ erster Art zulässig durch ein zweites unabhängiges Kollektiv erster Art, so erhält man aus $\mathfrak{A}$ ein Kollektiv erster Art mit der gleichen Verteilung wie $\mathfrak{A}$. Ferner: Erzeugt die gleiche für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht irreguläre Auswahl A aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ neue Kollektivs erster Art, so sind mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die neuen ausgewählten Kollektivs wieder unabhängig.

Wir beweisen nun

Satz: *Seien* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *unabhängige Kollektivs erster Art. Man bilde* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. *Dann gehört zu* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *wieder eine Verteilung. Nennt man die Wahrscheinlichkeiten von* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *der Reihe nach* w_1, w_2, w_3, *so ist*

$$w_3(P_\varkappa \times Q_\lambda) = w_1(P_\varkappa) \cdot w_2(Q_\lambda).$$

Beweis: Man teile $\mathfrak{B}$ auf die Punktmenge, welche allein aus dem Punkt Q_λ besteht. Es sei zunächst $w_2(Q_\lambda) \neq 0$. Man erhält die Auswahl $\mathsf{A}: \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. In $\mathfrak{A}\mathsf{A}: a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots$ greife man die Elemente heraus, welche $P_\varkappa$ sind, es seien $a_{\alpha_{\beta_1}}, a_{\alpha_{\beta_2}}, \ldots$. Dann ist, weil $\mathfrak{A}\mathsf{A}$ dieselbe Verteilung wie $\mathfrak{A}$ hat, $\lim \frac{\nu}{\beta_\nu} = w_1(P_\varkappa)$ und $\lim \frac{\beta_\nu}{\alpha_{\beta_\nu}} = w_2(Q_\lambda)$. Daraus folgt $\lim \frac{\nu}{\alpha_{\beta_\nu}} = \lim \frac{\nu}{\beta_\nu} \cdot \frac{\beta_\nu}{\alpha_{\beta_\nu}}$ existiert und ist gleich $w_1(P_\varkappa)\, w_2(Q_\lambda)$. Andererseits ist aber $\lim \frac{\nu}{\alpha_{\beta_\nu}} = w_3(P_\varkappa \times Q_\lambda)$, also $w_3(P_\varkappa \times Q_\lambda) = w_1(P_\varkappa)\, w_2(Q_\lambda)$. Ist hingegen $w_2(Q_\lambda) = 0$, so ist offenbar die Formel selbstverständlich.

Entsprechend ergibt sich als Resultat der Verbindung von mehr als zwei unabhängigen Kollektivs $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $w_1, \ldots, w_n$ und den Merkmalmengen $M_1, \ldots, M_n$ von den Dimensionen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ eine neue Merkmalfolge von der Dimension $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$ mit der Merkmalmenge $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Zu der neuen Merkmalfolge

$\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ gehört wieder eine Verteilung, und es ist die neue Wahrscheinlichkeit

$$w(P^1 \times P^2 \times \ldots \times P^n) = w_1(P^1) \cdot w_2(P^2) \ldots \cdot w_n(P^n),$$

wobei P^ν ein Merkmal von $\mathfrak{A}_\nu$ bezeichnet.

Definition: Jedes Produkt unabhängiger Kollektivs erster Art nennen wir ein *Kollektiv zweiter Art.*

Wir denken uns also ein Kollektiv zweiter Art nicht nur als Merkmalfolge gegeben, sondern als ein Produkt von mindestens zwei Faktoren, welche Kollektivs erster Art sind.

Eine Merkmalfolge kann dann durchaus als Merkmalfolge gleich einem Kollektiv zweiter Art und gleichzeitig gleich einem Kollektiv erster Art sein. Diese sind uns dann eben nur formal verschieden in ihrer Darstellung.

Definition: Ist $\mathfrak{A}$ ein Kollektiv zweiter Art $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ ($\mathfrak{A}_\nu$ sind Kollektivs erster Art), $\mathfrak{B}$ ein Kollektiv erster Art, so heißen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *unabhängig*, wenn jedes $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ unabhängig ist.

Sind $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_m$ zwei Kollektivs zweiter Art, so heißen sie *unabhängig*, wenn jedes $\mathfrak{A}_\nu$ zu jedem $\mathfrak{B}_\mu$ unabhängig ist.

Damit ist für je zwei Kollektivs erster oder zweiter Art bestimmt, wann sie unabhängig sind.

Definition: Sind $M_1, \ldots, M_n$ die Merkmalmengen von $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, so sollen die Teilmengen von $M_1 \times \ldots \times M_n$, welche sich als Produkt $N_1 \times \ldots \times N_n$ darstellen lassen, wo N_ϱ eine Teilmenge von M_ϱ mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit ist, als *zulässige Teilmengen* der Merkmalmenge von $\mathfrak{A}$, Teilungen von $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ auf zulässige Teilmengen sollen als *zulässige Teilungen* bezeichnet werden. Teilmengen mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit von Kollektivs erster Art sollen sämtlich als zulässig bezeichnet werden.

Jedes Kollektiv erster oder zweiter Art werde als ein Kollektiv bezeichnet. Der Bereich dieser Kollektivs wird nicht mehr wesentlich erweitert werden.

Offenbar ergeben sich dann folgende Sätze:

Hauptsatz 1: *Eine Stellenauswahl an einem Kollektiv erzeugt wieder ein Kollektiv mit unveränderter Verteilung.*

Beweis: Für Kollektivs erster Art ist der Satz bewiesen. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ ein Kollektiv zweiter Art und Σ die Stellenauswahl, so ist $\mathfrak{A}\Sigma = \mathfrak{A}_1\Sigma \ldots \mathfrak{A}_n\Sigma$. Die $\mathfrak{A}_\nu\Sigma$ sind jetzt wieder Kollektivs erster Art mit der gleichen Verteilung wie $\mathfrak{A}_\nu$, und zwar sind je zwei wieder unabhängig.

Hauptsatz 2: *$\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ seien zwei unabhängige Kollektivs. Ist T eine zulässige Teilung von $\mathfrak{K}_2$, so ist $\mathfrak{K}_1 \mathsf{T}$ wieder ein Kollektiv und wieder mit derselben Verteilung wie $\mathfrak{K}_1$.*

Beweis: Sind $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ beide erster Art, so ist der Satz bewiesen. Sei also $\mathfrak{K}_1$ von zweiter Art, $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{K}_2$ von erster Art. Dann ist $\mathfrak{K}_1 \mathsf{T} = \mathfrak{A}_1 \mathsf{T} \ldots \mathfrak{A}_n \mathsf{T}$ und die $\mathfrak{A}_\nu \mathsf{T}$ sind unabhängig und haben dieselbe Verteilung wie $\mathfrak{A}_\nu$.

Ist $\mathfrak{K}_1$ von erster oder zweiter Art, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_m$ von zweiter Art, so schließe man durch den Schluß von m auf $m+1$.

Hauptsatz 3. *Macht man mit einem Kollektiv eine zulässige Teilung, so erhält man wieder ein Kollektiv* (die Verteilung folgt bereits aus dem Satz in § 2).

Beweis: Für Kollektivs erster Art ist der Satz bewiesen. Sei also $\mathfrak{K}$ von zweiter Art, $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$. Die Teilung gehe auf die Teilmenge $N_1 \times \ldots \times N_n$. Man wende nun erst auf $\mathfrak{K}$ die Teilung $\mathsf{T}(\mathfrak{A}_1, N_1)$ an. Diese Auswahl erzeugt aus $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ die neuen Merkmalfolgen $\mathfrak{A}_1^*, \ldots \mathfrak{A}_n^*$. Diese sind nach Hauptsatz 2 und 3 aus § 4 wieder Kollektivs erster Art, und zwar sind sie wieder unabhängig. Dann mache man die Auswahl $\mathsf{T}(\mathfrak{A}_2^*, N_2)$ und schließe analog weiter.

Zusatz: Macht man mit einem Kollektiv eine beliebige (also auch nicht zulässige), jedoch nicht dünne Teilung, so kann man selbstverständlich den Satz aus § 2 anwenden. Es gibt also wieder eine Verteilung und man kann dieselbe angeben. Jedoch ist die neue Merkmalfolge nicht notwendig ein Kollektiv, und man kann z. B. nicht schließen, daß eine Stellenauswahl die Verteilung weiter unverändert läßt.

Hauptsatz 4: *Verbindet man unabhängige Kollektivs $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ mit den Merkmalmengen $M_1, \ldots, M_n$ und den Wahrscheinlichkeiten $w_1, \ldots, w_n$, so erhält man ein Kollektiv mit der Merkmalmenge $M_1 \times \ldots \times M_n$. Die neue Wahrscheinlichkeit ist*

$$w(P^1 \times \ldots \times P^n) = w_1(P^1) \ldots w_n(P^n),$$

wobei P^ν irgendein Merkmal von $\mathfrak{K}_\nu$ bedeutet.

Beweis: Ist $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_m, \ldots, \mathfrak{K}_n = \mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_r$, so ist wegen der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes

$$\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_l \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_m \ldots \mathfrak{Z}_1 \ldots \mathfrak{Z}_r.$$

Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ sind jetzt je zwei der $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{Z}$ unabhängige Kollektivs erster Art. Der Satz über die Wahrscheinlichkeiten folgt jetzt aus dem entsprechenden Satze für Kollektivs erster Art.

Zu beachten ist, daß zulässige Teilmengen der Merkmalmenge von $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ jetzt auf Grund der früheren Definition nur solche Punkt-

mengen sind, welche sich als Produkte der Teilmengen der Merkmalmengen von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$ mit nicht verschwindenden Wahrscheinlichkeiten oder, was dasselbe ist, welche sich als Produkte zulässiger Teilmengen von $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ darstellen lassen.

Schließlich gilt der fast selbstverständliche Satz: Sind zwei untereinander unabhängige Kollektivs zu einem dritten unabhängig, so ist es auch ihr Produkt.

§ 6.

Verbindung abhängiger Kollektivs.

Bei der Verbindung unabhängiger Kollektivs ergaben sich Kollektivs, deren Wahrscheinlichkeiten durch die Multiplikationsregel bestimmt sind, und es gelten die elementaren Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wir wollen jetzt untersuchen, ob bei abhängigen Kollektivs ähnliches gilt.

Wir betrachten Grundkollektivs und abgeleitete Kollektivs erster Art. Es seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ kritisch abhängig. $\mathfrak{R}$ habe die Verteilung $w(P_1), \ldots, w(P_r)$ und $\mathfrak{R}'$ die Verteilung $w'(Q_1), \ldots, w'(Q_s)$. Dann ist also $\mathsf{T}(\mathfrak{R}_i\,\{P_\varrho\})$ für $\mathfrak{R}'$ kritisch und zu diesem T gehöre der s-stellige Multiplikator

$$K^\varrho = [k_1^\varrho, \ldots, k_s^\varrho].$$

Wie man leicht bestätigt, hat dann in $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}'$ das Merkmal $P_\varrho \times Q_\sigma$ die Wahrscheinlichkeit

$$w(P_\varrho)\, w'(Q_\sigma)\, k_\sigma^\varrho \frac{1}{\sum\limits_\varrho k_\sigma^\varrho\, w'(Q_\varrho)}$$

oder, was dasselbe sein muß,

$$w(P_\varrho)\, w'(Q_\sigma)\, k_\sigma^\varrho \frac{1}{\sum\limits_\sigma k_\sigma^\varrho\, w'(P_\sigma)}.$$

Es steht also fest, daß zu der Verbindung zweier kritisch abhängigen Kollektivs eine Verteilung gehört.

Wir können aber schon jetzt nicht mehr behaupten, daß eine Stellenauswahl $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}'$ etwas erzeugt, was wieder als Verbindung kritisch abhängiger Kollektivs aufgefaßt werden kann. Vielmehr sind selbstverständlich $\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}'\mathfrak{S}$ abgeleitete Kollektivs und sie sind abhängig, sie brauchen aber nicht kritisch abhängig zu sein. Ferner haben $\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}'\mathfrak{S}$ natürlich die gleichen Verteilungen wie $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, aber selbst, wenn sie kritisch abhängig sein sollten, kann es sein, daß zu $\mathfrak{R}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}'\mathfrak{S}$ andere Multiplikatoren gehören als zu $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$. Zur Aufrechterhaltung der Hauptsätze werden wir also bei der Verbindung von kritisch abhängigen Kollektivs weitere Einschränkungen machen müssen.

Bei mehr als zwei Kollektivs macht schon die Frage nach der Existenz der Verteilung Schwierigkeiten. Es genügt dazu nämlich nicht,

wenn man verlangt, daß je zwei Faktoren kritisch abhängig sind. Vielmehr sind wir genötigt, umständlicher vorzugehen.

Es seien $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ Kollektivs. Man gebe aus der Merkmalmenge von $\mathfrak{K}_\nu$ eine Teilmenge N_ν vor und betrachte die Auswahl der Stellen, an denen gleichzeitig in $\mathfrak{K}_1$ ein Merkmal von N_1 in $\mathfrak{K}_2$ ein Merkmal von N_2 usw., schließlich in $\mathfrak{K}_n$ ein Merkmal aus N_n steht. Diese Auswahl nenne man die (*gleichzeitige*) *Teilung an* $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ *auf die Teilmengen* $N_1, \ldots, N_n$[4]).

Diese Auswahl ist offenbar nichts anderes als das Produkt

$$\mathsf{T}_1(\mathfrak{K}_1, N_1)\,\mathsf{T}_2(\mathfrak{K}_2\,\mathsf{T}_1, N_2)\ldots\mathsf{T}_n(\mathfrak{K}_n\,\mathsf{T}_1\ldots\mathsf{T}_{n-1}, N_n).$$

Offenbar ist dies ein Normalprodukt, also eine Auswahl aus $\dot{\mathfrak{S}}$. Es läßt sich vielleicht, wegen der verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten der $\mathfrak{K}_\nu$ durch die Grundkollektivs, in verschiedener Weise als Normalprodukt schreiben.

Ist $\mathfrak{K}_{n+1}$ ein weiteres Kollektiv, so heißen:

Definition: $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ *vor* $\mathfrak{K}_{n+1}$ *schaltbar*, wenn die gleichzeitigen Teilungen an $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ für $\mathfrak{K}_{n+1}$ sämtlich nicht irregulär sind.

Ferner heißen $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ *verbindungsfähig*, wenn für $\nu = 1, \ldots, n-1$ die $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_\nu$ vor $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ schaltbar sind.

Z. B. sind unabhängige Kollektivs immer verbindungsfähig, weil die in Frage kommenden Teilungen dann sämtlich regulär sind.

Ferner gilt bei zwei Faktoren offenbar: Wenn sie kritisch abhängig sind, sind sie auch verbindungsfähig.

Die verbindungsfähigen Kollektivs sind nun gerade die, deren Verbindung eine Verteilung hat. Nämlich es gilt:

Satz: *Sind* $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ (*in dieser Reihenfolge*) *verbindungsfähig, so gehört zur Verbindung* $\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n$ *eine Verteilung.*

Beweis: Ist $n = 2$, so ist der Satz bewiesen. Wir nehmen daher an, wir hätten den Satz für $n-1$. Nun sind $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}$ verbindungsfähig, also hat $\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_{n-1}$ eine Verteilung. Nimmt man also von $\mathfrak{K}_\nu$ ein Merkmal P^ν, so hat $P^1 \times \ldots \times P^{n-1}$ in $\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_{n-1}$ eine Wahrscheinlichkeit und weil $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}$ vor $\mathfrak{K}_n$ schaltbar sind, so hat in der Teilfolge, die durch gleichzeitige Teilung von $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}$ auf $P_1 \times \ldots \times P^{n-1}$ aus $\mathfrak{K}_n$ entsteht, weiter P^n eine Wahrscheinlichkeit. Daraus folgt: Zu $P^1 \times \ldots \times P^n$ gehört in $\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n$ eine Wahrscheinlichkeit, nämlich das Produkt der beiden angegebenen Wahrscheinlichkeiten.

Die Produkte verbindungsfähiger Kollektivs haben also eine Verteilung, im übrigen haben sie im allgemeinen nicht alle Kollektiveigenschaften, indem sie nicht die Hauptsätze erfüllen. Wir wollen die Produkte solcher

[4]) Dies ist die Teilung von $\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n$ auf $N_1 \times \ldots \times N_n$.

verbindungsfähiger Kollektivs, die nicht zu je zwei unabhängig sind, daher als *Semikollektivs* bezeichnen. Die Geltung der Hauptsätze wissen wir nur von den Verbindungen unabhängiger Kollektivs. Zur Erweiterung dieses Bereiches versuchen wir nun, Spezialeigenschaften von den Semikollektivs, genauer von den in ihnen vereinigten Kollektivs erster Art, zu fordern, so daß nach Hinzunahme dieser speziellen Semikollektivs zu den Kollektivs zweiter Art ein Bereich entsteht, in welchem die Hauptsätze gelten.

Macht man eine gleichzeitige Teilung aller $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$, so erhalte man $\mathfrak{K}_1^*, \ldots, \mathfrak{K}_n^*$. Dann ist uns selbstverständlich wegen der Verbindungsfähigkeit, also der Kenntnis der Multiplikatoren innerhalb $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ die Verteilung der Verbindung jeden Teilsystems der $\mathfrak{K}^*$ bekannt. Es ist mithin — zwar nicht sicher, daß die Teilungen $\mathsf{T}(\mathfrak{K}_1^*, \ldots)$ für $\mathfrak{K}_2^*$ nicht irregulär sind, aber — aus den Multiplikatoren innerhalb $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ ein Multiplikator berechenbar, welcher die Verteilung von $\mathfrak{K}_2^* \mathsf{T}(\mathfrak{K}_1^*, N_1^*)$ bestimmt. Ebenso ist allgemein zu jedem System von Teilmengen $N_1^*, \ldots, N_{\nu-1}^*$ zu $\mathfrak{K}_1^*, \ldots, \mathfrak{K}_{\nu-1}^*$ ein Multiplikator errechenbar, welcher die Verteilung von $\mathfrak{K}_\nu^* \mathsf{T}_1(\mathfrak{K}_1^*, N_1^*) \mathsf{T}_2(\mathfrak{K}_2^* \mathsf{T}_1, N_2^*) \ldots \mathsf{T}_{\nu-1}(\mathfrak{K}_{\nu-1}^* \mathsf{T}_1 \ldots \mathsf{T}_{\nu-2}, N_{\nu-1}^*)$ durch die Verteilung von $\mathfrak{K}_\nu^*$ bestimmt für jedes $\nu = 2, \ldots, n$. Es soll also nochmals hervorgehoben werden: Durch die Annahme der Hintereinanderschaltbarkeit von $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ sind für die $\mathfrak{K}_1^*, \ldots, \mathfrak{K}_n^*$, die aus den $\mathfrak{K}$ durch gleichzeitige Teilung entstehen, Multiplikatoren bestimmt, welche sukzessive die Verteilung von $\mathfrak{K}_1^* \mathfrak{K}_2^*, \mathfrak{K}_1^* \mathfrak{K}_2^* \mathfrak{K}_3^*, \ldots$ und von $\mathfrak{K}_1^* \mathfrak{K}_2^*, \ldots, \mathfrak{K}_n^*$ bestimmen.

Definition: $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ heißen *verbindbar*, wenn gilt

1. $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ sind verbindungsfähig.

2. Für jedes Normalprodukt Π, das zu $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ gleichzeitig regulär ist, gilt: $\mathfrak{K}_1 \Pi, \ldots, \mathfrak{K}_n \Pi$ sind wieder verbindungsfähig und die Multiplikatoren sind die gleichen wie zu $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$.

3. Ist Π Normalprodukt, so daß jeder Faktor entweder für jedes $\mathfrak{K}_\nu$ regulär ist oder für (mindestens) ein $\mathfrak{K}_\nu$ singulär, so mögen die singulären Teilungen von Π bezüglich $\mathfrak{K}_\nu$ gehen auf die Teilmengen $T_1^\nu, \ldots, T_{r_\nu}^\nu$ der Merkmalmengen von $\mathfrak{K}_\nu$, und es sei $D_\nu = T_1^\nu \ldots T_{r_\nu}^\nu$. Ferner möge $\mathfrak{K}_\nu^*$ aus $\mathfrak{K}_\nu$ durch eigentliche Teilung auf die Teilmenge D_ν entstehen. Dann gilt: Mit $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ sind auch die $\mathfrak{K}_1 \Pi, \ldots, \mathfrak{K}_n \Pi$ verbindungsfähig und die Multiplikatoren sind die gleichen wie die von $\mathfrak{K}_1^*, \ldots, \mathfrak{K}_n^*$.

Die Forderungen 2 und die allgemeinere 3 besagen offenbar: Die Multiplikatoren, die die Abhängigkeit der $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ bestimmen, sollen von Stellenauswahlen und Teilungen an unabhängigen Kollektivs unabhängig sein. Sie sind also nur abhängig von singulären Teilungen. Die Abhängigkeit hiervon ist offenbar von vornherein bestimmt, ohne daß darüber noch etwas ge-

fordert werden müßte. Es ist ungefähr so: Kollektivs sind verbindbar, wenn die *Art ihrer Verwandtschaft durch Stellenauswahlen und Teilungen an unabhängigen Kollektivs nicht berührt wird.*

Offenbar sind dann unabhängige Kollektivs verbindbar.

Die Verbindung verbindbarer Kollektivs, von denen nicht je zwei unabhängig sind, nenne man *Kollektivs dritter Art.*

Offenbar gilt: Ist Π für $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ regulär oder singulär, so sind mit $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ auch $\mathfrak{K}_1 \Pi, \ldots, \mathfrak{K}_n \Pi$ verbindbar.

In diesem Bereich aller Kollektivs erster, zweiter oder dritter Art nenne man schließlich zwei Kollektivs — solche erster Art werden als Produkt mit einem Faktor aufgefaßt — *unabhängig*, wenn jeder Faktor des einen Produkts von iedem Faktor des anderen Produkts unabhängig ist. Dann gilt in diesem Bereich:

Hauptsatz 1: *Ist $\mathfrak{K}$ ein Kollektiv und Σ eine Stellenauswahl, so ist $\mathfrak{K}\,\Sigma$ ein Kollektiv und hat die gleiche Verteilung wie $\mathfrak{K}$.*

Beweis: Ist $\mathfrak{K}$ Kollektiv dritter Art, so sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n$ und jedes $\mathfrak{K}_\nu$ Kollektiv erster Art. Dann ist $\mathfrak{K}\,\Sigma = (\mathfrak{K}_1\,\Sigma)\,(\mathfrak{K}_2\,\Sigma), \ldots, (\mathfrak{K}_n\,\Sigma)$ und diese sind verbindbar und wegen Forderung 2 hat ihre Verbindung die gleiche Verteilung wie $\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n$.

Hauptsatz 2: *Es seien $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ unabhängige Kollektivs. $\mathsf{T}(\mathfrak{K}_2, \ldots)$ sei zulässige Teilung von $\mathfrak{K}_2$. Dann ist $\mathfrak{K}_1\,\mathsf{T}$ ein Kollektiv mit der gleichen Verteilung wie $\mathfrak{K}_1$.*

Beweis: Offenbar ist $\mathsf{T}(\mathfrak{K}_2, \ldots)$ eine reguläre Operation für jeden Faktor von $\mathfrak{K}_1$.

Hauptsatz 3: *Jede zulässige Teilung an $\mathfrak{K}$ erzeugt aus $\mathfrak{K}$ wieder ein Kollektiv.*

Das folgt aus Bedingung 3.

Hauptsatz 4: *Bei der Verbindung unabhängiger Kollektivs gilt die Multiplikationsregel.*

Beweis: Der Satz folgt offenbar aus Hauptsatz 2.

§ 7.

Hinzunahme gemischter Kollektivs.

Ein Kollektiv ist für uns bisher entweder ein abgeleitetes Kollektiv erster Art oder ein Kollektiv zweiter Art. Jetzt soll ein letztes Mal, und zwar nicht mehr sehr wesentlich, der Begriff des Kollektivs erweitert werden, indem wir alle diejenigen Merkmalfolgen, die aus einem Kollektiv durch Mischung entstehen, ebenfalls noch als Kollektiv auffassen.

Definition: Unter einem *gemischten Kollektiv* verstehen wir eine Merkmalfolge, welche aus einem Kollektiv erster oder zweiter Art durch Mischung entsteht. Wir denken uns aber ein gemischtes Kollektiv gegeben

(nicht nur durch eine Merkmalfolge, sondern) durch ein Kollektiv erster oder zweiter oder dritter Art, das Originalkollektiv, und eine Merkmaltransformation[5]), wobei einfach Systeme von Merkmalen zu neuen Merkmalen zusammengefaßt werden, wobei die Additionsregel gilt, wie in § 2 besprochen wurde. Wir nennen ein gemischtes Kollektiv von erster, zweiter oder dritter Art, je nachdem das Originalkollektiv von erster oder zweiter oder dritter Art ist.

Nach § 1 gehört zu jedem gemischten Kollektiv eine Verteilung.

Definition: Eine Teilmenge der Merkmalmenge eines gemischten Kollektivs heiße *zulässig*, wenn es eine zulässige Teilmenge der Merkmalmenge des Originalkollektivs gibt, aus der sie durch die Mischungstransformation entsteht. Eine Teilung an einem gemischten Kollektiv heiße zulässig, wenn es eine Teilung auf eine zulässige Teilmenge ist. Offenbar ist dann bei gemischten Kollektivs erster Art jede Teilmenge nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit und jede dichte Teilung zulässig,

Definition: Zwei gemischte Kollektivs heißen *unabhängig*, wenn die Originalkollektivs unabhängig sind.

Definition: Gemischte Kollektivs heißen *verbindbar*, wenn die Originalkollektivs verbindbar sind.

Wir verstehen nunmehr endgültig unter einem Kollektiv ein Originalkollektiv oder ein gemischtes Kollektiv. Je zwei von ihnen sind dann entweder unabhängig oder nicht. Zwei Produkte, wo jeder Faktor des einen von jedem Faktor des anderen unabhängig ist, sind wieder unabhängig.

Es gelten dann, wie jetzt leicht folgt, *die Hauptsätze* 1 *bis* 4 *mit wörtlich unverändertem Wortlaut im Bereich aller Kollektivs. Durch die Operationen: Stellenauswahl, zulässige Teilung durch unabhängige Kollektivs, zulässige Teilung durch das Kollektiv selbst, Verbindung von verbindbaren Kollektivs und (jetzt auch) Mischung kommt man also, von Kollektivs ausgehend, aus dem Bereiche aller Kollektivs nicht heraus.*

§ 8.

Theorie des Glückspiels.

In der ersten Mitteilung ist ein Spezialfall besprochen worden. Es wurde angenommen, daß sämtliche Grundkollektivs ohne Nachwirkung sind und daß jede Familie nur ein Glied enthält, daß also zwei verschiedene Grundkollektivs immer fremd sind.

---

[5]) Man vergleiche, wenn nötig, den Begriff Mischung und Merkmaltransformation bei R. v. Mises oder in einer meiner Noten: Math. Zeitschr. Bd. 32 oder Jahresbericht der D. M. V. Bd. 43.

Teilungen an einem anderen Grundkollektiv waren also immer regulär, und nie kritisch. Ferner wurden Teilungen am gleichen Grundkollektiv, wenn sie nicht regulär oder singulär waren, immer als irregulär bezeichnet, so daß wesentlich kritische Teilungen überhaupt nicht auftraten. Der Name wurde so gewählt, weil ich mir vorstellte, daß beim Glücksspiel als Haupttypus, etwa in einem Roulettesaal, einerseits die einzelnen Versuchsfolgen ohne Nachwirkung sind und andererseits zwischen den verschiedenen Spielen eine Abhängigkeit nicht besteht.

§ 9.

Beispiel einer Glücksspieltheorie.

Es sei $\mathfrak{G}_1 = 1, 1, 1, \ldots$, $\mathfrak{G}_2 = 1, 0, 1, 0, \ldots$, $\mathfrak{S}$ bestehe allein aus der Einheit E. Wir behaupten: Diese Grundkollektivs und diese Gruppe von Stellenauswahlen genügen den Axiomen I, II. Daß das Axiom I erfüllt ist, ist klar. Wir stellen nun die Gruppe $\hat{\mathfrak{S}}$ auf. Ist A: 1, 3, 5, ..., B: 2, 4, 6, ..., welche durch Teilung von $\mathfrak{G}$ entstehen, so ergibt sich leicht $\hat{\mathfrak{S}}$ als die Gesamtheit aller Produkte von Elementen A und B: $\mathsf{A}^{\alpha_1}\,\mathsf{B}^{\alpha_2}\,\mathsf{A}^{\alpha_3}\ldots$ $[\mathsf{A}^0 = \mathsf{B}^0 = \mathsf{E}]$ Wendet man eine solche Auswahl auf $\mathfrak{G}_2$ (für $\mathfrak{G}_1$ ist das selbstverständlich) an, so bekommt man ein konstantes Kollektiv. Daraus folgt, daß trivialerweise das Axiom II erfüllt ist.

§ 10.

Durch Zusatzaxiom über die Stellenauswahl spezialisierte Theorie und Gesetze der großen Zahlen.

Die hier angegebene Theorie ist insofern abstrakt, als darüber, welche Auswahlen denn nun Stellenauswahlen sind, nichts vorausgesetzt wurde. Nun hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung bisher immer solche Fragen beantwortet, wie z. B. diese: Wie wahrscheinlich ist es, daß beim Würfeln mit einem Würfel auf zwei nacheinander fallende Fünfen eine 1 folgt? In unserer abstrakten Theorie lassen sich diese und ähnliche, wie überhaupt jede konkrete Frage nur durch einen hypothetischen Satz beantworten: „Wenn gewisse Auswahlen für gewisse Merkmalfolgen als Grundkollektivs Stellenauswahlen sind, ...“ Will man solche hypothetischen Sätze formal vermeiden, so kann das geschehen, indem man weitere Axiome postuliert, darüber, welche Auswahlen Stellenauswahlen sind. Eine solche durch ein Zusatzaxiom spezialisierte Theorie, in welcher die oben angedeuteten Fragen beantwortet werden, soll jetzt besprochen werden.

Die Auswahl $\varkappa, \varkappa + 1, \ldots$ bezeichne man mit $\mathsf{P}_\varkappa$ die Auswahl $1, 1+\lambda$, $1 + 2\lambda, \ldots$ mit Δ_λ. Dann wird z. B. $\mathsf{P}_\varkappa \Delta_\lambda$ die Auswahl $\varkappa, \varkappa + \lambda, \varkappa + 2\lambda, \ldots$. Neben den Axiomen I, II, fordere man jetzt noch folgendes

Axiom III: $\mathsf{P}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ *und* Δ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ *sind Stellenauswahlen.*

Dann sagen wir, es liege eine spezielle Theorie vor. Dann sind auch die Produkte von $\mathsf{P}' s^-$ und $\Delta' s$ Stellenauswahlen. Daraus folgt: Jede arithmetische Progression erzeugt eine Stellenauswahl.

Ist also $\mathfrak{A}$: $a_1, a_2, \ldots$ ein Kollektiv ohne Nachwirkung in dieser speziellen Theorie, so folgt, daß neben $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ auch

$$\mathfrak{A}_2 = a_2, a_3, \ldots$$
$$\mathfrak{A}_3 = a_3, a_4, \ldots$$

Kollektivs und zwar unabhängige Kollektivs sind, von denen jedes die gleiche Verteilung hat wie $\mathfrak{A}$. Die Betrachtung der Verbindung $\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2 \cdot \mathfrak{A}_{2+\nu}$ liefert dann z. B. die Beantwortung der Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß in $\mathfrak{A}$ die Merkmale $P_\varkappa$, P_λ aufeinander folgen und dann im Abstand ν das Merkmal P_ϱ folgt. Diese Wahrscheinlichkeit ist $w(P_\varkappa)\ w(P_\lambda)\ w(P_\varrho)$, unter w die Wahrscheinlichkeit in $\mathfrak{A}$ verstanden. Ferner ergibt sich z. B. die Wahrscheinlichkeit für P_ϱ, wenn man schon weiß, daß das $(\nu+1)$-te vorhergehende (es könnte auch das folgende sein) und das ν-te vorhergehende Element $P_\varkappa$, P_λ sind, als $w(P_\varrho)$.

Etwas ungenauer ausgedrückt, ergibt sich, wie dieses Beispiel statt des allgemeinen Falles zur Genüge zeigt: Wählt man aus einem Kollektiv eine neue Merkmalfolge aus, indem man zur Auswahl nur die Merkmale der dem auszuwählenden Element vorhergehenden oder folgenden Elemente benutzt — diese Benutzung muß aber geschehen durch Verknüpfung der P und Δ —, so ergibt sich ein neues Kollektiv mit unveränderter Verteilung.

§ 11.

Anwendung.

R. v. Mises hat erkannt, daß mittels der fünf Grundoperationen: Stellenauswahl, Teilung an sich selbst, Teilung an unabhängigen Kollektivs, Verbindung und Mischung alle wichtigen Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich erledigen lassen. Um zwei der wichtigsten Beispiele zu behandeln, wollen wir jetzt nach dem Vorbilde von R. v. Mises die Gesetze der großen Zahlen — wenigstens, nur der kürzeren Ausdrucksweise wegen, in zwei konkreten Spezialfällen — behandeln. Für das erste Gesetz der großen Zahlen beginnen wir mit einigen vorbereitenden Begriffen: $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ seien unabhängige Kollektivs. Ihre Merkmalräume mögen dieselbe Dimension haben. P^ν bedeute ein Merkmal der Merkmalmenge M_ν von $\mathfrak{R}_\nu$. Durch Verbindung entsteht das neue Kollektiv $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \ldots \mathfrak{R}_n$. Die Merkmale von $\mathfrak{R}$ sind die Punkte $P^1 \times P^2 \times \ldots \times P^n$ und die Merkmalmenge ist $M_1 \times M_2 \ldots \times M_n$. Mit $\mathfrak{R}$ mache man jetzt eine Mischung,

indem man $P^1 \times P^2 \times \ldots \times P^n$ ersetzt durch $P^1 + P^2 + \ldots + P^n$ [6]). Aus $\mathfrak{R}$ entsteht so das neue Kollektiv $\bar{\mathfrak{R}}$. Wir sagen, $\bar{\mathfrak{R}}$ sei entstanden durch Addition der unabhängigen Kollektivs $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ und schreiben kurz $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}_1 + \ldots + \mathfrak{R}_n$.

Man transformiere $\mathfrak{R}$ noch einmal, indem man jedes Merkmal P von $\mathfrak{R}$ durch $\frac{P}{n}$ ersetzt. Aus $\bar{\mathfrak{R}}$ entsteht so $\bar{\bar{\mathfrak{R}}}$. Da es durch eine Mischung entsteht, ist es wieder ein Kollektiv, wir sagen $\bar{\bar{\mathfrak{R}}}$ sei aus $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ durch Durchschnittsbildung entstanden und schreiben $\bar{\bar{\mathfrak{R}}} = \frac{\mathfrak{R}_1 + \ldots + \mathfrak{R}_n}{n}$.

Gehen wir nun von einem einzigen Kollektiv $\mathfrak{A}$ aus, so sind in unserer speziellen Theorie die Folgen $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} = a_1, a_2, \ldots$; $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}\,\mathsf{P}_2 = a_2, a_3, \ldots$, $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}\,\mathsf{P}_n = a_n, a_{n+1} \ldots$ wieder Kollektivs, und zwar sind sie voneinander unabhängig.

Dann sind $\bar{\mathfrak{A}}_n = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n$ und $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}_n = \frac{\mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n}{n}$ wieder Kollektivs. Wir sagen: $\bar{\mathfrak{A}}_n$ entstehe aus $\mathfrak{A}$ durch n-fache Summenbildung, $\bar{\bar{\mathfrak{A}}}_n$ durch n-fache Durchschnittsbildung.

Ist $\mathfrak{R}$ ein Kollektiv mit den ϱ-dimensionalen Merkmalen $P_1, \ldots, P_l$ und den Wahrscheinlichkeiten w, so nennen wir den ϱ-dimensionalen Punkt $\Sigma P_\lambda w(P_\lambda) = T(\mathfrak{R})$ den Mittelwert von $\mathfrak{R}$. Aus dieser Bedeutung von T folgt sofort $\sum_\lambda (P_\lambda - T)\, w(P_\lambda) = 0$.

Neben dem Begriff des Mittelwertes brauchen wir noch den Begriff der Streuung: Der ϱ-dimensionale Punkt $\sqrt{\sum_\lambda (P_\lambda - T)^2 w(P_\lambda)} = \mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ heißt die Streuung von $\mathfrak{R}$.

Sind dann $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ irgendwelche unabhängige Kollektivs gleicher Dimension mit den Mittelwerten $T^1, \ldots, T^n$, so ist,

$$T(\mathfrak{R}_1 + \ldots + \mathfrak{R}_n) = \sum_{P^1 \ldots P^n} (P^1 + \ldots + P^n)\, w_1(P^1) \ldots w_n(P^n),$$

summiert über alle Punktsysteme $P^1, \ldots, P^n$. Dies ist aber gleich

$$\Sigma P^1 w_1(P^1)\,[\Sigma w_2(P^2) \ldots w_n(P^n)] + \ldots$$
$$+ \sum_{P^n} P^n w_n(P^n)\,[\Sigma w_1(P^1) \ldots w_{n-1}(P^{n-1})] = T^1 + \ldots + T^n,$$

weil

$$\sum_{P^2 \ldots P^n} w_2(P^2)\, w_3(P^3) \ldots w_n(P^n) = \sum_{P^2} w_2(P^2) \ldots \sum_{P^n} w_n(P^n) = 1$$

ist, ebenso die übrigen eingeklammerten Faktoren. Ferner ist $T\left(\frac{\mathfrak{R}_1 + \ldots + \mathfrak{R}_n}{n}\right)$ $= \frac{1}{n}\, T(\mathfrak{R}_1 + \ldots + \mathfrak{R}_n)$, also gleich $\frac{T^1 + \ldots + T^n}{n}$.

---

[6]) Wir addieren Punkte, indem wir das koordinatenweise machen, ebenso werden wir quadrieren und Wurzelziehen von Punkten koordinatenweise machen.

Wir beweisen nun den Satz, daß das Streuungsquadrat eines Kollektivs, welches durch Addition von unabhängigen Kollektivs entsteht, gleich der Summe der Streuungsquadrate ist, also

$$(\mathfrak{S}(\mathfrak{R}_1 + \ldots + \mathfrak{R}_n))^2 = (\mathfrak{S}(\mathfrak{R}_1))^2 + \ldots + (\mathfrak{S}(\mathfrak{R}_n))^2.$$

Denn

$$\begin{aligned}(\mathfrak{S}(\mathfrak{R}_1 + \ldots + \mathfrak{R}_n))^2 &= \sum_{P^1 \ldots P^n} [(P^1 + \ldots + P^n)] - [T^1 + \ldots + T^n]^2 w_1(P^1) \ldots w_n(P^n) \\ &= \sum_{P'} (P^1 - T^1)^2 w_1(P') \Big[\sum_{P^2 \ldots P^n} w_2(P^2) \ldots w_n(P^n) \Big] + \ldots \\ &\quad + \sum (P^n - T^n)^2 w_n(P^n) \Big[\sum_{P^1 \ldots P^{n-1}} w_1(P^1) \ldots w_{n-1}(P^{n-1}) \Big] \\ &\quad + 2 \sum_{P' P^2} (P' - T')(P^2 - T^2) w_1(P) w_2(P^2) \Big[\sum_{P^3 \ldots P^n} w_3(P^3) \ldots w_n(P^n) \Big] + \ldots .\end{aligned}$$

Hier folgen dem letzten entsprechende Glieder, in denen das Produkt von zwei Differenzen $(P^\varkappa - T^\varkappa)(P^\lambda - T^\lambda)$ auftritt. Solche Glieder sind aber 0, denn es ist z. B. das letzte ausgeschriebene Glied gleich

$$\Sigma (P^1 - T^1) w_1(P_1) \cdot \Sigma (P^2 - T^2) w_2(P^2) \cdot 1 = 0,$$

da die beiden ersten Faktoren verschwinden, also erhält man, da rechts alle eckigen Klammern den Wert 1 haben: $(\mathfrak{S}(\mathfrak{R}_1))^2 + \ldots + (\mathfrak{S}(\mathfrak{R}_n))^2$, was zu beweisen war.

Offenbar folgt daraus für die Durchschnittsbildung

$$\Big(\mathfrak{S}\Big(\frac{\mathfrak{R}_1 + \ldots + \mathfrak{R}_n}{n}\Big)\Big)^2 = \frac{(\mathfrak{S}(\mathfrak{R}_1))^2 + \ldots + (\mathfrak{S}(\mathfrak{R}_n))^2}{n^2}.$$

Wir wenden diesen Satz an auf die Durchschnittsbildung von unabhängigen Kollektivs mit gleicher Streuung. Wir wollen speziell als Kollektiv wählen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, die wir oben aus $\mathfrak{A}$ erzeugt haben. Dann ist $\mathfrak{A} = a_1, a_2, \ldots$ und $\bar{\mathfrak{A}}_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, \frac{a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n} \ldots$. Weil jetzt $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ die gleiche Verteilung, also erst recht die gleiche Streuung $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ haben, folgt $\mathfrak{S}(\bar{\mathfrak{A}}_n) = \mathfrak{S}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Bildet man mithin den n-ten Durchschnitt mit wachsendem n, so ergibt sich dabei die Streuung als ein ϱ-dimensionaler Punkt, welcher nach 0 konvergiert.

Aus diesem Ergebnis folgt jetzt, wie allgemein bekannt, das Gesetz der großen Zahlen so: Um den Mittelwert $T(\mathfrak{A})$ lege man die feste Kugel mit dem Radius R. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Merkmal von $\mathfrak{A}$ in das Innere dieser Kugel fällt, sei $w_{n\,i}$ die, daß es in das Äußere fällt, $w_{n\,a}$. Wir berücksichtigen nun, daß $T(\mathfrak{A})$ gleichzeitig der Mittelwert von $\mathfrak{A}_n$ ist für jedes n. Dann folgt aus der Definition der Streuung, daß die Streuung des Kollektivs $\mathfrak{A}$ vom Nullpunkt mindestens die Entfernung $\sqrt{w_{n\,a} R^2}$ hat. Weil aber der Radius R fest angenommen war, folgt dann, daß bei wachsendem n die Wahrscheinlichkeit $w_{n\,a}$ nach 0,

also $w_{n\,i}$ nach 1 konvergiert. Das ist das *erste Gesetz der großen Zahlen*. Man kann es ungefähr so aussprechen: Bei n-facher Durchschnittsbildung geht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Merkmal in das Innere einer unabhängig von n vorgelegten Kugel um den Mittelwert des Kollektivs fällt, mit wachsendem n nach 1, wird also mit wachsendem n fast zur Sicherheit.

Wir wollen noch kurz einen speziellen Fall des *zweiten Gesetzes der großen Zahlen* behandeln. Auf einem Tische liegen drei Würfel A, B, C. Wir nehmen an, daß bei jedem Würfel jeder Augenzahl eine Wahrscheinlichkeit zukommt, welche erperimentell festgestellt ist und angibt, welche Wahrscheinlichkeiten sich ergeben, wenn man mit diesem Würfel unendlich oft würfelt. Bei dem ersten Würfel seien die Wahrscheinlichkeiten der Ziffern 1 bis 6: $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ beim zweiten: $\beta_1, \ldots, \beta_6$, beim dritten: $\gamma_1, \ldots, \gamma_6$. Jemand greift nun einen Würfel nach Belieben heraus und wirft n-mal nacheinander. Es erscheine etwa n-mal die 5. Wir fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mit dem ersten Würfel A gewürfelt wurde?

Damit wir eine Frage in unserer Theorie erhalten, müssen wir dieser Fragestellung erst in unserer Theorie ein neues Problem zuordnen, das wir für äquivalent halten. Dazu müssen wir uns jedenfalls an Stelle des einzelnen Vorganges eine (unendliche) Merkmalfolge konstruieren. Denken wir uns also den Vorgang: Ergreifen eines der drei Würfel und danach n-faches Werfen mit ihm und Ablesen der Augen unendlich oft wiederholt. Wir erhalten dann eine unendliche Merkmalfolge $\mathfrak{F}$. Die Merkmale sind $n+1$-dimensional. Die erste Komponente ist das Merkmal A, B, C, die zweite bis $(n+1)$-te Komponente sind Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ der Reihe 1 bis 6. Wir machen jetzt folgende Hypothesen: 1. Achtet man in der Folge F nur auf die ersten Komponenten der Merkmale, so ergibt sich für A, B, C die gleiche Wahrscheinlichkeit, also $\frac{1}{3}$. 2. Achtet man nur auf die Merkmale, in denen die erste Komponente A bzw. B bzw. C ist, und hierin nur auf die $(\nu+1)$-te Komponente, also a_ν, so ergibt sich eine Merkmalfolge der Merkmale 1 bis 6 mit den Wahrscheinlichkeiten $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ bzw. $\beta_1, \ldots, \beta_6$ bzw. $\gamma_1, \ldots, \gamma_6$. 3. Die n Merkmalfolgen, die man erhält, wenn man nur alle die Glieder nimmt, in denen die erste Komponente A bzw. B bzw. C ist, und dort die $(\nu+1)$-te Komponente a_ν betrachtet, genügen, angesehen als Grundkollektivs, wenn man das Element E als Gruppe $\mathfrak{S}$ annimmt, den Axiomen I, II (hier braucht man Axiom III nicht zu fordern). Dann ergeben sich für die Folge folgende Wahrscheinlichkeiten: Für die $n+1$-dimensionalen Merkmale P: $A, a_1, \ldots, a_n$ bzw. $B, a_1, \ldots, a_n$ bzw. $C, a_1, \ldots, a_n$ der Reihe nach $\frac{1}{3}, \alpha_{a_1}, \ldots, \alpha_{a_n}$ bzw. $\frac{1}{3}, \beta_{a_1}, \ldots, \beta_{a_n}$ bzw. $\frac{1}{3}, \gamma_{a_1}, \ldots, \gamma_{a_n}$.

Die Frage: Weiß man, daß ein vorgelegtes System $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ herauskommt, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Komponente A ist, daß also mit dem Würfel A gewürfelt wurde, wird dann so beantwortet: Man teile $\mathfrak{F}$ auf die Teilmenge der Merkmalmenge, in welcher die zweite bis $(n+1)$-te Kompenente gerade $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ sind. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von A ist dann

$$\tfrac{1}{3}\alpha_{\bar{a}_1} \ldots \alpha_{\bar{a}_n} \cdot \frac{1}{\tfrac{1}{3}\alpha_{\bar{a}_1} \ldots \alpha_{\bar{a}_n} + \tfrac{1}{3}\beta_{\bar{a}_1} \ldots \beta_{\bar{a}_n} + \tfrac{1}{3}\gamma_{\bar{a}_1} \ldots \gamma_{\bar{a}_n}}.$$

Wir wollen nun zur Anfangsfrage zurückkehren und annehmen, es sei n-mal 5 gefallen. Ferner nehmen wir jetzt an, es sei $\alpha_5 > \beta_5$ und $\alpha_5 > \gamma_5$. Offenbar wächst dann der Quotient $\frac{\alpha_5^n}{\beta_5^n + \gamma^n}$ mit wachsendem n über alle Grenzen. Daher konvergiert $\frac{1}{3}\alpha_5^n \frac{1}{\frac{1}{3}\alpha_5^n + \beta_5^n + \gamma_5^n}$ mit wachsendem n nach 1, d. h. also: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine n-fache Serie von Fünfen mit dem Würfel geworfen wurde, für welchen 5 eine größere Wahrscheinlichkeit hat als für jeden anderen Würfel, geht mit wachsendem n nach 1, wird also mit wachsendem n fast zur Sicherheit.

Endlich wollen wir in Ergänzung einer früheren Bemerkung nochmals nachweisen, daß in einem Kollektiv ohne Nachwirkung der Zufall „ohne Gedächtnis“ ist. Sei $\mathfrak{K} = a_1, a_2 \ldots$ ein solches Kollektiv in einer speziellen Theorie.

Es seien

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_2 &= a_2, a_3, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{K}_{100} &= a_{100}, a_{101}, \ldots \\
\mathfrak{K}_{101} &= a_{101}, a_{102}, \ldots
\end{aligned}$$

$\mathfrak{K}^1, \ldots, \mathfrak{K}^{100}$ sind dann unabhängig. Ferner ist die Verbindung $\mathfrak{K}^1 \ldots \mathfrak{K}^{100}$ unabhängig zu $\mathfrak{K}^{101}$. Jede zulässige Teilung an $\mathfrak{K}^1 \ldots \mathfrak{K}^{100}$ ist mithin eine reguläre Operation an $\mathfrak{K}^{101}$ und ändert die Verteilung von $\mathfrak{K}^{101}$ nicht ab. Daraus folgt, daß der Ausfall in $\mathfrak{K}$ von dem Ausfall der hundert vorangegangenen Versuche nicht abhängt. Wenn das Roulette unsere Axiome erfüllt, so kann mithin aus der Kenntnis von 100 aufeinanderfolgenden Ergebnissen über das Folgende nichts ausgesagt werden, es kann weder vorausgesagt noch auch mit einer anderen Sicherheit als ohne die Kenntnis der 100 Resultate erwartet werden.

(Eingegangen am 8. Mai 1934.)

Irreduzibilitätskriterien als Folgerung einiger Beziehungen zwischen den Faktorzerlegungen eines algebraischen Polynoms und seines konstanten Gliedes.

Von

Erik L. Petterson in Stockholm.

Wenn ein ganzzahliges Polynom $f(x)$ in zwei Faktoren $g(x)$ und $h(x)$ mit ganzen Koeffizienten zerlegt ist, so muß auch das konstante Glied von $f(x)$ in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegt sein, d. h. $f(0) = g(0) \cdot h(0)$. Wenn das konstante Glied $f(0)$ hinreichend wenige echte Teiler enthält, so bedeutet also schon dieses eine Beschränkung der Anzahl irreduzibler Faktoren, deren konstante Glieder echte Teiler des konstanten Gliedes des ursprünglichen Polynoms sind. Durch Einführung eines für alle Wurzeln von $f(x)$ gemeinsamen Exponenten P modulo einer Primzahl p ist es zuweilen möglich, wesentlich schärfere Beschränkungen zu gewinnen, und zwar auch dann, wenn aus der einzelnen Gleichung $f(0) = g(0)\,h(0)$ nur triviale Bedingungen abgeleitet werden können. Im folgenden werde ich dieses zeigen und auch als Folgerung einige Irreduzibilitätskriterien anführen.

Es sei $f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und p eine Primzahl mit den Bedingungen $p \nmid a_m$, $p > 2$. Die Wurzeln von $f(x)$ werden mit ξ_ν bezeichnet, also $f(\xi_\nu) = 0$ für $1 \leqq \nu \leqq m$. Nach der Theorie imaginärer Kongruenzwurzeln*) gibt es für jede Wurzel ξ_ν einen kleinsten Exponenten P_ν derart, daß $\xi_\nu^{P_\nu} \equiv 1 \pmod p$, d. h $\xi_\nu^{P_\nu} = 1 + p\,M_\nu(\xi_\nu)$, wo $M_\nu(\xi_\nu)$ ein Polynom in ξ_ν mit ganzen rationalen Koeffizienten ist. Dann muß es auch einen kleinsten Exponenten P' derart geben, daß $\xi_\nu^{P'} \equiv 1 \pmod p$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots, m$ ist. Alle derartigen Exponenten erhält man hieraus in der Form $P = i\,P'$, $i \geqq 1$. Im folgenden wird P einen beliebigen gemeinsamen Exponenten bezeichnen. Doch wird P als fest betrachtet und das Problem ist, Irreduzibilitätsbedingungen möglichst scharf hieraus abzuleiten.

Unter „ganzer Zahl" wird eine ganze rationale Zahl verstanden.

Es wird angenommen, daß das Polynom $f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$ in N ganzzahlige Faktoren $B_\nu(x)$ zerlegbar ist, d. h.

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{N} B_\nu(x).$$

*) Siehe beispielsweise „Bachmann: Allgemeine Arithmetik der Zahlkörper".

Der Grad von $B_\nu(x)$ sei r_ν, und das konstante Glied werde mit $b^{(\nu)}$ bezeichnet. Die Wurzeln ξ_λ von $f(x)$ bestimmen das konstante Glied nach der Gleichung

$$a_m = (-1)^m \prod_{\lambda=1}^{m} \xi_\lambda.$$

In derselben Weise muß jedes konstante Glied $b^{(\nu)}$ die Form

$$b^{(\nu)} = (-1)^{r_\nu} \prod_{\lambda=1}^{m} \xi_{\nu_\nu \lambda}$$

haben, wo $\xi_{\nu_\nu \lambda}$ für $1 \leqq \lambda \leqq r_\nu$ sämtliche Wurzeln von $B_\nu(x)$ darstellt.

Wegen der Definition von P folgt hieraus

$$b^{(\nu)P} \equiv (-1)^{r_\nu P} \pmod{p}.$$

Für die Anzahl N der Faktoren von $f(x)$ und für die konstanten Glieder $b^{(\nu)}$ dieser Faktoren muß also gelten

$$a_m = \prod_{\nu=1}^{N} b^{(\nu)}, \quad \begin{cases} b^{(\nu)P} \equiv 1 \pmod{p} & \text{für } 1 \leqq \nu \leqq N, \text{ wenn } P \text{ gerade ist} \\ b^{(\nu)2P} \equiv 1 \pmod{p} & \text{für } 1 \leqq \nu \leqq N, \text{ wenn } P \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Es wird nun angenommen, daß $|a_m| > 1$ und daß a_m in eine Anzahl n positiver oder negativer Faktoren d_ν zerlegt ist, welche folgende Bedingungen erfüllen:

$$a_m = \prod_{\nu=1}^{n} d_\nu, \quad |d_\nu| > 1, \quad d_\nu^P \equiv (\pm 1)^P \pmod{p}, \quad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n.$$

(Die Beziehungen $d_\nu^P \equiv 1 \pmod{p}$, wenn P gerade ist, und $d_\nu^{2P} \equiv 1 \pmod{p}$ wenn P ungerade ist, sind in $d_\nu^P \equiv (\pm 1)^P \pmod{p}$ zusammengefaßt.) Hieraus erhält man im allgemeinen mehrere Auflösungen für d_ν und n. Für ein gegebenes Polynom $f(x)$ kann der größte Wert von n als eine Funktion von p betrachtet werden. Dieser Maximalwert von n wird darum im folgenden N_p bezeichnet:

$$\operatorname{Max} n = N_p.$$

Aus folgendem Satz, der eine Zusammenfassung ist, geht die Bedeutung von N_p hervor.

Satz 1. *Es sei $f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$ ein ganzzahliges Polynom mit $|a_m| > 1$, p eine Primzahl > 2 und P ein gemeinsamer Exponent, modulo p, der Wurzeln von $f(x)$. Wenn $f(x)$ in N Faktoren mit ganzzahligen Koeffizienten zerlegbar ist und wenn die konstanten Glieder der Faktoren mit $b^{(\nu)}$, $1 \leqq \nu \leqq N$, bezeichnet werden, so gilt*

$$a_m = \prod_{\nu=1}^{N} b^{(\nu)}, \quad \begin{cases} b^{(\nu)P} \equiv 1 \pmod{p} & \textit{wenn } P \textit{ gerade ist} \\ b^{(\nu)2P} \equiv 1 \pmod{p} & \textit{wenn } P \textit{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Die Anzahl der irreduziblen Faktoren, deren Wurzeln nicht algebraische Einheiten sind, ist kleiner oder gleich N_p. Wenn N_p für irgendeine Primzahl $p > 2$ den Wert 1 annimmt, so ist das Vorkommen wenigstens einer

algebraischen Einheit als Wurzel von $f(x)$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(x)$ reduzibel sein soll.

Anmerkung. *Es ist leicht, Polynome zu konstruieren, die keine algebraischen Einheiten zu Wurzeln haben und für welche die Anzahl der Faktoren sogar den Wert N_p annimmt.*

Aus den Relationen $a_m = \prod_{\nu=1}^{N} b^{(\nu)}$, $b^{(\nu)P} \equiv (-1)^{r_\nu P}$, $\sum_{\nu=1}^{N} r_\nu = m$ mit N, $b^{(\nu)}$ und r_ν, $(1 \leqq \nu \leqq N)$, als Unbekannten sind in Satz 1 und bei der Bestimmung von N_p die Gradzahlen r_ν eliminiert. Daß diese Relationen dabei doch voll benutzt sind, wird folgendermaßen gezeigt.

Wenn P gerade ist, so ist die Kongruenz $b^{(\nu)P} \equiv (-1)^{r_\nu P} \pmod{p}$ von r_ν unabhängig, und es folgt $b^{(\nu)P} \equiv 1 \pmod{p}$.

Wenn P ungerade ist, so ist $(-1)^{r_\nu P} = (-1)^{r_\nu}$. Aus $b^{(\nu)P} \equiv (-1)^{r_\nu P}$ folgt also $b^{(\nu)P} \equiv (-1)^{r_\nu} \pmod{p}$. Für die Zahlen r_ν soll $\sum_{\nu=1}^{N} r_\nu = m$ gelten. Wenn m gerade ist, so gibt es also nur eine gerade Anzahl ungerader r_ν (oder gar keine) und folglich nur eine gerade Anzahl $b^{(\nu)}$ mit $b^{(\nu)P} \equiv -1 \pmod{p}$. Wenn m ungerade ist, so gibt es nur eine ungerade Anzahl ungerader r_ν und also nur eine ungerade Anzahl $b^{(\nu)}$ mit $b^{(\nu)P} \equiv -1 \pmod{p}$.

Diese Verteilung der Kongruenzen $b^{(\nu)P} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ wird aber von der Gleichung $a_m = \prod_{\nu=1}^{N} b^{(\nu)}$ direkt reguliert, denn wegen der Definition von P muß gelten: $\prod_{\nu=1}^{N} b^{(\nu)P} = a_m^P = (-1)^{m P} \prod_{\lambda=1}^{m} \xi_\lambda^P \equiv (-1)^{m P} \pmod{p}$. Da P nach der Voraussetzung ungerade ist, folgt hieraus

$$\prod_{\nu=1}^{N} b^{(\nu)P} \equiv (-1)^m \pmod{p},$$

woraus die eben abgeleiteten Bedingungen für $b^{(\nu)P} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ folgen.

Wenn P ungerade ist, kann also die Kongruenz

$$b^{(\nu)P} \equiv (-1)^{r_\nu P} \pmod{p}$$

wegen der Gleichung $a_m = \prod_{\nu=1}^{N} b^{(\nu)}$ einfach $b^{(\nu)2P} \equiv 1 \pmod{p}$ geschrieben werden, ohne einige Bedingungen dabei zu vernachlässigen.

Wenn $f(x)$ die Form $f(x) = x^m + p\,h(x)\,x + a$ hat, wo $|a| > 1$ und $h(x) = c_0 x^{m-1} + \ldots + c_{m-1}$ ein ganzzahliges Polynom vom Grade $\leqq m-1$ ist und wenn $-a$ zum Exponenten v, modulo p gehört, also $(-a)^v \equiv 1 \pmod{p}$, so kann man $P = m v$ setzen. Denn aus $f(\xi) = 0$ folgt $\xi^m = -a - p\,h(\xi)\,\xi$ und also

$$\xi^{m v} = (-a)^v + p\,M(\xi),$$

wo $M(\xi)$ ein ganzzahliges Polynom von ξ ist. Aber $(-a)^v \equiv 1 \pmod p$. Also

$$\xi^{m\,v} \equiv 1 \pmod p.$$

Diese Kongruenz gilt für alle Wurzeln ξ von $f(x)$.

Wenn N_p den Wert 1 annimmt, ergibt sich folgender Satz:

Satz 2. *Es sei gegeben ein ganzzahliges Polynom $f(x)$ von der Form $f(x) = x^m + p\,h(x)\,x + a$, wo $|a| > 1$ und $h(x) = c_0\,x^{m-1} + \ldots + c_{m-1}$ ein ganzzahliges Polynom vom Grade $\leqq m-1$ ist und wo $-a$ zu v modulo der Primzahl p ($p > 2$) gehört. Für jeden positiven oder negativen Teiler d von a mit der Beschränkung $1 < |d| < |a|$ wird $d^{m\,v} \not\equiv 1 \pmod p$ vorausgesetzt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Polynom $f(x)$ reduzibel sein soll, ist dann, daß es unter den Wurzeln von $f(x)$ wenigstens eine algebraische Einheit gibt.*

Wenn es unter den Wurzeln des Polynoms $f(x)$ in Satz 2 keine algebraischen Einheiten gibt, so ist $f(x)$ also irreduzibel. Eine einfache Weise, algebraische Einheiten als Wurzeln auszuschließen, ist ja beispielsweise die, die Koeffizienten so zu wählen, daß alle Wurzeln außerhalb des Einheitskreises liegen. Auch können keine Wurzeln von $f(x)$ algebraische Einheiten sein, wenn $f(x)$ außer der Form in Satz 2 die Form $f(x) = x^m + q\,H(x)$ hat, wo q eine Primzahl und $H(x)$ vom Grade $\leqq m-1$ ist, denn dann sind die konstanten Glieder aller Faktoren von $f(x)$ durch q teilbar und also absolut größer als 1. Ein Polynom von der Form $f(x) = x^m + p\,q\,h(x)\,x + a$ mit $q \neq p$; q/a und mit im übrigen sämtlichen Bedingungen aus Satz 2, muß also irreduzibel sein. Das Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein oder die Verallgemeinerungen von Ore können für das Polynom $x^m + p\,q\,h(x)\,x + a$ mit q/a ohne fernere Bedingungen nicht benutzt werden und so natürlich auch nicht für die früher genannten Polynome.

Ich werde nun die möglichen Zerlegungen des konstanten Gliedes a des Polynoms $f(x) = x^m + p\,h(x)\,x + a$ untersuchen, wobei vorausgesetzt wird, daß a eine Primzahlpotenz, $a = \pm q^M$, $M \geqq 1$, $q \neq p$, ist, und dabei den Wert N_p bestimmen.

Es sei $q^s \equiv 1 \pmod p$ mit s als Minimalexponent und $(s, M) = v$. Man kann dann $s = t\,v$ und $M = t_1\,v$ setzen, wo also $(t, t_1) = 1$ ist. Überdies wird $(m, v) = d$ eingeführt. Wenn $f(x)$ reduzibel ist, so müssen die konstanten Glieder der Faktoren die Form $\pm q^k$, $0 \leqq k \leqq t_1\,v$, haben. Der Exponent k kann verschiedene Werte für verschiedene Faktoren annehmen. Hier werden einige für alle Faktoren gemeinsame Bedingungen für k abgeleitet werden. Die Werte des P, die dabei berechnet werden, sind Minimalwerte. Folgende Möglichkeiten sind vorhanden.

I. $a = -q^{t_1 v}$, $q^{tv} \equiv 1 \pmod{p}$, $(t, t_1) = 1$; $(m, v) = d$.

Man findet $P = tm$.

1. tm ist gerade.

Dann gilt $q^{ktm} \equiv 1 \pmod{p}$. Also tv/ktm, woraus $\frac{v}{d}\Big/k$ oder $k = i\frac{v}{d}$. Aus $0 \leqq k \leqq t_1 v$ folgt dann $0 \leqq i \leqq t_1 d$.

2. tm ist ungerade, und $\frac{v}{d}$ ist gerade.

Dann gilt $q^{k2tm} \equiv 1 \pmod{p}$. Also $tv/k2tm$, woraus $\frac{v}{d}\Big/2k$ oder $k = i\frac{v}{2d}$. Aus $0 \leqq k \leqq t_1 v$ folgt dann $0 \leqq i \leqq 2t_1 d$.

3. tm ist ungerade, und $\frac{v}{d}$ ist ungerade.

Dann gilt $q^{k2tm} \equiv 1 \pmod{p}$. Also $tv/k2tm$, woraus $\frac{v}{d}\Big/k$ oder $k = i\frac{v}{d}$. Aus $0 \leqq k \leqq t_1 v$ folgt dann $0 \leqq i \leqq t_1 d$.

II. $a = q^{t_1 v}$, $q^{tv} \equiv 1 \pmod{p}$, $(t, t_1) = 1$; $(m, v) = d$.

a) $4/t$.

Man findet $P = tm$. P ist also gerade.

Dann gilt $q^{ktm} \equiv 1 \pmod{p}$. Also tv/ktm, woraus $\frac{v}{d}\Big/k$ oder $k = i\frac{v}{d}$. Aus $0 \leqq k \leqq t_1 v$ folgt dann $0 \leqq i \leqq t_1 d$.

b) $2/t$; $4 \nmid t$.

Man findet $P = \frac{tm}{2}$.

1. m ist gerade (das heißt P ist gerade), und $\frac{m}{d}$ ist gerade.

Es gilt $q^{\frac{ktm}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Also $tv\Big/\frac{ktm}{2}$, woraus $\frac{v}{d}\Big/k$ oder $k = i\frac{v}{d}$. Aus $0 \leqq k \leqq t_1 v$ folgt dann $0 \leqq i \leqq t_1 d$.

2. m ist gerade, und $\frac{m}{d}$ ist ungerade.

Es gilt $q^{\frac{ktm}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Also $tv\Big/\frac{ktm}{2}$, woraus $\frac{2v}{d}\Big/k$ oder $k = i\frac{2v}{d}$. Aus $0 \leqq k \leqq t_1 v$ folgt dann $0 \leqq i \leqq \frac{t_1 d}{2}$.

3. m ist ungerade.

Es gilt $q^{\frac{k2tm}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Also $tv\Big/\frac{k2tm}{2}$, woraus $\frac{v}{d}\Big/k$ oder $k = i\frac{v}{d}$. Aus $0 \leqq k \leqq t_1 v$ folgt dann $0 \leqq i \leqq t_1 d$.

c) $2 \nmid t$.

Man findet $P = 2tm$. P ist also gerade.

1. $\frac{v}{d}$ ist gerade.

Es gilt $q^{k2tm} = 1 \pmod p$. Also $tv/k\,2tm$, woraus $\frac{v}{d}/2k$ oder $k = i\frac{v}{2d}$.

Aus $0 \leqq k \leqq t_1 v$ folgt dann $0 \leqq i \leqq 2t_1 d$.

2. $\frac{v}{d}$ ist ungerade.

Es gilt $q^{k2tm} \equiv 1 \pmod p$. Also $tv/k\,2tm$, woraus $\frac{v}{d}/k$ oder $k = i\frac{v}{d}$.

Aus $0 \leqq k \leqq t_1 v$ folgt dann $0 \leqq i \leqq t_1 d$.

Ein Beispiel wird gegeben. Es sei $x^m + ph(x)x - q^{t_1 v} = \prod_{\nu=1}^{N} B_\nu(x)$ mit den gewöhnlichen Voraussetzungen $q^{tv} \equiv 1 \pmod p$, $(t, t_1) = 1$, $(m, v) = d$. Wenn dann zum Beispiel t (und also tm) gerade ist, so muß nach (I 1) das konstante Glied $b^{(\nu)}$ in $B_\nu(x)$ die Form $b^{(\nu)} = \pm q^{i_\nu \frac{v}{d}}$ haben, wo i_ν eine ganze Zahl aus dem Intervall $0 \leqq i_\nu \leqq t_1 d$ ist. Außerdem wird aus $\sum_{\nu=1}^{N} i_\nu \frac{v}{d} = t_1 v$ und $0 \leqq i_\nu \leqq t_1 d$ abgeleitet, daß die Anzahl der Faktoren, für welche $i_\nu \geqq 1$ ist, kleiner oder gleich $t_1 d$ sein muß. Wenn aber $i_\nu \geqq 1$ ist, so ist auch $|b^{(\nu)}| = q^{i_\nu \frac{v}{d}} > 1$. Also ist in diesem Fall $N_p = t_1 d$. In ähnlicher Weise sind die Zahl N_p und die Formen der konstanten Glieder der eventuellen Faktoren für alle übrigen Fälle bestimmt.

Man findet für N_p folgende Werte.

$N_p = t_1 d$ in (I 1), (I 3), (II a), (II b 1), (II b 3) und (II c 2).

$N_p = \frac{t_1 d}{2}$ in (II b 2).

$N_p = 2t_1 d$ in (I 2) und (II c 1).

Folgende Minimalwerte für N_p lassen sich hieraus ableiten:

Aus $N_p = t_1 d$ folgt $N_p = 1$ für $t_1 = d_1 = 1$.

Aus $N_p = \frac{t_1 d}{2}$ folgt $N_p = 1$ für $t_1 = 1$ und $d = 2$.

(Aus den Voraussetzungen in (II b 2) folgt, daß d hier gerade und also $d \geqq 2$ ist.)

Aus $N_p = 2t_1 d$ folgt $N_p = 2$ für $t_1 = d = 1$.

Die Irreduzibilitätskriterien, die hieraus für $N_p = 1$ folgen, werden folgendermaßen zusammengefaßt. Dabei wird wie gewöhnlich vorausgesetzt, daß $h(x) = c_0 x^{m-1} + \ldots + c_{m-1}$ ein ganzzahliges Polynom vom Grade $\leqq m - 1$ ist und daß p mit $p > 2$, und q Primzahlen sind.

Satz 3. a) *Es sei*

$$q^{tv} \equiv 1 \pmod p, \textit{ mit } tv \textit{ als Minimalexponent},$$
$$(m, v) = 1 \textit{ und } 2/t \textit{ oder } 2 \nmid tv.$$

Dann folgt:

Das Polynom $f(x) = x^m + p\,h(x)\,x \pm q^v$ *ist mit beiden Vorzeichen von* q^v *dann und* nur dann *reduzibel, wenn es unter den Wurzeln von* $f(x)$ *wenigstens eine algebraische Einheit gibt. Das Polynom* $x^m + p\,q\,h(x)\,x \pm q^v$ *ist mit beiden Vorzeichen von* q^v *irreduzibel.*

b) *Es sei*

$$q^{tv} \equiv 1 \pmod{p} \text{ mit } tv \text{ als Minimalexponent,}$$

$$(m, v) = 2,\ 2/t;\ 4 \nmid t \text{ und } 4 \nmid m.$$

Es folgt:

Das Polynom $f(x) = x^m + p\,h(x)\,x + q^v$ *ist dann und* nur dann *reduzibel, wenn es unter den Wurzeln von* $f(x)$ *wenigstens eine algebraische Einheit gibt. Das Polynom* $x^m + p\,q\,h(x)\,x + q^v$ *ist irreduzibel.*

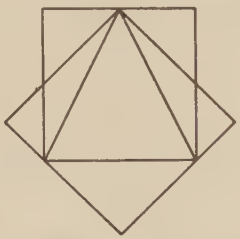
(Eingegangen am 29. X. 1934.)

Zur Arbeit von P. Ganapathi: „A note on the oval".

Von

H. Gericke in Freiburg.

In § 1 der genannten Arbeit[1]) wird behauptet, daß jeder Eibereich eine ungerade Anzahl umschriebener Quadrate besitzt. W. Fenchel bemerkt in der Besprechung der Arbeit[2]), daß der gegebene Beweis nur dann gilt, wenn $\mathfrak{f}(\varphi) = \mu(\varphi) - \mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ „in jeder Nullstelle das Vorzeichen wechselt, was vom Verfasser stillschweigend angenommen wird,



aber gewiß nicht immer zutrifft". Der von Ganapathi nicht berücksichtigte Fall tritt z. B. bei einem gleichschenkligen Dreieck ein, dessen Höhe gleich der Grundlinie ist. Ein solches Dreieck besitzt zwei umschriebene Quadrate. Übrigens läßt sich durch Übergang zur Parallelkurve auch ein Eibereich ohne Ecken konstruieren, der zwei umschriebene Quadrate besitzt.

[1]) Math. Zeitschr. 38 (1934), S. 490.

[2]) Zentralbl. f. Math. 9 (1934), S. 30.

(Eingegangen am 5. November 1934.)

Zwei Sätze über Differential- und Differenzenquotient von analytischen Funktionen.

Von

Georg Aumann, z. Z. in Princeton (N. J.).

---

1. Unlängst wies ich in dieser Zeitschrift[1]) auf das folgende Abschätzungsproblem hin:

Sei G ein schlichtes Gebiet der z-Ebene, das die Punkte $z = a$, $z = b$ $(a \neq b)$ im Innern enthält; es bezeichne ferner $\mathfrak{F}$ eine Familie von Funktionen $f(z)$, die in G regulär sind und den Bedingungen $f(a) = a$, $f(b) = b$ genügen, und $\mathfrak{C}$ die Gesamtheit aller a und b innerhalb G verbindenden Kurven C. Das Problem ist: Unter welchen Umständen ist die Konstante

$$\mathsf{A}_G(a, b; \mathfrak{F}) = \underset{C \prec \mathfrak{C},\, f \prec \mathfrak{F}}{\text{unt. Gr.}} \left(\underset{z \prec C}{\text{Max}} |f'(z)| \right)$$

positiv? Die folgenden Sätze beantworten diese Frage in zwei wichtigen Fällen:

Satz 1. *Ist $\mathfrak{F}$ die Familie aller in G regulären Funktionen mit $f(a) = a$, $f(b) = b$, dann ist $\mathsf{A}_G(a, b; \mathfrak{F}) = 0$.*

Satz 2. *Ist $\mathfrak{F}$ eine in G normale Familie, dann ist $\mathsf{A}_G(a, b; \mathfrak{F}) > 0$.*

2. Beweis von Satz 1. Ohne Einschränkung sei $a = 0$, $b = 1$, und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir können die Punkte 0 und 1 innerhalb G durch einen sich nicht überschneidenden, einschließlich der Endpunkte analytischen Kurvenbogen C verbinden, dessen Länge größer ist als $\frac{1}{\varepsilon}$ [2]). Die Bogenlänge $s(z)$ von C zwischen den Punkten 0 und z ist dann

---

[1]) Über den Differential- und Differenzenquotient von regulären analytischen Funktionen, insbesondere von Polynomen, Math. Zeitschr. 38 (1933), S. 70—93.

[2]) Dies kann man z. B. folgendermaßen bewerkstelligen: Man nehme einen sich nicht überschneidenden Streckenzug Z, der 0 und 1 innerhalb G verbindet von der Länge $> \frac{2}{\varepsilon}$, was immer möglich ist. Das zu Z gehörige Komplementärgebiet bilde man durch eine konforme Abbildung auf das Äußere des Kreises $|w| = 1$ ab. Die Bildkurven der Kreise $|w| = r$, $r > 1$, schließen sich für $r \to 1$ beliebig nahe an Z an. Indem man dabei die Endstrecken von Z geeignet verkürzt, kann man erreichen, daß eine dieser Bildkurven gerade durch die beiden Punkte geht, und außerdem die übrigen verlangten Eigenschaften hat.

offenbar eine analytische Funktion. Setzt man $f(z) = \frac{s(z)}{s(1)}$, dann ist $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und auf C

$$|f'| = \frac{1}{s(1)} < \varepsilon, \tag{1}$$

und man kann ein Gebiet U angeben mit $C \prec U \prec G$, in dem $f(z)$ analytisch ist. Nun betrachten wir[3]) die durch

$$f(z) - z = z(z-1)\,g(z) \tag{2}$$

definierte analytische Funktion $g(z)$. Bekanntlich kann man $g(z)$ auf der in U enthaltenen abgeschlossenen Punktmenge C gleichmäßig durch Polynome approximieren; es gibt also ein Polynom $P(z)$, so daß auf C die Ungleichungen

$$|P(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{\underset{\zeta \prec C}{\mathrm{Max}}\,|2\zeta - 1|}, \tag{3}$$

$$|P'(z) - g'(z)| < \frac{\varepsilon}{\underset{\zeta \prec C}{\mathrm{Max}}\,|\zeta(\zeta-1)|} \tag{4}$$

gelten. Setzt man

$$Q(z) - z = z(z-1)\,P(z), \tag{5}$$

dann gilt für das Polynom $Q(z)$, wie aus (1) bis (5) unmittelbar hervorgeht, $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$ und auf C die Ungleichung $|Q'(z)| < 3\varepsilon$. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

3. Beweis von Satz 2. Angenommen, es ist $\mathsf{A}_G(a, b; \mathfrak{F}) = 0$. Da $\mathfrak{F}$ normal ist, so gibt es eine konvergente Minimalfolge von Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ und zugehörige Kurven $C_1, C_2, \ldots$ mit

$$\underset{z \prec C_\nu}{\mathrm{Max}}\,|f_\nu'(z)| < \frac{1}{\nu}; \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Der Kreis $|z - a| \leqq \varrho < |b - a|$ sei in G enthalten. Jedes C_ν schneidet den Kreis $|z - a| = \frac{\varrho}{\mu}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ in wenigstens einem Punkt $z_{\mu\nu}$. Wir können annehmen, daß $\lim\limits_{\nu \to \infty} z_{\mu\nu} = z_\mu^*$ vorhanden ist; andernfalls hätten wir uns mit Hilfe des Diagonalverfahrens eine Teilfolge $\nu_1, \nu_2, \ldots$ zu verschaffen, für die die fraglichen Grenzwerte vorhanden sind und mit der wir dann weiter operieren könnten. Nun konvergiert unsere Funktionenfolge f_ν wegen $f_\nu(a) = a$ gegen eine endliche reguläre Funktion $f^*(z)$

[3]) Den folgenden Kunstgriff verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Prof. J. Walsh; vgl. J. Walsh, On the expansion of analytic functions in series of polynomials and in series of other analytic functions. Trans. Amer. M. S. 30 (1929), S. 307—332, (Theorem 10).

in G, und sogar gleichmäßig in $|z-a| \leqq \varrho$. Dies tut dann auch die Folge der Ableitungen. Wir haben daher

$$0 = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu'(z_{\mu\nu}) = f^{*\prime}\left(\lim_{\nu \to \infty} z_{\mu\nu}\right) = f^{*\prime}(z_\mu^*).$$

Wegen $\lim_{\mu \to \infty} z_\mu^* = a$ ist nach dem Nullstellensatz $f^{*\prime}(z) \equiv 0$. Das steht aber im Widerspruch mit $f^*(a) \neq f^*(b)$. Damit ist auch Satz 2 bewiesen.

4. Zu Satz 2 möchte ich noch bemerken, daß aus dem Positivsein von $\mathsf{A}_G(a, b; \mathfrak{F})$ keineswegs die Normalität der Familie $\mathfrak{F}$ erschlossen werden kann. Dies geht aus folgendem Beispiel hervor:

$\mathfrak{F}$ besteht aus den Funktionen $f_n(z) = z + \frac{1}{2\pi n} \sin 2\pi n z$, $n = 1, 2, \ldots$.

G ist die ganze Ebene, $a = 0$, $b = 1$. Wie man unmittelbar einsieht, ist hier $\mathsf{A}_G(a, b; \mathfrak{F}) = 2$.

In **3** wird die Normalität von $\mathfrak{F}$ nur benutzt, um die der Minimalfolge f_ν (oder f_ν', was hier dasselbe ist[4])) zu sichern. Nun kann es wohl vorkommen, daß $\mathfrak{F}$ nicht normal ist, aber normale Minimalfolgen existieren; ein wichtiges Beispiel dafür bietet der Fall, wo $\mathfrak{F}$ die Gesamtheit aller Polynome höchstens m-ten Grades ist[1]). Auch in diesem allgemeineren Fall gilt die Aussage des Satzes 2.

---

[4]) Vgl. S. Mandelbrojt, Sur les suites de fonctions holomorphes. Les suites correspondantes des fonctions dérivées, Fonctions entières, Jour. Math. pures appl. (9) 8 (1929), S. 173—195.

(Eingegangen am 12. Dezember 1934.)

Zur Theorie der nicht-abzählbaren primären abelschen Gruppen.

Von

Helmut Ulm in Göttingen.

Die Struktur der abzählbaren primären abelschen Gruppen ist völlig bekannt[1]). Man erhält nur unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen eine Zerlegung dieser Gruppen in zyklische Summanden. Nämlich eine derartige Gruppe ist dann und nur dann in Zyklen zerlegbar, wenn jedes Element vom Höhenexponenten unendlich[2]) in einer Untergruppe vom Typus (p^∞) liegt, insbesondere ist also eine solche Gruppe in Zyklen zerlegbar, wenn sie keine Elemente von unendlichem Höhenexponenten enthält. Die Beweise der unter [1]) zitierten Arbeiten benutzen nun wesentlich die Abzählbarkeit der betrachteten Gruppen. Dagegen hat schon Prüfer[3]) ein Beispiel einer nicht-abzählbaren primären abelschen Gruppe angegeben, die nur Elemente von endlichem Höhenexponenten enthält und doch nicht in Zyklen zerlegbar ist. Prüfer versucht in der unter [3]) zitierten Arbeit durch Einführung idealer Elemente einen Überblick über die Struktur der primären Gruppen zu gewinnen, gelangt aber nicht zu der unter [1]) erwähnten vollständigen Klassifikation. Das oben erwähnte Prüfersche Beispiel erscheint nun in dieser Theorie und ist ohne sie nicht verständlich. Ich will daher im folgenden unabhängig von dieser Prüferschen Theorie und auf wesentlich kürzerem Wege ein Beispiel einer primären abelschen Gruppe angeben, die weder ein Element von unendlichem Höhenexponenten enthält, noch in Zyklen zerlegbar ist.

Die Gruppe werde durch die Basis x_{ik} erzeugt (k durchlaufe die Zahlen 1, 2, ...; i eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$). Zwischen den x_{ik} sollen folgende Relationen bestehen:

$$\begin{array}{lll} \text{Für} & i = 0, & p^k x_{0k} = 0, \\ k = 1, & i > 0, & p x_{i1} = 0, \\ k > 1, & i > 0, & a_{ik-1} x_{0k-1} - x_{ik-1} + p x_{ik} = 0. \end{array}$$

[1]) Siehe die Arbeit des Vefassers Math. Annalen 107, S. 774—803 (1933) und eine demnächst in den Math. Annalen erscheinende Umarbeitung.

[2]) Ein Element x einer primären Gruppe $\mathfrak{A}$ hat den Höhenexponenten n, wenn die Gleichung $x = p^n x'$ durch ein Element x' aus $\mathfrak{A}$ lösbar ist, dagegen dieselbe Gleichung für $n+1$ nicht lösbar ist. Ist die Gleichung für jedes n lösbar, so hat x unendlichen Höhenexponenten. (Das Nullelement wird, weil es immer einen unendlichen Höhenexponenten hat, nicht gerechnet.)

[3]) H. Prüfer, Phil. Diss. Berlin 1921. (Nur hektographiert erschienen.)

Hierin sei p eine Primzahl. Die a_{ik} seien ganze rationale Zahlen, die mod p reduziert sein mögen. Die Vektoren $\mathfrak{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots)$ sollen unendlich viele von Null verschiedene Stellen haben, und es soll sich aus endlich vielen von ihnen kein Vektor $\mathfrak{b}$ ganzzahlig zusammensetzen lassen, der mod p nur endlich viele von Null verschiedene Stellen enthält. Ersichtlich gibt es nichtabzählbar viele solche Vektoren $\mathfrak{a}_i$, womit die Existenz der Gruppe $\mathfrak{A}$ gesichert ist. Für die so definierte Gruppe $\mathfrak{A}$ gilt dann: Sie ist primär, sie enthält kein Element von unendlichem Höhenexponenten und ist nicht in Zyklen zerlegbar.

Beweis. 1. Die Gruppe ist primär, denn das Element x_{ik} hat, wie man aus den angegebenen Relationen sofort sieht, genau die Ordnung p^k für jedes i. Damit hat aber auch jedes Element aus $\mathfrak{A}$ eine Potenz von p als Ordnung.

2. Enthielte $\mathfrak{A}$ ein Element von unendlichem Höhenexponenten, so auch die Untergruppe $\overline{\mathfrak{A}}$ derjenigen Elemente von $\mathfrak{A}$, deren Ordnung $\leqq p$ ist. Die Gruppe $\overline{\mathfrak{A}}$ wird aber von den Elementen $p^{k-1}x_{0k}$ bei beliebigem k und den x_{i1} erzeugt. Allgemein die Untergruppe $\mathfrak{A}_n$ der Elemente, deren Ordnung $\leqq p^n$ ist, wird von den $p^{k-n}x_{0k}$ mit $k > n$ und den x_{ik} mit $k \leqq n$ erzeugt. Wäre nun

$$x = \sum_{j=1}^{m} a_j p^{j-1} x_{0j} + \sum_i a_i' x_{i1} \tag{1}$$

ein Element aus $\overline{\mathfrak{A}}$ von unendlichem Höhenexponenten, so müßte für jedes n die Gleichung $x = p^n x'$ in $\mathfrak{A}$ lösbar sein. x_{ik} möge in x' auftreten, dann kann ich annehmen, daß $k > n$ und der Faktor von x_{ik} gleich $c_{ik}p^{k-n-1}$ ist. Das letztere folgt aus der Tatsache, daß sich aus den x_{ik} bei festem k kein Element von einer Ordnung kleiner p^k zusammensetzen läßt, sofern nicht alle auftretenden Koeffizienten durch p teilbar sind. Wegen

$$p^{k-1}x_{ik} = x_{i1} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} p^{j-1} x_{0j},$$

liefert x_{ik} dann in bezug auf x_{0j} in (1) den Beitrag

$$c_{ik} a_{ij} p^{j-1} x_{0j}.$$

Summiere ich über k, so ergibt sich

$$\sum_k c_{ik} a_{ij} p^{j-1} x_{0j},$$

wo die auftretende Summe, wie immer in dieser Arbeit, endlich ist. Da $p^{j-1}x_{0j}$ die Ordnung p hat, und da $\sum_k c_{ik} - a_i' \equiv 0\,(p)$ sein muß, ist der Koeffizient von $p^{j-1}x_{0j}$ kongruent $a_i' a_{ij}$ mod p. Summiere ich über alle i, für die ein x_{ik} in x' vorkommt, so erhalte ich als Koeffizienten von $p^{j-1}x_{0j}$ den Ausdruck $\sum_i a_i' a_{ij}$, der nach der Annahme von x kongruent a_j sein

muß. Nehme ich $j > m$, so gilt $\sum_i a_i' a_{ij} \equiv 0 \,(p)$ für $m < j \leqq n$. Wegen der Voraussetzung über die a_i ergibt sich ein Widerspruch.

3. Wenn ich zwei Elemente meiner oben definierten Gruppe als nicht verschieden ansehe, wenn sie sich um das p-fache eines Elementes der Gruppe $\mathfrak{A}$ unterscheiden, anders ausgedrückt, wenn ich die Faktorgruppe von $\mathfrak{A}$ nach der Untergruppe aller Elemente vom Höhenexponenten $\geqq 1$ bilde, so erhält man eine Gruppe, die sich aus abzählbar vielen zyklischen Gruppen vom Typus (p) zusammensetzt. Denn die x_{ik} mit $i > 0$ sind bereits durch die x_{0k} bis auf das p-fache eines Elementes aus der Gruppe $\mathfrak{A}$ ausdrückbar. Wäre andererseits die obige Gruppe direkte Summe von Zyklen vom Typus (p^n) — es müssen mehr als abzählbar viele sein —, so kann auch die entsprechend definierte Faktorgruppe nicht abzählbar und damit die Gruppe $\mathfrak{A}$ nicht in Zyklen zerlegbar sein. Damit ist der obige Satz bewiesen.

(Eingegangen am 20. Dezember 1934.)

Autoparallele Mannigfaltigkeiten im affin zusammenhängenden Raum.

Von

K. H. Weise in Jena.

Einleitung.

Eine autoparallele Linie im affin zusammenhängenden Raum kann durch folgende Eigenschaft charakterisiert werden: Ihre Tangentenvektoren bilden ein bezüglich der Kurve paralleles Feld. In der vorliegenden Arbeit wird die Parallelverschiebung p-dimensionaler gerichteter Flächengrößen untersucht. Damit wird es möglich, den Begriff Parallelfeld auf Tensoren p-ter Stufe auszudehnen. Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein an eine p-dimensionale Fläche angeheftetes q-stufiges Tensorfeld bezüglich dieser Fläche parallel ist, werden in § 2 aufgestellt. Entsprechend der autoparallelen Linie können wir jetzt die Verallgemeinerung der p-dimensionalen Ebene bilden: die autoparallele Fläche.

Trägt eine Kurve ein Feld gerichteter Flächengrößen, die jeweils die Tangentenrichtung der Kurve enthalten, so sprechen wir von einem Streifen. Autoparallele Streifen sind die Verallgemeinerungen der ebenen Streifen, ihre Trägerkurven daher „ebene Kurven". Umgekehrt kann eine Fläche Träger eines eindimensionalen parallelen Vektorfeldes sein, welches dem Tangentialraum der Fläche angehört. Dies führt zu einer Verallgemeinerung der Zylinderflächen.

Eine alle diese Einzelfälle und die entsprechenden höherdimensionalen Begriffsbildungen umfassende Darstellung lautet:

Eine p-dimensionale Fläche trägt in ihren regulären Punkten ein Feld p-stufiger Tangentialtensoren; außerdem sei ein bezüglich dieser Fläche paralleles Feld q-stufiger zerfallender Tensoren angeheftet.

α) $q > p$. Falls der Tangentialraum in dem Parallelfeld enthalten ist, sprechen wir von „autoparallelen Streifen". Die Trägermannigfaltigkeit heiße „eben von der Dimension q".

β) $q = p$. Wenn Tangentialraum und Parallelfeld zusammenfallen, entsteht eine „autoparallele Fläche".

γ) $q < p$. Falls das Parallelfeld in dem Tangentialraum enthalten ist, sprechen wir von „Zylinderfläche".

So gibt die Erweiterung der Parallelverschiebung von Vektoren auf gerichtete p-dimensionale Gebilde die Mittel, in den affin zusammen-

hängenden Raum eingebettete q-dimensionale Flächen *unabhängig* von irgendeiner Einspannung zu kennzeichnen.

Um in die Art der Bezeichnung einzuführen, seien die verwendeten Begriffe kurz entwickelt.

Jeder Punkt $P(x^1, \ldots, x^n)$ einer n-dimensionalen Zahlenmannigfaltigkeit sei Träger zweier zueinander komplementärer linearer Mannigfaltigkeiten $L(P)$ und $\breve{L}(P)$ mit den Basiselementen $\mathfrak{E}_i$, $\mathfrak{E}^i$; $i = 1, \ldots, n$ [1]). Bei einer umkehrbar eindeutigen mit stetigen Ableitungen genügend hoher Ordnung versehenen Transformation der Koordinaten

$$'x^i = {}'x^i(x^1, \ldots, x^n)$$

sollen die Basiselemente $\mathfrak{E}^i$ wie die Differentiale dx^i und die Elemente $\mathfrak{E}_i$ entsprechend komplementär wie die Differentialparameter $\frac{\partial}{\partial x^i}$ transformiert werden:

$$(0) \qquad \begin{aligned} dx^i &= \frac{\partial x^i}{\partial {}'x^k} d\,{}'x^k, & \mathfrak{E}^i &= \frac{\partial x^i}{\partial {}'x^k} {}'\mathfrak{E}^k, \\ \frac{\partial}{\partial x^i} &= \frac{\partial {}'x^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial {}'x^k}, & \mathfrak{E}_i &= \frac{\partial {}'x^k}{\partial x^i} {}'\mathfrak{E}_k. \end{aligned}$$

Ein so ausgestatteter Raum heißt „im Kleinen linear". Ein linearer Zusammenhang wird durch die Relationen postuliert:

$$(0,1) \qquad \begin{aligned} d\,\mathfrak{E}_i &= \Gamma_i{}^k{}_l \, \mathfrak{E}_k \, dx^l, \\ d\,\mathfrak{E}^i &= \underset{\sim}{\Gamma}{}_k{}^i{}_l \, \mathfrak{E}^k \, dx^l. \end{aligned}$$

Sollen bei dieser Übertragung die gewöhnlichen Rechenregeln für die Differentiation eines Produktes auch im Falle eines inneren Produktes gelten (überschiebungsinvariante Übertragung), so folgt:

$$(0,2) \qquad \Gamma_i{}^k{}_l = -\underset{\sim}{\Gamma}{}_i{}^k{}_l.$$

Ein mit dieser Übertragung ausgestatteter Raum heißt affin zusammenhängend.

§ 1.

Die Übertragung eines p-stufigen Tensors längs einer Kurve.

Im affin zusammenhängenden Raum A_n sei eine Kurve C gegeben:

$$x^i = x^i(t).$$

[Die Funktionen $x^i(t)$ werden als genügend oft differenzierbar vorausgesetzt.]

[1]) Man vergleiche hierzu R. König und E. Peschl, Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum, 1. bis 3. Mitt., Sächs. Akad. Ber. 86 (1934).

Wir definieren die Übertragung eines p-stufigen Tensors längs dieser Kurve C zunächst für die Basiselemente:

$$(1,1)\qquad \begin{aligned} d\,\mathfrak{E}_{\underbrace{i_1 \dots i_p}} &= d\,(\mathfrak{E}_{i_1} \times \mathfrak{E}_{i_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{i_p}) \\ &= d\,\mathfrak{E}_{i_1} \times \mathfrak{E}_{i_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{i_p} + \dots + \mathfrak{E}_{i_1} \times \dots \times \mathfrak{E}_{i_{p-1}} \times d\,\mathfrak{E}_{i_p} \end{aligned}$$

und entsprechend:

$$(1,2)\qquad \begin{aligned} d\,\mathfrak{E}^{\overbrace{i_1 \dots i_p}} &= d\,(\mathfrak{E}^{i_1} \times \mathfrak{E}^{i_2} \times \dots \times \mathfrak{E}^{i_p}) \\ &= d\,\mathfrak{E}^{i_1} \times \mathfrak{E}^{i_2} \times \dots \times \mathfrak{E}^{i_p} + \dots + \mathfrak{E}^{i_1} \times \dots \times \mathfrak{E}^{i_{p-1}} \times d\,\mathfrak{E}^{i_p}. \end{aligned}$$

Die nähere Ausführung ergibt mit Hilfe von (0, 1):

$$\begin{aligned} d\,\mathfrak{E}_{\underbrace{i_1 \dots i_p}} &= \Gamma_{i_1\, l}^{k_1}\, \mathfrak{E}_{k_1} \times \mathfrak{E}_{i_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{i_p} \frac{dx^l}{dt}\, dt \\ &\quad + \Gamma_{i_2\, l}^{k_2}\, \mathfrak{E}_{i_1} \times \mathfrak{E}_{k_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{i_p} \frac{dx^l}{dt}\, dt \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + \Gamma_{i_p\, l}^{k_p}\, \mathfrak{E}_{i_1} \times \mathfrak{E}_{i_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{k_p} \frac{dx^l}{dt}\, dt \\ d\,\mathfrak{E}_{\underbrace{i_1 \dots i_p}} &= \Gamma_{i_1\, l}^{k_1}\, \delta_{i_2}^{k_2} \dots \delta_{i_p}^{k_p}\, \mathfrak{E}_{k_1} \times \mathfrak{E}_{k_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{k_p} \frac{dx^l}{dt}\, dt \\ &\quad + \Gamma_{i_2\, l}^{k_2}\, \delta_{i_1}^{k_1} \delta_{i_3}^{k_2} \dots \delta_{i_p}^{k_p}\, \mathfrak{E}_{k_1} \times \mathfrak{E}_{k_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{k_p} \frac{dx^l}{dt}\, dt \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + \Gamma_{i_p\, l}^{k_p}\, \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_{p-1}}^{k_{p-1}}\, \mathfrak{E}_{k_1} \times \mathfrak{E}_{k_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{k_p} \frac{dx^l}{dt}\, dt. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$(1,3)\qquad \begin{aligned} \Gamma_{\underbrace{i_1 \dots i_p}\, l}^{k_1 \dots k_p} &= \Gamma_{i_1\, l}^{k_1}\, \delta_{i_2}^{k_2} \dots \delta_{i_p}^{k_p} \\ &\quad + \delta_{i_1}^{k_1}\, \Gamma_{i_2\, l}^{k_2}\, \delta_{i_3}^{k_3} \dots \delta_{i_p}^{k_p} \\ &\quad + \dots\dots\dots\dots \\ &\quad + \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_{p-1}}^{k_{p-1}}\, \Gamma_{i_p\, l}^{k_p}. \end{aligned}$$

Es wird dann

$$d\,\mathfrak{E}_{\underbrace{i_1 \dots i_p}} = \Gamma_{\underbrace{i_1 \dots i_p}\, l}^{k_1 \dots k_p}\, \mathfrak{E}_{k_1} \times \dots \times \mathfrak{E}_{k_p} \frac{dx^l}{dt}\, dt$$

und entsprechend

$$d\,\mathfrak{E}^{\overbrace{i_1 \dots i_p}} = -\,\Gamma_{\underbrace{k_1 \dots k_p\, l}}^{\overbrace{i_1 \dots i_p}}\, \mathfrak{E}^{k_1} \times \dots \times \mathfrak{E}^{k_p} \frac{dx^l}{dt}\, dt$$

mit

$$\Gamma_{\underbrace{k_1 \dots k_p\, l}}^{\overbrace{i_1 \dots i_p}} = \Gamma_{k_1\, l}^{i_1}\, \delta_{k_2}^{i_2} \dots \delta_{k_p}^{i_p} + \dots + \delta_{k_1}^{i_1} \dots \delta_{k_{p-1}}^{i_{p-1}}\, \Gamma_{k_p\, l}^{i_p}.$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften des äußeren Produktes läßt sich die Summation über die k_r vereinfacht schreiben. Wir setzen:

$$(1,4)\qquad \Gamma_{\underbrace{i_1 \dots i_p}\, l}^{\underbrace{k_1 \dots k_p}} = \delta_{\underbrace{k_1' \dots k_p'}}^{\underbrace{k_1 \dots k_p}} \Gamma_{\underbrace{i_1 \dots i_p}\, l}^{\underbrace{k_1' \dots k_p'}} = \delta_{\underbrace{i_1 \dots i_p}}^{\underbrace{i_1' \dots i_p'}} \Gamma_{\underbrace{i_1' \dots i_p'}\, l}^{\underbrace{k_1 \dots k_p}}$$

[Diese Gleichheit folgt aus der Definition (1, 3). Hier und im folgenden sind die Größen: δ_i^k, $\delta_{\underbrace{i_1 \dots i_p}}^{\underbrace{i_1' \dots i_p'}}$, $\delta_{\underbrace{k_1' \dots k_p'}}^{\underbrace{k_1 \dots k_p}}$, die verallgemeinerten Kronecker-Symbole.]

und erhalten

$$(1,5)\qquad \begin{aligned} d\,\mathfrak{E}_{\underbrace{i_1 \dots i_p}} &= \Gamma_{\underbrace{i_1 \dots i_p}\, l}^{\underbrace{k_1 \dots k_p}} \mathfrak{E}_{\underbrace{k_1 \dots k_p}} \frac{dx^l}{dt} dt, \\ d\,\mathfrak{E}^{\underbrace{i_1 \dots i_p}} &= -\Gamma_{\underbrace{k_1 \dots k_p}\, l}^{\underbrace{i_1 \dots i_p}} \mathfrak{E}^{\underbrace{k_1 \dots k_p}} \frac{dx^l}{dt} dt. \end{aligned}$$

Für die Änderung eines Tensors $\mathfrak{B} = v^{\underbrace{i_1 \dots i_p}} \mathfrak{E}_{\underbrace{i_1 \dots i_p}}$ längs der gegebenen Kurve C gilt nun:

$$(1,6)\qquad \begin{aligned} \frac{d\,\mathfrak{B}}{dt} &= \frac{d\,v^{\underbrace{i_1 \dots i_p}}}{dt} \mathfrak{E}_{\underbrace{i_1 \dots i_p}} + v^{\underbrace{i_1 \dots i_p}} \frac{d\,\mathfrak{E}_{\underbrace{i_1 \dots i_p}}}{dt} \\ &= \left(\frac{d\,v^{\underbrace{i_1 \dots i_p}}}{dt} + v^{\underbrace{j_1 \dots j_p}} \Gamma_{\underbrace{j_1 \dots j_p}\, l}^{\underbrace{i_1 \dots i_p}} \frac{dx^l}{dt}\right) \mathfrak{E}_{\underbrace{i_1 \dots i_p}}. \end{aligned}$$

Für einen p-stufig kovarianten Tensor $\mathfrak{B} = v_{\underbrace{i_1 \dots i_p}} \mathfrak{E}^{\underbrace{i_1 \dots i_p}}$ gilt entsprechend:

$$(1,7)\qquad \frac{d\,\mathfrak{B}}{dt} = \left(\frac{d\,v_{\underbrace{i_1 \dots i_p}}}{dt} - v_{\underbrace{j_1 \dots j_p}} \Gamma_{\underbrace{i_1 \dots i_p}\, l}^{\underbrace{j_1 \dots j_p}} \frac{dx^l}{dt}\right) \mathfrak{E}^{\underbrace{i_1 \dots i_p}}.$$

Ist daher $\mathfrak{B}$ längs der Kurve parallel verschoben, so muß $\frac{d\,\mathfrak{B}}{dt} = 0$ sein, und wir erhalten die für die Parallelverschiebung charakteristischen Differentialgleichungen:

$$(1,8)\qquad \frac{d\,v^{\underbrace{i_1 \dots i_p}}}{dt} + v^{\underbrace{j_1 \dots j_p}} \Gamma_{\underbrace{j_1 \dots j_p}\, l}^{\underbrace{i_1 \dots i_p}} \frac{dx^l}{dt} = 0,$$

$$(1,9)\qquad \frac{d\,v_{\underbrace{i_1 \dots i_p}}}{dt} - v_{\underbrace{j_1 \dots j_p}} \Gamma_{\underbrace{i_1 \dots i_p}\, l}^{\underbrace{j_1 \dots j_p}} \frac{dx^l}{dt} = 0.$$

§ 2.

Parallelfelder p-stufiger Tensoren.

A. Das Parallelfeld bezüglich einer Kurve C.

Als Trägermannigfaltigkeit sei eine Kurve durch die Gleichungen gegeben: $x^i = x^i(t)$.

Definition des Parallelfeldes. Ein Feld von Tensoren $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(t)$ heißt bezüglich der Kurve C parallel, wenn eine Skalarfunktion $\varphi(t) \neq 0$ existiert, so daß der Tensor $\overline{\mathfrak{B}} = \frac{1}{\varphi}\,\mathfrak{B}$ längs der Kurve C parallel verschoben ist.

Erzeugung eines Parallelfeldes. Im Punkte $P_0: (t = t_0)$ der Kurve C ist ein Tensor gegeben: $\mathfrak{B}_0 = \overset{i_1 \dots i_p}{v_0}\, \underset{i_1 \dots i_p}{\mathfrak{E}}$. Für die Parallelverschiebung haben wir das lineare Differentialgleichungssystem (1, 8)

$$\frac{d\,\overset{i_1 \dots i_p}{v}}{dt} + \overset{j_1 \dots j_p}{v}\, \underset{j_1 \dots j_p\, l}{\overset{i_1 \dots i_p}{\Gamma}}\, \frac{dx^l}{dt} = 0$$

mit der Anfangsbedingung:

$$\overset{i_1 \dots i_p}{v} = \overset{i_1 \dots i_p}{v_0} \quad \text{für} \quad t = t_0$$

zu lösen, wobei in den $\underset{j_1 \dots j_p\, l}{\overset{i_1 \dots i_p}{\Gamma}}$ an Stelle der x^i die Funktionen $x^i(t)$ einzusetzen sind. Den eindeutig bestimmten Lösungstensor $\overline{\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}(t)$ multiplizieren wir mit einer willkürlichen Skalarfunktion $\varphi(t) \neq 0$ und erhalten so ein paralleles Feld.

Satz. Ist der Anfangstensor $\mathfrak{B}_0$ ein vollständig zerfallender Tensor $\mathfrak{B}_0 = \underset{0}{\mathfrak{v}_1} \times \underset{0}{\mathfrak{v}_2} \times \dots \times \underset{0}{\mathfrak{v}_p}$ mit $\underset{0}{\mathfrak{v}_\alpha} = \underset{0}{v_\alpha^i}\, \mathfrak{E}_i$, so ist der parallel verschobene Tensor $\overline{\mathfrak{B}}(t)$ ebenfalls zerfallend.

Beweis. Ich verschiebe die Vektoren $\underset{0}{\mathfrak{v}_\alpha}$ längs der Kurve parallel, d. h. es seien $\mathfrak{v}_\alpha = \mathfrak{v}_\alpha(t)$ die Lösungen der Differentialgleichungssysteme

$$\frac{d\,v_\alpha^i}{dt} + v_\alpha^j\, \Gamma_{j\,l}^i\, \frac{dx^l}{dt} = 0$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$v_\alpha^i = \underset{0}{v_\alpha^i} \quad \text{für} \quad t = t_0.$$

Das äußere Produkt der Vektoren $\mathfrak{v}_\alpha$:

$$\overline{\overline{\mathfrak{B}}} = \mathfrak{v}_1 \times \dots \times \mathfrak{v}_p$$

hat folgende Eigenschaften:

1. $$\frac{d\,\overline{\overline{\mathfrak{B}}}}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} \times \mathfrak{v}_2 \times \dots \times \mathfrak{v}_p + \dots + \mathfrak{v}_1 \times \dots \times \mathfrak{v}_{p-1} \times \frac{d\mathfrak{v}_p}{dt} = 0,$$

wegen $\frac{d\,\mathfrak{v}_\alpha}{dt} = 0$,

2. $$\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_{t = t_0} = \mathfrak{B}_0.$$

Das bedeutet: $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ ist ebenfalls eine Lösung des Systems (1, 8) mit der gleichen Anfangsbedingung. Wegen Eindeutigkeit der Lösung folgt daraus die Behauptung.

Kriterien für ein Parallelfeld. Ein Feld von Tensoren sei längs der Kurve C gegeben. Nach Definition ist für ein Parallelfeld die Existenz einer Skalarfunktion $\varphi(t)$ notwendig mit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi}\,\mathfrak{B}\right) = 0.$$

Man erhält:

$$-\frac{1}{\varphi^2}\frac{d\varphi}{dt}\,\mathfrak{B} + \frac{1}{\varphi}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = f(t)\cdot\mathfrak{B}; \quad f(t) = \frac{d\lg\varphi(t)}{dt}. \tag{2, 1}$$

Die Elimination der Funktion $f(t)$ ergibt im Falle eines kontravarianten Tensors $\mathfrak{B}$ das System:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\,v^{\underbrace{i_1\cdots i_p}}}{dt} + v^{\underbrace{j_1\cdots j_p}}\,\Gamma_{\underbrace{j_1\cdots j_p}\,l}^{\underbrace{i_1\cdots i_p}}\frac{dx^l}{dt}, & v^{\underbrace{i_1\cdots i_p}} \\ \frac{d\,v^{\underbrace{k_1\cdots k_p}}}{dt} + v^{\underbrace{j_1\cdots j_p}}\,\Gamma_{\underbrace{j_1\cdots j_p}\,l}^{\underbrace{k_1\cdots k_p}}\frac{dx^l}{dt}, & v^{\underbrace{k_1\cdots k_p}} \end{vmatrix} = 0, \tag{2, 1, 1}$$

im Falle eines kovarianten Tensors:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\,v_{\underbrace{i_1\cdots i_p}}}{dt} - v_{\underbrace{j_1\cdots j_p}}\,\Gamma_{\underbrace{i_1\cdots i_p}\,l}^{\underbrace{j_1\cdots j_p}}\frac{dx^l}{dt}, & v_{\underbrace{i_1\cdots i_p}} \\ \frac{d\,v_{\underbrace{k_1\cdots k_p}}}{dt} - v_{\underbrace{j_1\cdots j_p}}\,\Gamma_{\underbrace{k_1\cdots k_p}\,l}^{\underbrace{j_1\cdots j_p}}\frac{dx^l}{dt}, & v_{\underbrace{k_1\cdots k_p}} \end{vmatrix} = 0. \tag{2, 1, 2}$$

Die Bedingungen (2, 1) bzw. (2, 1, 1), (2, 1, 2) sind notwendig. Wir wollen zeigen, daß sie auch hinreichen

Aus (2, 1, 1) folgt

$$\frac{d\,v^{\underbrace{i_1\cdots i_p}}}{dt} + v^{\underbrace{j_1\cdots j_p}}\,\Gamma_{\underbrace{j_1\cdots j_p}\,l}^{\underbrace{i_1\cdots i_p}}\frac{dx^l}{dt} = f(t)\,v^{\underbrace{i_1\cdots i_p}}.$$

Dann gilt für den Tensor

$$\mathfrak{T} = e^{-\int f(t)\,dt}\,v^{\underbrace{i_1\cdots i_p}}\,\mathfrak{E}_{\underbrace{i_1\cdots i_p}} \qquad \frac{d\mathfrak{T}}{dt} = 0,$$

d. h. $v^{\underbrace{i_1\cdots i_p}}\,\mathfrak{E}_{\underbrace{i_1\cdots i_p}}$ stellt ein Parallelfeld dar. Entsprechendes gilt für (2, 1, 2).

In den geometrischen Anwendungen treten nur vollständig zerfallende Tensoren auf. Diese gestatten eine weitere Umformung der Bedingungsgleichungen (2, 1). Es sei

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \times \ldots \times \mathfrak{v}_p.$$

Dann folgt aus (2, 1):

$$\frac{d(\mathfrak{v}_1 \times \ldots \times \mathfrak{v}_p)}{dt} = f(t)\,\mathfrak{v}_1 \times \ldots \times \mathfrak{v}_p$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{v}_\alpha}{dt} \times \mathfrak{B} = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, p. \tag{2, 2}$$

Die Gleichungen (2, 2) sind auch hinreichend. Aus ihnen folgt

$$\frac{d\mathfrak{v}_\alpha}{dt} = a_\alpha^\beta(t)\,\mathfrak{v}_\beta,$$

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = a_\alpha^\alpha(t) \cdot \mathfrak{B}, \quad \text{d. h. (2, 1).}$$

Die Unabhängigkeit des Systems (2, 2) von der Art der Aufspannung des Tensors $\mathfrak{B}$ durch Vektoren $\mathfrak{v}_\alpha$ ist leicht zu zeigen.

Ergebnis. Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Feld zerfallender Tensoren $\mathfrak{B} = \mathfrak{v}_1 \times \ldots \times \mathfrak{v}_p$ bezüglich der Trägerkurve $C: x^i = x^i(t)$ parallel ist, ist das Erfülltsein der Gleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{v}_\alpha}{dt} \times \mathfrak{B} = 0. \tag{2, 2}$$

B. Das Parallelfeld bezüglich einer Fläche F_p.

Als Trägermannigfaltigkeit sei jetzt eine Fläche F_p der Dimension p gegeben, die durch die Gleichungen

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^p)$$

eingebettet wird. [Die Funktionen $x^i(u^1, \ldots, u^p)$ sollen im betrachteten Gebiet stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung haben. Ferner soll der Rang der Matrix $\left(\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)\right)$ p sein.]

Definition. Ein angeheftetes Tensorfeld $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(u^1, \ldots, u^p)$ werden wir dann ein bezüglich F_p paralleles Feld nennen, wenn nach Multiplikation mit einer geeigneten Skallarfunktion $\varphi^{-1}(u^1, \ldots, u^p) \neq 0$ ein Tensorfeld $\overline{\mathfrak{B}} = \frac{1}{\varphi}\,\mathfrak{B}$ mit folgender Eigenschaft entsteht:

$\overline{\mathfrak{B}}$ läßt sich durch Parallelverschiebung eines Tensors $\overline{\mathfrak{B}}_0(u_0^1 \ldots u_0^p)$ längs beliebiger Flächenkurven erzeugen.

Kriterien für ein Parallelfeld. Eine Kurve der Fläche F_p wird durch die Gleichungen gegeben: $u^\alpha = u^\alpha(t)$. Für Parallelität von $\overline{\mathfrak{B}}$ muß daher gelten:

$$\frac{d\overline{\mathfrak{B}}}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}}{\partial u^\alpha}\dot{u}^\alpha = 0.$$

Wegen der Willkürlichkeit der Funktionen $u^\alpha(t)$ muß für das Tensorfeld $\mathfrak{B}$ die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}}{\partial u^\alpha} = 0$$

oder

$$\varphi \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha}\mathfrak{B} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial u^\alpha} = f_\alpha \mathfrak{B}; \quad f_\alpha = \frac{\partial \lg \varphi}{\partial u^\alpha}. \tag{2,3}$$

Durch Elimination der Funktionen f_α ergibt sich so für das Parallelfeld $\mathfrak{B} = v^{i_1 \dots i_q}\mathfrak{E}_{i_1 \dots i_q}$ als notwendige Bedingung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v^{i_1 \dots i_q}}{\partial u^\alpha} + v^{j_1 \dots j_q}\Gamma^{i_1 \dots i_q}_{j_1 \dots j_q l}\frac{\partial x^l}{\partial u^\alpha}, & v^{i_1 \dots i_q} \\ \frac{\partial v^{k_1 \dots k_q}}{\partial u^\alpha} + v^{j_1 \dots j_q}\Gamma^{k_1 \dots k_q}_{j_1 \dots j_q l}\frac{\partial x^l}{\partial u^\alpha}, & v^{k_1 \dots k_q} \end{vmatrix} = 0. \tag{2,3,1}$$

Die Gleichungen (2, 3, 1) sind dagegen *nicht hinreichend*. Denn aus ihnen folgt zwar

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial u^\alpha} = f_\alpha \mathfrak{B},$$

es existiert aber eine Funktion $\varphi(u^1, \dots, u^p)$ mit $\frac{\partial\left(\frac{1}{\varphi}\mathfrak{B}\right)}{\partial u^\alpha} = 0$ dann und nur dann, wenn die Funktionen f_α Komponenten eines Gradienten sind. Damit ein Tensorfeld, dessen Komponenten $v^{i_1 \dots i_q}$ die Gleichungen (2, 3, 1) erfüllen, ein Parallelfeld ist, ist daher für die (unbekannten) Funktionen f_α notwendig und hinreichend:

$$\operatorname{rot}(f_\alpha du^\alpha) = 0. \tag{2,4}$$

Nun ist

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial u^\alpha} = f_\alpha \mathfrak{B}; \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \frac{\partial f_\beta}{\partial u^\alpha}\mathfrak{B} + f_\alpha f_\beta \mathfrak{B}$$

und daher

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^\beta \partial u^\alpha} = \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial u^\beta}\right)\mathfrak{B}. \tag{2,5}$$

Ausführlich ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^\alpha \partial w^\beta} - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^\beta \partial u^\alpha} = v^{\overbrace{i_1 \dots i_q}} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_{i_1}}{\partial u^\alpha \partial w^\beta} - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_{i_1}}{\partial n^\beta \partial u^\alpha} \right) \times \mathfrak{E}_{i_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{i_q}$$
$$+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$+ v^{\overbrace{i_1 \dots i_q}} \mathfrak{E}_{i_1} \times \dots \times \mathfrak{E}_{i_{q-1}} \times \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_{i_q}}{\partial u^\alpha \partial w^\beta} - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_{i_q}}{\partial w^\beta \partial u^\alpha} \right)$$

und unter Verwendung der Ricci-Intentität:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^\alpha \partial w^\beta} - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^\beta \partial u^\alpha} = v^{\overbrace{i_1 \dots i_q}} R_{i_1 \underbrace{l m}}^{k_1} \frac{\partial (x^l, x^m)}{\partial (u^\alpha, w^\beta)} \mathfrak{E}_{k_1} \times \mathfrak{E}_{i_2} \times \dots \times \mathfrak{E}_{i_q} + \dots$$
$$+ v^{\overbrace{i_1 \dots i_q}} R_{i_q \underbrace{l m}}^{k_q} \frac{\partial (x^l, x^m)}{\partial (u^\alpha, w^\beta)} \mathfrak{E}_{i_1} \times \dots \times \mathfrak{E}_{i_{q-1}} \times \mathfrak{E}_{k_q}.$$

Entsprechend (1, 3) bilden wir:

$$(2,6) \qquad R_{\underbrace{i_1 \dots i_q}}^{\overbrace{k_1 \dots k_q}}{}_{\underbrace{l m}} = R_{i_1 \underbrace{l m}}^{k_1} \delta_{i_2}^{k_2} \dots \delta_{i_q}^{k_q}$$
$$+ \delta_{i_1}^{k_1} R_{i_2 \underbrace{l m}}^{k_2} \delta_{i_3}^{k_3} \dots \delta_{i_q}^{k_q}$$
$$\vdots$$
$$+ \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_{q-1}}^{k_{q-1}} R_{i_q \underbrace{l m}}^{k_q}$$

und

$$(2,7) \qquad R_{\underbrace{i_1 \dots i_q}}^{\overbrace{k_1 \dots k_q}}{}_{\underbrace{l m}} = \delta_{\underbrace{k_1' \dots k_q'}}^{\overbrace{k_1 \dots k_q}} R_{\underbrace{i_1 \dots i_q}}^{\overbrace{k_1' \dots k_q'}}{}_{\underbrace{l m}} = \delta_{\underbrace{i_1 \dots i_q}}^{\overbrace{i_1' \dots i_q'}} R_{\underbrace{i_1' \dots i_q'}}^{\overbrace{k_1 \dots k_q}}{}_{\underbrace{l m}}.$$

Wir erhalten:

$$(2,8) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial u^\alpha \partial w^\beta} - \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial w^\beta \partial u^\alpha} = v^{\overbrace{i_1 \dots i_q}} R_{\underbrace{i_1 \dots i_q}}^{\overbrace{k_1 \dots k_q}}{}_{\underbrace{l m}} \frac{\partial (x^l, x^m)}{\partial (u^\alpha, w^\beta)} \mathfrak{E}_{\underbrace{k_1 \dots k_q}}.$$

Die Forderung (2, 4) läßt sich vermöge (2, 8) jetzt so schreiben:

$$(2,9,1) \qquad v^{\overbrace{i_1 \dots i_q}} R_{\underbrace{i_1 \dots i_q}}^{\overbrace{k_1 \dots k_q}}{}_{\underbrace{l m}} \frac{\partial (x^l, x^m)}{\partial (u^\alpha, w^\beta)} = 0.$$

Entsprechend gilt für kovariante Tensoren: Ein Feld $v_{\underbrace{i_1 \dots i_q}} \mathfrak{E}^{\overbrace{i_1 \dots i_q}}$ ist bezüglich $F_p : x^i = x^i(u^1, \dots, u^p)$ parallel, wenn die Komponenten $v_{\underbrace{i_1 \dots i_q}}$ folgende Gleichungssysteme erfüllen:

$$(2,3,2) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_{\underbrace{i_1 \dots i_q}}}{\partial u^\alpha} - v_{\underbrace{j_1 \dots j_q}} \Gamma_{\underbrace{i_1 \dots i_q}\, l}^{\underbrace{j_1 \dots j_q}} \dfrac{\partial x^l}{\partial u^\alpha}, & v_{\underbrace{i_1 \dots i_q}} \\ \dfrac{\partial v_{\underbrace{k_1 \dots k_q}}}{\partial u^\alpha} - v_{\underbrace{j_1 \dots j_q}} \Gamma_{\underbrace{k_1 \dots k_q}\, l}^{\underbrace{j_1 \dots j_q}} \dfrac{\partial x^l}{\partial u^\alpha}, & v_{\underbrace{k_1 \dots k_q}} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2,9,2) \qquad v_{\underbrace{i_1 \dots i_q}} R_{\underbrace{k_1 \dots k_q}}^{\overbrace{i_1 \dots i_q}}{}_{\underbrace{l m}} \frac{\partial (x^l, x^m)}{\partial (u^\alpha, w^\beta)} = 0.$$

Will man daher aus einem *beliebigen* q-stufigen Anfangstensor $\mathfrak{B}_0$ ein Parallelfeld bezüglich F_p erzeugen, so ist F_p nicht mehr willkürlich wählbar, sondern muß dem Differentialgleichungssystem genügen:

$$R_{\underbrace{i_1 \dots i_q}}^{\overbrace{k_1 \dots k_q}\ \underbrace{l m}} \frac{\partial (x^l, x^m)}{\partial (u^\alpha, u^\beta)} = 0. \tag{2,10}$$

Ausgezeichnet sind jene affin zusammenhängenden Räume, die bei beliebig vorgegebener Trägermannigfaltigkeit $F_p\binom{n}{q}$ linear unabhängige Parallelfelder q-stufiger Tensoren gestatten. Sie werden durch die Relationen charakterisiert:

$$R_{\underbrace{i_1 \dots i_q}\ \underbrace{l m}}^{\overbrace{k_1 \dots k_q}} = 0 \tag{2,11}$$

speziell die affin-euklidischen Räume: $q = 1$: $R_{i\,\underbrace{l m}}^{k} = 0$. Für vollständig zerfallende Tensoren $\mathfrak{B} = \mathfrak{v}_1 \times \dots \times \mathfrak{v}_q$ läßt sich entsprechend (2, 2) das System (2, 3) vereinfachen. Wir erhalten als notwendige und hinreichende Bedingung für den Parallelismus bezüglich einer Fläche F_p:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}_{\bar\alpha}}{\partial u^\alpha} \times \mathfrak{B} = 0 \qquad \begin{matrix} \alpha = 1 \dots p \\ \bar\alpha = 1 \dots q \end{matrix} \tag{2,12}$$

$$\mathfrak{B} \circ \overset{q}{\mathfrak{R}} \circ (\mathfrak{t}_\alpha \times \mathfrak{t}_\beta) = 0, \tag{2,13}$$

wobei (2, 13) nur eine direkte tensorielle Schreibweise der Gleichungen (2, 3) darstellt.

$$\left[\overset{q}{\mathfrak{R}} = R_{\underbrace{i_1 \dots i_q}\ \underbrace{l m}}^{\overbrace{k_1 \dots k_q}} \mathfrak{E}^{\overbrace{i_1 \dots i_q}} \mathfrak{E}_{\underbrace{k_1 \dots k_q}} \mathfrak{E}^{\underbrace{l m}};\quad \mathfrak{t}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \mathfrak{E}_i\right].$$

§ 3.

Geometrische Anwendungen.

In einen vorgegebenen affinzusammenhängenden Raum der Dimension n sei eine Fläche F_p der Dimension p durch die Gleichungen eingebettet:

$$x^i = x^i (u^1 \dots u^p).$$

Jeder reguläre Punkt dieser Fläche ist Träger eines p-stufigen Tangentialtensors:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{t}_1 \times \dots \times \mathfrak{t}_p;\quad \mathfrak{t}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \mathfrak{E}_i;\quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Durch Übergang zu anderen Flächenparametern ${}'u^\alpha = {}'u^\alpha (u^1, \dots, u^p)$ $\left[\mathfrak{R}g\left(\left(\frac{\partial {}'u^\alpha}{\partial u^\beta}\right)\right) = p\right]$ wird $\mathfrak{T}$ mit einer skalaren Ortsfunktion multipliziert:

$${}'\mathfrak{T} = \mathfrak{T} \cdot \varphi;\quad \varphi = \frac{\partial (u^1 \dots u^n)}{\partial ({}'u^1 \dots {}'u^n)} \neq 0.$$

Es ist daher geometrisch sinnvoll, nach denjenigen Flächen zu fragen, deren Tangentialtensoren ein bezüglich der Fläche paralleles Feld bilden. Sie werden durch folgende Differentialgleichungen charakterisiert:

$$\frac{\partial t_\alpha}{\partial w^\beta} \times \mathfrak{T} = 0, \tag{3,1}$$

$$\mathfrak{T} \circ \overset{p}{\mathfrak{R}} \circ (t_\alpha \times t_\beta) = 0 \tag{3,2}$$

oder in Komponenten:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial (x^{i_1}, \ldots, x^{i_p})}{\partial (u^1, \ldots, u^p)}\right) + \Gamma^{\underbrace{i_1 \cdots i_p}}_{\underbrace{j_1 \cdots j_p}\, l} \frac{\partial (x^{j_1}, \ldots, x^{j_p})}{\partial (u^1, \ldots, u^p)} \frac{\partial x^l}{\partial u^\alpha}, & \frac{\partial (x^{i_1}, \ldots, x^{i_p})}{\partial (u^1, \ldots, u^p)} \\ \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\partial (x^{k_1}, \ldots, x^{k_p})}{\partial (u^1, \ldots, u^p)}\right) + \Gamma^{\underbrace{k_1 \cdots k_p}}_{\underbrace{j_1 \cdots j_p}\, l} \frac{\partial (x^{j_1}, \ldots, x^{j_p})}{\partial (u^1, \ldots, u^p)} \frac{\partial x^l}{\partial u^\alpha}, & \frac{\partial (x^{k_1}, \ldots, x^{k_p})}{\partial (u^1, \ldots, u^p)} \end{vmatrix} = 0. \tag{3,3}$$

$$R^{\underbrace{k_1 \ldots k_p}}_{\underbrace{i_1 \ldots i_p}\, lm} \frac{\partial (x^{i_1} \ldots x^{i_p})}{\partial (u^1 \ldots u^p)} \frac{\partial (x^l x^m)}{\partial (u^\alpha u^\beta)} = 0. \tag{3,4}$$

Flächen, die diesen Differentialgleichungen genügen, haben folgende Eigenschaft: Man kann sie durch Parallelverschiebung des Tangentialraumes in sich erzeugt denken. Im einfachsten Falle, d. h. bei nur einem Parameter, fällt das System (3, 4) fort und es bleibt als Bedingungsgleichung nur die bekannte Differentialgleichung der autoparallelen Linie. Wir werden daher die durch die Systeme (3, 1) (3, 2) bzw. (3, 3). (3, 4) definierten Flächen „*autoparallele Flächen*“ nennen.

Wird eine p-dimensionale gerichtete Flächengröße in sich, aber nur in einer Richtung verschoben, erhält man einen *autoparallelen Streifen*. Wir wollen die ihn charakterisierenden Gleichungen aufstellen.

Die unbekannte Trägerkurve sei $C: x^i = x^i(t)$. Angeheftet ist das durch Parallelverschiebung der p-dimensionalen Flächengröße $\mathfrak{B} = \mathfrak{v}_1 \times \ldots \times \mathfrak{v}_p$ längs C erhaltene Feld. Es gilt also:

$$\frac{d\,\mathfrak{B}}{dt} = 0. \tag{3,5}$$

Da $\mathfrak{B}$ *in sich* verschoben werden sollte, muß der Tangentenvektor $\mathfrak{t} = \frac{dx^i}{dt}\,\mathfrak{E}_i$ von $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{B}$ enthalten sein, also

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{t} = 0. \tag{3,6}$$

Durch differenzieren erhält man aus (3, 6) unter Verwendung von (3, 5)

$$\mathfrak{B} \times \frac{d\,\mathfrak{t}}{dt} = 0,$$

$$\mathfrak{B} \times \frac{d^2\mathfrak{t}}{dt^2} = 0,$$

. . . . . .

Durch Elimination von $\mathfrak{B}$ ergibt sich

$$\mathfrak{t} \times \frac{d\,\mathfrak{t}}{d\,t} \times \frac{d^2\,\mathfrak{t}}{d\,t^2} \times \ldots \times \frac{d^p\,\mathfrak{t}}{d\,t^p} = 0. \tag{3,7}$$

Das ist eine Differentialgleichung für die Kurve allein. Trägerkurve eines p-dimensionalen autoparallelen Streifens kann nur eine Lösungskurve von (3, 7) sein. Damit ist die Möglichkeit gegeben in A_n eingebettete Kurven zu klassifizieren. Je nachdem sie Träger eines wenigstens p-dimensionalen autoparallelen Streifens sein können, wird man sie

für $p = 1$ als „gerade",
für $p = 2$ als „eben",
für beliebiges p als „eben von der Dimension p",
für $p = n - 1$ als „hypereben"

bezeichnen können.

Durch Verschieben einer p-dimensionalen gerichteten Größe in sich, aber in einer q-dimensionalen Richtung, $q < p$ erzeugen wir *autoparallele Streifen* mit einer F_q als Träger. Ist die unbekannte Fläche durch die Gleichungen dargestellt $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^q)$, so gilt für das angeheftete parallel verschobene Feld:

$$\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,u^{\bar{\alpha}}} = 0 \qquad \bar{\alpha} = 1, \ldots, q. \tag{3,8}$$

Infolge der Streifeneigenschaft gilt ferner:

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{t}_{\bar{\alpha}} = 0 \tag{3,9}$$

und wegen der Autoparallelität muß erfüllt sein:

$$\mathfrak{B} \circ \overset{p}{\mathfrak{R}} \circ (\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}} \times \mathfrak{t}_{\bar{\beta}}) = 0. \tag{3,10}$$

Durch differenzieren erhalten wir:

$$\mathfrak{B} \times \frac{\partial\,\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}}}{\partial\,u^{\bar{\beta}}} = 0,$$

$$\mathfrak{B} \times \frac{\partial^2\,\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}}}{\partial\,u^{\bar{\beta}}\,\partial\,u^{\bar{\gamma}}} = 0.$$

. . . . . .

Die Elimination von $\mathfrak{B}$ ergibt:

$$\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}_1} \times \frac{\partial\,\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}_2}}{\partial\,u^{\bar{\beta}_1}} \times \frac{\partial^2\,\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}_3}}{\partial\,u^{\bar{\gamma}_1}\,\partial\,u^{\bar{\gamma}_2}} \times \ldots \times \frac{\partial^p\,\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}_p}}{\partial\,u^{\bar{\lambda}_1} \ldots \partial\,u^{\bar{\lambda}_p}} = 0 \tag{3,11}$$

für alle möglichen Indizeskombinationen.

Träger eines autoparallelen Streifens höherer Dimension können indessen nur Flächen sein, deren Einbettungsgleichungen neben (3, 11) noch (3, 10) erfüllen. Wegen

$$\mathfrak{B} = \psi(u^1 \ldots u^q) \cdot \left(\mathfrak{T} \times \frac{\partial\,\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}_1}}{\partial\,u^{\bar{\beta}_1}} \times \ldots \times \frac{\partial^{p-q}\,\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}_{p-q}}}{\partial\,u^{\bar{\lambda}_1} \ldots \partial\,u^{\bar{\lambda}_{p-q}}} \right)$$

mit

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{t}_1 \times \ldots \times \mathfrak{t}_q$$

können wir (3, 10) durch (3, 12) ersetzen:

$$(3,12) \qquad \left(\mathfrak{T} \times \frac{\partial \mathfrak{t}_{\bar{\alpha}_1}}{\partial u^{\bar{\beta}_1}} \times \ldots \times \frac{\partial^{p-q} \mathfrak{t}_{\bar{\alpha}_{p-q}}}{\partial u^{\bar{\lambda}_1} \ldots \partial u^{\bar{\lambda}_{p-q}}} \right) \circ \overset{p}{\mathfrak{R}} \circ (\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}} \times \mathfrak{t}_{\bar{\beta}}) = 0.$$

Diese Ergebnisse lassen sich wie oben zur Klassifikation der eingebetteten Flächen verwenden, da man stets entscheiden kann, ob diese Träger eines p-dimensionalen autoparallelen Streifens sein können oder nicht, oder anders gesprochen, ob sie „eben von der Dimension p" sind.

Eine Fläche sei Träger einer Schar autoparalleler Linien, die zueinander bezüglich der Fläche parallel sind. Diese Eigenschaft rechtfertigt die Bezeichnung „Zylinderfläche". Ebenso kann eine Fläche Träger einer paralellen Schar autoparalleler Flächen der Dimension q sein; wir wollen sie dann „Zylinderfläche der Stufe q" nennen. Der Zusammenhang mit den bisherigen Betrachtungen wird dadurch gegeben, daß die Zylinderflächen der Stufe q als Flächen aufgefaßt werden können, denen ein Parallelfeld q-stufiger zerfallender Tensoren angeheftet ist, welches dem Tangentialraum angehört. Für die Aufstellung der Bedingungsgleichungen wählen wir ein ausgezeichnetes Parametersystem auf der Fläche. Es sei $\mathfrak{B}$ das angeheftete Parallelfeld:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \times \ldots \times \mathfrak{v}_q, \qquad \bar{\alpha} = 1, \ldots, q.$$

Durch eine Parametertransformation können wir erreichen, daß die ersten q Tangentialvektoren $\mathfrak{t}_{\bar{\alpha}}$ mit den gegebenen $\mathfrak{v}_{\bar{\alpha}}$ der Richtung nach übereinstimmen. Nach den Ausführungen im § 2 erhalten wir so als Bedingungsgleichungen für eine Zylinderfläche in ausgezeichneten Parametern:

$$(3,13) \qquad \frac{\partial \mathfrak{t}_{\bar{\alpha}}}{\partial u^{\alpha}} \times \mathfrak{t}_1 \times \ldots \times \mathfrak{t}_q = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, q$$

$$(3,14) \qquad (\mathfrak{t}_1 \times \ldots \times \mathfrak{t}_q) \circ \overset{q}{\mathfrak{R}} \circ (\mathfrak{t}_{\alpha} \times \mathfrak{t}_{\beta}) = 0.$$

Ergebnis: Eine Fläche der Dimension p trage ein Parallelfeld q-stufiger zerfallender Tensoren. Je nachdem $q > p$, $q = p$ oder $q < p$ ist, soll der Tangentialraum in dem Parallelfeld enthalten sein, Parallelfeld und Tangentialraum bis auf einen skalaren Faktor übereinstimmen, oder der Tangentialraum das Parallelfeld umfassen. Die Trägerfläche F_p heißt entsprechend:

eben von der Dimension q,
autoparallele Fläche der Dimension q,
Zylinderfläche der Stufe q.

(Eingegangen am 2. Januar 1935.)

Beziehungen zwischen den Eigenwerten und Eigenfunktionen verschiedener Eigenwertprobleme*).

Von

Horst Herrmann in Dresden.

I.

Quadratisch-homogene Funktionale. Definition und Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

1. Quadratisch-homogene Funktionale der Analysis.

Das klassische Beispiel für die Theorie der Eigenwerte und Eigenfunktionen ist bestimmt durch die Angabe eines Grundgebiets G und der beiden quadratisch-homogenen Funktionale

$$(1) \qquad D[\varphi] \equiv \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy; \quad H[\varphi] \equiv \iint_G \varphi^2\, dx\, dy$$

mit den Polarformen

$$(1') \quad D[\varphi, \psi] \equiv \iint_G (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y)\, dx\, dy; \quad H[\varphi, \psi] \equiv \iint_G \varphi\, \psi\, dx\, dy.$$

Es zeigt sich, daß für die Entwicklung weiter Teile der Theorie der Eigenwerte und Eigenfunktionen nur einige wenige Eigenschaften dieser Funktionale gebraucht werden. Diese mögen hier kurz zusammengestellt werden.

Wir nennen ein Funktional Q, durch das jedem geordneten Paar von Funktionen φ, ψ einer geeigneten Funktionenklasse $\mathfrak{M}_Q$ eine reelle Zahl $Q[\varphi, \psi]$ zugeordnet wird, *quadratisch-homogen,* wenn die Bedingungen erfüllt sind[1]):

---

*) Die Abschnitte I, 4., II, 1, und III sind (bis auf die Verwendung der Hilfssätze 1 und 2 in III) im wesentlichen ein Auszug aus dem ersten nicht veröffentlichten Teil der Göttinger Dissertation „Beiträge zur Theorie der Eigenwerte und Eigenfunktionen" des Verfassers.

Unter einer „Funktion" soll nur der kurzen Ausdrucksweise halber stets eine Funktion von zwei Variablen verstanden sein. Für die meisten Überlegungen ist jedoch die Anzahl der Variablen belanglos, was unmittelbar aus dem streng formalen Charakter der Überlegungen hervorgeht. Die Übertragung der Betrachtungen auf die entsprechenden hermiteschen Eigenwertprobleme erfordert nur Schreibarbeit. Für III will ich vorsichtshalber noch die Voraussetzung ergänzen: Das Grundgebiet G werde durch jede geschlossene Kurve zerlegt.

[1]) Im Falle $\varphi = \psi$ schreiben wir für $Q[\varphi, \varphi]$ kurz $Q[\varphi]$. $Q[\varphi]$ ist ein quadratisch-homogener Ausdruck in φ.

1. $Q[\varphi, \psi]$ *hat die distributive Eigenschaft*

$$Q[\varphi, \psi + \chi] = Q[\varphi, \psi] + Q[\varphi, \chi] \quad (\varphi, \psi, \chi \text{ aus } \mathfrak{M}_Q) \tag{2}$$

2. *Mit beliebigen reellen Zahlen* α, β *gilt stets*

$$Q[\alpha\varphi + \beta\psi] = \alpha^2 Q[\varphi] + 2\alpha\beta Q[\varphi, \psi] + \beta^2 Q[\psi] \quad (\varphi, \psi \text{ aus } \mathfrak{M}_Q). \tag{3}$$

Die so charakterisierten Funktionale haben die Eigenschaften ($\varphi, \psi, \varphi_\nu$ Funktionen aus $\mathfrak{M}_Q$; a, c_ν reelle Zahlen):

$$Q[\varphi, \psi] = Q[\psi, \varphi] \text{ (die Polarform ist symmetrisch)},$$

$$Q[a\varphi, \psi] = aQ[\varphi, \psi],$$

$$Q[\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu] = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} c_\nu c_\mu Q[\varphi_\nu, \varphi_\mu]. \tag{4}$$

Wir nennen Funktionen φ_ν *orthogonal bezüglich* Q, wenn für $\nu \neq \mu$ gilt $Q[\varphi_\nu, \varphi_\mu] = 0$. In diesem Falle wird aus (4)

$$Q[\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu] = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 Q[\varphi_\nu]. \tag{4'}$$

Offenbar sind die obengenannten Funktionale D und H quadratisch-homogen. $\mathfrak{M}_D$ ist die Klasse der im Grundgebiet G (Integrationsgebiet) stückweise stetig differenzierbaren Funktionen. Weitere Beispiele für quadratisch-homogene Funktionale der Analysis sind

$$\iint_G p(x, y)\,(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\,dx\,dy, \tag{5}$$

$$\iint_G (\Delta\varphi)^2\,dx\,dy, \tag{6}$$

$$\iint_G r(x, y)\,\varphi^2\,dx\,dy, \tag{7}$$

$$\iint_G \iint_G K(x, y;\ \xi, \eta)\,\varphi(x, y)\,\varphi(\xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta \tag{8}$$
$$(\text{mit } K(x, y;\ \xi, \eta) = K(\xi, \eta;\ x, y)).$$

Die zugehörigen Polarausdrücke lauten:

$$\iint_G p(x, y)\,(\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y)\,dx\,dy, \tag{5'}$$

$$\iint_G \Delta\varphi \cdot \Delta\psi\,dx\,dy, \tag{6'}$$

$$\iint_G r(x, y) \cdot \varphi \cdot \psi\,dx\,dy, \tag{7'}$$

$$\iint_G \iint_G K(x, y;\ \xi, \eta)\,\varphi(x, y)\,\psi(\xi, \eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta. \tag{8'}$$

(Weitere Beispiele: vgl. Courant, Acta math. 49.)

2. Definition der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

D_G und H_G[2]) seien zwei quadratisch-homogene Funktionale der Analysis. Die Menge der Funktionen, für die $D[\varphi]$ und $H[\varphi]$ existieren, werde mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. $H[\varphi]$ sei in $\mathfrak{M}$ positiv definit. $D[\varphi]$ sei in der durch $H[\varphi] = 1$ gekennzeichneten Teilmenge von $\mathfrak{M}$ nach unten beschränkt. Für die sogleich anzugebenden Minimumprobleme ist als hinsichtlich der Stetigkeits- und Randwertseigenschaften (längs des Randes Γ von G) zulässig eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{M}$ auszuzeichnen. Wir nennen nach Courant diese Probleme *frei*, wenn $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}$ ist, *gebunden*, wenn $\mathfrak{R}$ nur die Teilmenge der längs Γ verschwindenden Funktionen von $\mathfrak{M}$ ist. (Ist G unberandet, so tritt an Stelle der Randbedingung eine Regularitätsbedingung.) Wir definieren nun die Folge der Eigenwerte und Eigenfunktionen sukzessiv:

1. *Der erste Eigenwert* (des durch D, H, G und $\mathfrak{R}$ bestimmten Eigenwertproblems) *ist das Minimum des Quotienten* $D[\varphi]:H[\varphi]$ *innerhalb* $\mathfrak{R}$. Die den Minimumswert liefernde Funktion u_1 ist nur bis auf einen Faktor bestimmt. Dieser werde so gewählt, daß $H[u_1] = 1$ wird. Dann wird der Minimumswert λ_1 des Quotienten gleich $D[u_1]$. λ_1 heißt erster Eigenwert und u_1 heißt zugehörige Eigenfunktion.

Die weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen werden *rekurrent* definiert.

2. Seien $u_1, \ldots, u_{n-1}$ als zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ gehörige Eigenfunktionen bereits gegeben. $\mathfrak{R}_n$ *sei die Teilmenge von* $\mathfrak{R}$, *in der gelten*

$$H[\varphi, u_i] = 0, \qquad i = 1 \ldots n-1. \tag{9}$$

Dann ist λ_n *das Minimum des Quotienten* $D[\varphi]:H[\varphi]$ *innerhalb* $\mathfrak{R}_n$. Die den Minimumswert λ_n liefernde Funktion u_n werde festgelegt durch die — auf das Minimum einflußlose — Bedingung $H[u_n] = 1$. u_n ist zum Eigenwert λ_n gehörige Eigenfunktion, und es ist $D[u_n] = \lambda_n$.

Die Gesamtheit der genannten Minimumprobleme bezeichnen wir als ein Eigenwertproblem. Es ist völlig bestimmt durch $D, H, G, \mathfrak{R}$. Als *Spektrum* des Eigenwertproblems bezeichnen wir die der Größe nach geordnete Gesamtmenge der Eigenwerte des Eigenwertproblems. Die Existenz der Lösungen der Minimumprobleme wollen wir überall postulieren. Wir nennen eine Funktion φ konkurrenzfähig für das λ_n ergebende Problem, wenn sie $\mathfrak{R}_n$ angehört, d. h. zulässig ist und (9) befriedigt. Dann ist ersichtlich

$$D[\varphi] - \lambda_n H[\varphi] \geqq 0 \qquad (\varphi \text{ aus } \mathfrak{R}_n). \tag{10}$$

[2]) Wo es zweckmäßig erscheint, das Grundgebiet besonders hervorzuheben, kennzeichnen wir es durch einen Index am Funktionalzeichen.

3. Die wichtigsten Eigenschaften der Eigenfunktionen.

Aus der Minimumdefinition folgt leicht:

Sei ζ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{R}$, so gilt

$$D[u_n, \zeta] - \lambda_n H[u_n, \zeta] = 0. \tag{11}$$

(Mit Hilfe Greenscher Formeln folgt aus (11), daß die Eigenfunktionen linearen homogenen Funktionalgleichungen (Differential-, Integral-, Integrodifferentialgleichungen usw.) genügen, doch werden wir dies *nicht* benutzen).

Für die Eigenfunktionen gelten die Orthogonalitätsrelationen:

$$D[u_i, u_k] = 0 \quad H[u_i, u_k] = 0 \quad i \neq k, \tag{12}$$

$$D[u_k] = \lambda_k \quad H[u_k] = 1. \tag{13}$$

Die Eigenwerte können wegen $\mathfrak{R}_n < \mathfrak{R}_{n-1}$ nicht fallen:

$$\lambda_{n-1} \leqq \lambda_n. \tag{14}$$

Eigenwerte können mehrfach sein, d. h. bei der Lösung der Minimumprobleme kann es eintreten, daß sich für mehrere (aufeinanderfolgende) Probleme derselbe Minimumswert ergibt. Die zu einem r-fachen Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen sind nur bis auf eine Substitution mit einer beliebigen r-reihigen orthogonalen Matrix bestimmt. Jedes Zahlen-r-tupel $c_1, c_2, \ldots, c_r$ mit $\Sigma c_i^2 = 1$ läßt sich als Zeile einer orthogonalen Matrix auffassen. Daher ist jede Linearkombination von Eigenfunktionen, die zu dem r-fach im Spektrum auftretenden Zahlwert λ_n als Eigenwert gehören, wieder eine Eigenfunktion zu λ_n (bzw. proportional zu einer solchen).

4. Hilfssatz über Linearkombinationen von Eigenfunktionen.

Seien $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die ersten n Eigenfunktionen eines zu D und H gehörigen Eigenwertproblems und $c_1, c_2, \ldots, c_n$ beliebige reelle Zahlen. Dann gilt für jede Linearverbindung

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \qquad (\Sigma c_i^2 \neq 0) \tag{15}$$

die Ungleichung

$$\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} \leqq \lambda_n. \tag{16}$$

Das Gleichheitszeichen steht darin dann und nur dann, wenn φ eine Linearverbindung von zu dem Zahlwert λ_n als Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen ist (wenn also φ selbst (bis auf einen Faktor) eine zu λ_n gehörige Eigenfunktion ist).

Beweis: Wegen der Orthogonalitätsrelationen (12), (13) wird

$$D[\varphi] - \lambda_n H[\varphi] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 (\lambda_i - \lambda_n). \tag{17}$$

Wegen (14) ist $\lambda_i \leqq \lambda_n$ für $i = 1 \ldots n-1$, daher ist:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 (\lambda_i - \lambda_n) \leqq 0. \tag{18}$$

(18) und (17) ergeben unmittelbar (16). Hat das Spektrum die Gestalt

$$\lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_{n-k} < \lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n,$$

so kann in (18), und damit in (16) das Gleichheitszeichen dann und nur dann stehen, wenn $c_i = 0$ gilt für $i = 1 \ldots n-k$. Damit ist die Behauptung über das Eintreten des Gleichheitszeichens bewiesen.

5. Independente Charakterisierung der Eigenwerte und Eigenfunktionen (als Corollar).

P_i $i = 1 \ldots n-1$ seien (irgendwelche) quadratisch-homogene Funktionale und w_i $i = 1 \ldots n-1$ (irgendwelche) Funktionen. $d\{P_i;\ w_i\}$ sei das Minimum des Quotienten $D[\psi]:H[\psi]$ innerhalb der durch die $n-1$ (linearen) Bedingungen

$$P_i[\psi,\ w_i] = 0 \qquad i = 1 \ldots n-1 \tag{19}$$

eingeschränkten Klasse $\mathfrak{K}$. Dann ist

$$d\{P_i;\ w_i\} \leqq \lambda_n, \tag{20}$$

und das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn die $d\{P_i;\ w_i\}$ ergebende Minimalfunktion eine Eigenfunktion des λ_n ergebenden Problems ist.

Corollar: λ_n ist das größte Minimum, das der Quotient $D[\psi]:H[\psi]$ unter irgendwelchen $n-1$ linearen Nebenbedingungen (19) annehmen kann. Dieses größte Minimum kann nur erreicht werden durch eine zu λ_n gehörige Eigenfunktion. (Es wird erreicht für die Wahl $P_i \equiv H$, $w_i \equiv u_i$ $\quad i = 1 \ldots n-1$.)

Beweis: Die c_j in $\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$ lassen sich so bestimmen, daß (19) und $\Sigma c_j^2 \neq 0$ erfüllt werden. Denn die Bedingungen (19) ergeben ein System von $n-1$ linearen homogenen Gleichungen für die n Unbekannten c_j, und ein solches System ist stets nichttrivial lösbar. Dann gilt mit Verwendung von (16) aus 4., S. 224

$$d\{P_i;\ w_i\} \leqq \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} \leqq \lambda_n.$$

Daraus folgt unmittelbar (20). Da aus $d\{P_i;\ w_i\} = \lambda_n$ folgt $\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} = \lambda_n$, so gilt im Hinblick auf die Gleichheitszeichendiskussion in 4. auch der Zusatz über das Eintreten des Gleichheitszeichens. Für das Corollar ist nichts zu beweisen. Naturgemäß läßt sich nicht zeigen, daß das

Gleichheitszeichen *nur* für $P_i \equiv H$, $w_i \equiv u_i \quad i = 1 \ldots n-1$ eintritt, was auch nicht der Fall ist. *Im folgenden machen wir von der Möglichkeit der independenten Charakterisierung keinen Gebrauch.* Die Schlußweise (Anwendung des Hilfssatzes 4. mit passenden c_i) wird aber immer wieder auftreten.

II.

Ungleichheitsbeziehungen zwischen Spektren verschiedener Eigenwertprobleme.

Über ein einzelnes Spektrum kann man mit Ausnahme einiger weniger explizit lösbarer Fälle nichts aussagen. Es ergeben sich aber interessante Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen durch Vergleiche von Spektren verschiedener Eigenwertprobleme. Damit die Vergleiche sinnvoll seien, müssen die Eigenwertprobleme gewisse Gemeinsamkeiten haben, etwa gehören zu

gleichen Funktionalen, Gebieten	verschiedenen Randbedingungen
Funktionalen, Randbedingungen	Gebieten
Randbedingungen, Gebieten	Funktionalen.

Wir vergleichen die Eigenwertprobleme I und II: Das Eigenwertproblem I sei gegeben durch $D, H, G, \mathfrak{R}$. Sein Spektrum sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, und ein zugehöriges Eigenfunktionensystem sei $u_1, u_2, \ldots$. Für das Eigenwertproblem II seien die entsprechenden Daten: $\bar{D}, \bar{H}, \bar{G}, \bar{\mathfrak{R}}$; $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots$; $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots$.

1. Abhängigkeit des Spektrums von den Funktionalen und den Randbedingungen bei festem Gebiet $\bar{G} = G$.

Es sei $\bar{G} = G$, $\bar{\mathfrak{R}}$ *enthalte* $\mathfrak{R}$, *und für alle Funktionen* χ *aus* $\mathfrak{R}$ *gelte*

$$\frac{\bar{D}[\chi]}{\bar{H}[\chi]} \leqq \frac{D[\chi]}{H[\chi]}. \tag{1}$$

Dann ist

$$\bar{\lambda}_n \leqq \lambda_n. \tag{2}$$

Das Gleichheitszeichen steht darin dann und nur dann, wenn es eine zu λ_n *gehörige Eigenfunktion des Problems* I *gibt, die zugleich Eigenfunktion des Problems* II *zu* $\bar{\lambda}_n$ *ist, und überdies für diese* (als χ genommen) *in* (1) *das Gleichheitszeichen steht.*

Beweis: Die c_i in $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ lassen sich so bestimmen, daß φ in $\bar{\mathfrak{R}}_n$ liegt (d. h. daß $\bar{H}[\varphi, \bar{u}_i] = 0 \quad i = 1 \ldots n-1$ erfüllt werden).

Dann ist $\bar{\lambda}_n \leqq \frac{\bar{D}[\varphi]}{\bar{H}[\varphi]}$, und nach (16), S. 224 $\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} \leqq \lambda_n$. Nach (1) gilt also insgesamt mit unserer Funktion φ:

$$\bar{\lambda}_n \leqq \frac{\bar{D}[\varphi]}{\bar{H}[\varphi]} \leqq \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} \leqq \lambda_n. \tag{3}$$

Hieraus folgt unmittelbar (2). Für das Eintreten des Gleichheitszeichens ist wegen (3) notwendig und hinreichend, daß mit der oben gebildeten Funktion φ gilt:

$$\bar{\lambda}_n = \frac{\bar{D}[\varphi]}{\bar{H}[\varphi]} = \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} = \lambda_n.$$

Daraus folgt leicht der Zusatz über das Eintreten des Gleichheitszeichens. In Abschnitt III wird eine Gleichheitszeichendiskussion eingehend durchgeführt, so daß wir hier auf die Überlegungen in I, 4, 5 verweisen können.

Aus der soeben bewiesenen Tatsache folgen unmittelbar die von Courant mit Hilfe der independenten Charakterisierung gewonnenen Sätze:

Der n-te Eigenwert des freien Problems ist nie größer als der n-te Eigenwert des gebundenen Problems (für die gleichen Funktionale und das gleiche Gebiet).

Bei Vergrößerung von $D[\varphi]$ oder Verkleinerung von $H[\varphi]$ kann kein Eigenwert fallen.

2. Gleichmäßig stetige Abhängigkeit der Spektren von den Daten der Eigenwertprobleme.

Es sei $\mathfrak{R} = \bar{\mathfrak{R}}$. Die Funktionale $\bar{D}$, $\bar{H}$ seien den Funktionalen D, H benachbart in dem Sinne: *Für alle Funktionen χ aus $\mathfrak{R}$ gelte mit festen Zahlen ε, η ($0 \leqq \varepsilon < 1$, $0 \leqq \eta < 1$)*

$$(1-\varepsilon) H[\chi] \leqq \bar{H}[\chi] \leqq (1+\varepsilon) H[\chi], \tag{4}$$

$$(1-\eta) D[\chi] \leqq \bar{D}[\chi] \leqq (1+\eta) D[\chi]. \tag{5}$$

Dann folgt für $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ mit passenden c_i (φ in $\bar{\mathfrak{R}}_n$):

$$\bar{\lambda}_n \leqq \frac{\bar{D}[\varphi]}{\bar{H}[\varphi]} \leqq \frac{(1+\eta) D[\varphi]}{(1-\varepsilon) H[\varphi]} \leqq \lambda_n \cdot \frac{1+\eta}{1-\varepsilon}.$$

Entsprechend folgt mit Hilfe einer Linearkombination $\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i u_i$ von Eigenfunktionen des Problems II, die in $\mathfrak{R}_n$ liegt:

$$\lambda_n \leqq \bar{\lambda}_n \frac{1+\varepsilon}{1-\eta},$$

so daß wir insgesamt haben:

$$\lambda_n \cdot \frac{1-\eta}{1+\varepsilon} \leqq \bar{\lambda}_n \leqq \lambda_n \cdot \frac{1+\eta}{1-\varepsilon}. \tag{6}$$

Aus (6) folgt: *Die Eigenwerte hängen gleichmäßig stetig in n vom Eigenwertproblem ab (d. h. bei Problemkonvergenz $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ geht das Spektrum des Problems* II *gleichmäßig in allen Termen in das des Problems* I *über). Die Nachbarschaft der Spektren ist auch gleichmäßig für alle* $\begin{matrix} D \\ H \end{matrix}$ *bei gemäß* $\begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}$ *abgeändertem* $\begin{matrix} H \\ D \end{matrix}$. (Obwohl die Eigenwerte bei den Problemen der Analysis im allgemeinen unendlich anwachsen, streuen die Spektren benachbarter Probleme nur gleichmäßig wenig[3]).

Beispiel: $\bar{G} = G$.

$$D[\varphi] \equiv \int\int_G p(x, y)(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy, \quad H[\varphi] \equiv \int\int_G r(x, y)\, \varphi^2 dx\, dy,$$

$$\bar{D}[\varphi] \equiv \int\int_G \bar{p}(x, y)(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy, \quad \bar{H}[\varphi] \equiv \int\int_G \bar{r}(x, y)\, \varphi^2 dx\, dy.$$

Dann gelten (4) und (5) sicher, wenn in G bestehen:

$$(1-\varepsilon)\, r \leqq \bar{r} \leqq (1+\varepsilon)\, r, \tag{4'}$$

$$(1-\eta)\, p \leqq \bar{p} \leqq (1+\eta)\, p. \tag{5'}$$

3. Sonderstellung der mehrfachen Eigenwerte.

Gegeben sei ein Rotationsellipsoid und eine Ebene durch dessen Mittelpunkt. Dann ist eine der Hauptachsen der Schnittellipse der Ebene mit dem Ellipsoid zugleich eine Hauptachse des Ellipsoids, und zwar nach Größe und Richtung. Aus der Formulierung der vorliegenden Tatsache als Eigenwertproblem vermutet man für allgemeine Eigenwertprobleme:

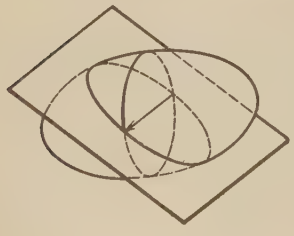


Fig. 1.

Gegeben seien zwei Eigenwertprobleme I *und* II, *von denen* II *aus* I *entstehe durch Hinzunahme zusätzlicher linearer Nebenbedingungen* (wie auf S. 225, (19)) *in der Anzahl k. Hat dann ein Eigenwert des Problems* I *größere Vielfachheit als k, so haben Problem* I *und* II *mindestens eine gemeinsame, zum gleichen Zahlwert als Eigenwert gehörige Eigenfunktion.*

Der Beweis wird sich sogleich aus der Diskussion des Gleichheitszeichens in einer Ungleichung zwischen den Eigenwerten der beiden Probleme ergeben.

---

[3]) Für die Eigenfunktionen vgl. den Teildruck der Dissertation des Verfassers „Über die stetige Abhängigkeit der Eigenfunktionen von den Eigenwertproblemen".

Problem I sei wie gewohnt gekennzeichnet durch D, H, G, $\mathfrak{R}$ und führe auf die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ und die Eigenfunktionen $u_1, u_2, \ldots$. $\mathfrak{R}_n$ ist die Teilmenge von $\mathfrak{R}$, in der $H[\varphi, u_i] = 0$ für $i = 1 \ldots n-1$ gilt.

Für Problem II seien jeweils bei den einzelnen Minimumproblemen noch die k Bedingungen $P_i[\varphi, w_i] = 0 \quad i = 1 \ldots k$ gestellt, wobei wie S. 225 die P_i beliebige quadratisch-homogene Funktionale und die w_i beliebige Funktionen bedeuten. Sind $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots$ und $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots$ die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen des Problems II, so ergeben sich also $\bar{\lambda}_n$, $\bar{u}_n$ als Minimumswert bzw. Minimalfunktion des Minimumproblems:

$D[\varphi]:H[\varphi]$ ist zum Minimum zu machen unter den $k+n-1$ linearen Nebenbedingungen

$$(7) \qquad H[\varphi, \bar{u}_i] = 0 \quad i = 1 \ldots n-1; \quad P_i[\varphi, w_i] = 0 \quad i = 1 \ldots k.$$

Die Menge der Funktionen, die (7) erfüllen, werde mit $\mathfrak{R}_n^k$ bezeichnet.

In $\varphi = \sum_{i=1}^{n+k} c_i u_i$ lassen sich die c_i so bestimmen, daß φ zu $\mathfrak{R}_n^k$ gehört. Dann wird (mit Rücksicht auf I, 4.)

$$(8) \qquad \bar{\lambda}_n \leqq \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} \leqq \lambda_{n+k}.$$

Daher gilt $\bar{\lambda}_n \leqq \lambda_{n+k}$, und das Gleichheitszeichen kann darin nur stehen, wenn es eine zu λ_{n+k} als Eigenwert gehörige Eigenfunktion des Problems I gibt, die zugleich zu $\bar{\lambda}_n$ gehörige Eigenfunktion des Problems II ist.

Ferner lassen sich in $\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i \bar{u}_i$ die $\bar{c}_i$ so bestimmen, daß $\bar{\varphi}$ in $\mathfrak{R}_n$ liegt. Dann wird entsprechend

$$(9) \qquad \lambda_n \leqq \frac{D[\bar{\varphi}]}{H[\bar{\varphi}]} \leqq \bar{\lambda}_n.$$

Es ist also $\lambda_n \leqq \bar{\lambda}_n$, und das Gleichheitszeichen kann darin nur dann stehen, wenn es eine zu $\bar{\lambda}_n$ gehörige Eigenfunktion des Problems II gibt, die zugleich zu λ_n gehörige Eigenfunktion des Problems I ist.

Aus (8) und (9) folgt

$$(10) \qquad \lambda_n \leqq \bar{\lambda}_n \leqq \lambda_{n+k}.$$

Ist nun $\lambda_n = \lambda_{n+k}$, übersteigt also die Vielfachheit des Eigenwerts λ_n im Spektrum II die Anzahl der zusätzlichen Nebenbedingungen des Problems II, so muß wegen (10) sowohl in (8), als in (9) der Fall des Gleichheitszeichens eintreten. Daher haben Problem I und Problem II in diesem Falle mindestens eine gemeinsame, zum gleichen Zahlwert als

Eigenwert (und zur gleichen Ordnungszahl im Spektrum) gehörige Eigenfunktion[4]).

Da mit (10) auch gilt

$$\bar{\lambda}_n \leqq \lambda_{n+k} \leqq \bar{\lambda}_{n+k},$$

folgt die gleiche Tatsache, wenn die Vielfachheit eines Eigenwerts des Spektrums II die Anzahl der Nebenbedingungen des Problems II überschreitet.

Allgemeiner kann man mit der gleichen Schlußweise die Spektren zweier Probleme vergleichen, von denen jedes aus einem Grundproblem (gekennzeichnet durch D, H, G, $\mathfrak{R}$) durch Hinzunahme linearer Nebenbedingungen entsteht (wie im vorangehenden Problem II aus I). Seien die Anzahlen dieser Bedingungen k bzw. $\bar{k}$ und die Eigenwerte der beiden Probleme λ_n bzw. $\bar{\lambda}_n$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\lambda_n \leqq \bar{\lambda}_{n+k} \leqq \lambda_{n+k+\bar{k}}, \\ &\bar{\lambda}_n \leqq \lambda_{n+\bar{k}} \leqq \bar{\lambda}_{n+k+\bar{k}}, \end{aligned} \tag{11}$$

und man findet bei der Diskussion der Gleichheitszeichen:

Übersteigt die Vielfachheit eines Eigenwertes eines der beiden Probleme die Anzahl der für beide gestellten Nebenbedingungen um r, so haben die beiden Probleme mindestens r gemeinsame, zum gleichen Zahlwert als Eigenwert gehörige Eigenfunktionen.

Bezeichnet man die Vielfachheit des m-ten Eigenwertes des Problems I bzw. II mit V_m bzw. $\overline{V}_m$, so ergibt sich aus (11) leicht das Bestehen der *Vielfachheitenrelationen*

$$\begin{aligned} &V_n - (k+\bar{k}) \leqq \overline{V}_{n+k} \leqq V_n + (k+\bar{k}), \\ &\overline{V}_n - (k+\bar{k}) \leqq V_{n+\bar{k}} \leqq \overline{V}_n + (k+\bar{k}), \end{aligned} \tag{12}$$

die sich, ebenso wie (11), verschärfen lassen, wenn einige der Bedingungen des einen Problems jeweils von allen Eigenfunktionen des anderen Problems erfüllt werden.

Mit denselben einfachen Mitteln lassen sich noch weitere Besonderheiten für den Fall mehrfacher Eigenwerte bei Eigenwertproblemen gewinnen.

---

[4]) Im Falle $\lambda_n = \lambda_{n+k}$ können die Zusatzbedingungen $P_i[\varphi, w_i] = 0 \;\; i = 1 \ldots k$ trivialerweiser durch eine Linearkombination $\varphi = \sum_{i=n}^{n+k} c_i u_i$ von zu λ_n als Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen von I befriedigt werden. Die eben bewiesene Tatsache lehrt, daß durch ein solches φ überdies noch den $n-1$ Bedingungen $H[\varphi, \bar{u}_i] = 0$ $i = 1 \ldots n-1$ genügt werden kann.

III.

Zusammenhänge zwischen den Eigenwerten und Eigenfunktionen von Eigenwertproblemen mit denselben Funktionalen, aber verschiedenen Grundgebieten. Nullstellensatz der Eigenfunktionen.

In diesem Abschnitt betrachten wir wieder Eigenwertprobleme ohne Zusatzbedingungen. Das Eigenwertproblem ist also gegeben durch D, H, G, $\mathfrak{R}$. Die zugehörigen Eigenwerte und Eigenfunktionen sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ bzw. $u_1, u_2, \ldots$. $\mathfrak{R}_n$ ist die Teilmenge von $\mathfrak{R}$, in der $H[\varphi, u_i] = 0$ $i = 1, 2, \ldots n-1$ gilt.

In I, S. 224 erwähnten wir als notwendige Bedingung dafür, daß λ_n ein Eigenwert und u_n eine zugehörige Eigenfunktion des Eigenwertproblems ist:

Mit jeder Funktion ζ aus $\mathfrak{R}$ gilt die Hauptgleichung

$$D_G[u_n, \zeta] - \lambda_n H_G[u_n, \zeta] = 0. \tag{1}$$

Als Hilfsmittel für eine Gleichheitszeichendiskussion im folgenden beweisen wir (um dann den Gang nicht unterbrechen zu müssen), daß diese Bedingung auch hinreichend ist:

Hilfssatz 1: *Gilt für eine Zahl λ und eine Funktion u aus $\mathfrak{R}$ mit $H[u] \neq 0$ bei beliebigen ζ aus $\mathfrak{R}$ die Beziehung*

$$D_G[u, \zeta] - \lambda H_G[u, \zeta] = 0, \tag{2}$$

so ist λ ein Eigenwert des durch $D, H, G, \mathfrak{R}$ bestimmten Eigenwertproblems und u eine zu λ als Eigenwert gehörige Eigenfunktion dieses Eigenwertproblems[5]).

Beweis: Aus (2) folgt für $\zeta = u$, daß $\frac{D[u]}{H[u]} = \lambda$ ist. Daher ist $\lambda < \lambda_1$ unmöglich. Im Falle $\lambda = \lambda_1$ ist sicher u eine zu λ_1 gehörige Eigenfunktion. In diesem Falle sind wir schon fertig. Sei nun λ_{n-1}

---

[5]) Aus der Hauptgleichung (1) folgt, daß die Eigenfunktionen linearen homogenen Funktionalgleichungen mit Parameter genügen (vgl. z. B. Courant, Acta math. 49). Aus Hilfssatz 1 folgt unmittelbar die vollständige Äquivalenz der Eigenwertprobleme für solche Funktionalgleichungen $L[u] + \lambda M[u] = 0$, in denen $L[u]$ und $M[u]$ lineare elliptische Funktionale (d. h. Variationsableitungen von quadratisch-homogenen Funktionalen) sind, mit den durch die Minimalprobleme charakterisierten Eigenwertproblemen. Dieser Äquivalenzsatz wurde bisher immer aus der Vollständigkeit der durch die Minimalprobleme charakterisierten Eigenfunktionen erschlossen. Unser Beweis zeigt, daß diese Vollständigkeit nicht erforderlich ist. Dies ist auch von vornherein klar, wenn man daran denkt, daß die Äquivalenz z. B. auch für symmetrische Integralgleichungen mit ausgeartetem Kern gilt.

($n \geqq 2$) der letzte unterhalb λ gelegene Zahlwert im Spektrum unseres Eigenwertproblems, also

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_{n-1} < \lambda \leqq \lambda_n. \tag{3}$$

Wegen der Freiheit von ζ ist nach (2) jedenfalls

$$D[u, u_i] - \lambda H[u, u_i] = 0 \quad i = 1 \ldots n-1; \tag{4}$$

andererseits ist wegen der Hauptgleichung (1), da u in $\mathfrak{R}$ ist,

$$D[u_i, u] - \lambda_i H[u_i, u] = 0 \quad i = 1 \ldots n-1. \tag{5}$$

Durch Subtraktion folgt wegen der Symmetrie von D und H aus (4) und (5) sofort

$$(\lambda - \lambda_i) H[u, u_i] = 0 \quad i = 1 \ldots n-1.$$

Da wegen (3) $\lambda - \lambda_i \neq 0$ ist, folgt hieraus $H[u, u_i] = 0$ für $i = 1 \ldots n-1$; u ist also in $\mathfrak{R}_n$. Daher haben wir

$$\lambda = \frac{D[u]}{H[u]} \geqq \lambda_n.$$

Mit (3) folgt $\lambda = \lambda_n$. Also ist u eine zu λ_n $(= \lambda)$ als Eigenwert gehörige Eigenfunktion unseres Eigenwertproblems.

G_i $i = 1 \ldots l$ seien l Teilgebiete von G, die keine inneren Punkte gemeinsam haben. Für jedes der Teilgebiete G_i werde das gebundene Eigenwertproblem für die Funktionale D, H gelöst. Wir haben also l Eigenwertprobleme, die gekennzeichnet sind durch D, H, G_i und die Randbedingung: Verschwinden am Rande Γ_i von G_i. Die Eigenwerte und ein zugehöriges Eigenfunktionensystem für G_i seien: $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \ldots$ bzw. $u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots$. Sodann werde die Gesamtmenge der Eigenwerte aller l Teilgebiete der Größe nach geordnet. Dies ergebe die Zahlenfolge $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots$, die wir als gemischtes Spektrum der Teilgebiete bezeichnen. Zu jedem der Zahlwerte λ_k^* gehört eine der Eigenfunktionen $u_{i,j}$ eines der Teilgebiete. Diese denken wir uns über den Rand Γ_i von G_i hinaus identisch null in ganz G fortgesetzt. Die so erhaltene in ganz G erklärte und in $G - G_i$ identisch verschwindende Funktion bezeichnen wir mit u_k^*. u_k^* ist sicher in $\mathfrak{R}$. Die u_k^* sind untereinander orthogonal bezüglich D und H (soweit sie zu demselben Teilgebiet gehören wegen der Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen, soweit sie zu verschiedenen Teilgebieten gehören wegen der Art der Fortsetzung).

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den

Satz: *Seien $G_1, G_2, \ldots, G_l$ Teilgebiete von G, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Sei ferner λ_n der n-te Eigenwert eines durch $D, H, G, \mathfrak{R}$ bestimmten Eigenwertproblems* (mit Eigenwerten λ_i und Eigenfunktionen u_i)

und λ_n^* die n-te Zahl aus dem gemischten Spektrum für das gebundene Problem für die Teilgebiete. Dann ist

(6) $$\lambda_n \leqq \lambda_n^*\ ^{6}).$$

Beweis von (6): Unter den n ersten Zahlen $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*$ des gemischten Spektrums komme der Zahlwert λ_n^* genau k-mal, im gesamten gemischten Spektrum komme er r-mal vor ($r \geqq k \geqq 1$). Das Spektrum soll also in der Umgebung von λ_n^* die Gestalt haben

(7) $$\lambda_1^* \leqq \lambda_2^* \leqq \ldots \leqq \lambda_{n-k}^* < \lambda_{n-k+1}^* = \ldots = \lambda_n^* = \lambda_{n-k+r}^* < \lambda_{n-k+r+1}^*.$$

(Im Falle $k = n$ denken wir den Teil bis λ_{n-k}^* als nicht angeschrieben). Ein zugehöriges Eigenfunktionensystem der Teilgebiete sei

$$u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{n-k}^*, u_{n-k+1}^*, \ldots, u_n^*, \ldots\ ^{7}).$$

Dabei sollen $u_{n-k+1}^*, \ldots, u_n^*$ *irgendwelche* k der zum Zahlwert λ_n^* des gemischten Spektrums gehörigen Eigenfunktionen der Teilgebiete sein; die folgenden Schlüsse beziehen sich also (im Falle $r > k$) auf je k der zu λ_n^* gehörigen Eigenfunktionen. (Im Fall $k = r$ gibt es nur ein solches System.)

Wegen der Orthogonalitäten wird für jede Linearkombination $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^*$ mit irgendwelchen reellen c_i

(8) $$D[\varphi] - \lambda_n^* H[\varphi] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 (\lambda_i^* - \lambda_n^*) \leqq 0\ ^{8}).$$

Das Gleichheitszeichen steht in (8) wegen (7) dann und nur dann, wenn $c_1 = \ldots = c_{n-k} = 0$, wenn also φ eine Linearkombination von (höchstens) k der zu λ_n^* gehörigen Eigenfunktionen der Teilgebiete ist.

Die c_i lassen sich speziell so bestimmen, daß φ in $\mathfrak{R}_n$ liegt und $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$ wird. Dann folgt (wegen der Bedeutung von λ_n unter Beachtung von (8)):

(9) $$\lambda_n \leqq \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} \leqq \lambda_n^*.$$

---

[6]) Es wird hierbei offen gelassen, ob es sich bei dem Eigenwertproblem für G um ein freies oder ein gebundenes handeln soll. Dadurch wird insbesondere der Fall eines unberandeten Grundgebiets G (etwa Oberfläche eines Eikörpers) mit in die Betrachtung eingeschlossen. *Die Gleichheitszeichendiskussion folgt anschließend und ergibt unter anderen Eigenschaften der Eigenfunktionen den Nullstellensatz der Eigenfunktionen.* (6) wurde zuerst von Courant mit Hilfe der independenten Charakterisierung gewonnen; *diese Methode ermöglicht jedoch nicht die Diskussion des Gleichheitszeichens.*

[7]) Wir nennen die in der Vorbemerkung erklärten u_i^* trotz der Fortsetzung in ganz G der Kürze halber noch Eigenfunktionen der Teilgebiete.

[8]) Tragen die Funktionale D und H keinen Gebietszeiger, so sind sie hier stets über das Gesamtgebiet G zu erstrecken.

Daraus folgt unmittelbar (6). Wir stellen nun eine Anzahl von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (6) zusammen und ziehen daraus einige Folgerungen[9]).

Diskussion des Gleichheitszeichens in $\lambda_n \leqq \lambda_n^*$[10]).

Notwendige Bedingungen (N.B.) für $\lambda_n = \lambda_n^*$.

Ist $\lambda_n = \lambda_n^*$, so folgen aus (9) für jede in $\mathfrak{R}_n$ liegende Funktion $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^*$ mit $\sum c_i^2 \neq 0$

$$D[\varphi] - \lambda_n^* H[\varphi] = 0 \quad \text{und} \quad \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} = \lambda_n.$$

Die erste dieser Beziehungen lehrt zufolge unserer oben angegebenen Bemerkung über das Gleichheitszeichen in (8), daß φ eine Linearkombination von (höchstens) k der zu λ_n^* gehörigen Eigenfunktionen der Teilgebiete ist. Da φ in $\mathfrak{R}_n$ ist, folgt aus der zweiten Gleichung, daß φ eine zu λ_n gehörige Eigenfunktion des Gesamtgebiets ist. Da $u_{n-k+1}^*, \ldots, u_n^*$ irgendwelche k der Eigenfunktionen zu λ_n^* als Eigenwert waren, haben wir

N.B. α: *Je k der zu λ_n^* als Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen der Teilgebiete lassen sich zu einer zu λ_n gehörigen Eigenfunktion von G linear zusammensetzen.*

Erst recht ist also die Bedingung notwendig:

N.B. α': *Es gibt k der Eigenfunktionen zu λ_n^*, die sich zu einer zu λ_n gehörigen Eigenfunktion von G linear zusammensetzen lassen.* (N.B. α' wird sich auch als hinreichend für das Eintreten des Gleichheitszeichens erweisen.)

Aus $\lambda_n = \lambda_n^*$, (6) und (7) folgt $\lambda_n = \ldots = \lambda_{n-k+r}$ $(= \lambda_{n-k+r}^*)$.

Damit ergibt sich analog wie eben:

N.B. α'': *Aus den zu dem Zahlwert λ_n^* als Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen der Teilgebiete lassen sich (mindestens) $r - k + 1$ untereinander bezüglich H orthogonale Linearkombinationen herstellen, die zu λ_n als Eigenwert gehörige Eigenfunktionen des Gesamtgebiets G sind.* (Dabei werden zu einer höchstens k, falls nicht $k = r$ ist, zu einer zweiten höchstens $k + 1$ usw., und höchstens zu einer alle r der genannten Eigenfunktionen wirklich benötigt.)

---

[9]) Zur Illustration der vielgestaltigen zu besprechenden Sachverhalte gebe ich am Schluß ein explizit gelöstes Beispiel. Auf dieses beziehen sich die folgenden Anmerkungen zum Text.

[10]) Der Gleichheitsfall tritt wirklich gelegentlich ein. Im Beispiel ist

$$\lambda_2 = \lambda_2^*, \quad \lambda_4 = \lambda_4^*, \quad \lambda_{12} = \lambda_{12}^*.$$

Dies lehrt, daß sich im Falle $\lambda_n = \lambda_n^*$ mindestens so viele der zu λ_n als Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen von G aus den zu λ_n^* gehörigen Eigenfunktionen der Teilgebiete linear aufbauen lassen, als in wieviel Ordnungszahlen sich die beiden verglichenen Spektren beim Zahlwert λ_n überdecken [11]).

Für die Herleitung weiterer notwendiger Bedingungen verwenden wir eine Eigenschaft der Eigenfunktionen, die sich bei sachgemäßer Führung des Existenzbeweises für weite Klassen von Eigenwertproblemen ergibt, auf deren Beweis jedoch hier verzichtet sei: Keine Eigenfunktion kann in einem echten Teilgebiet des Grundgebiets (des fraglichen Eigenwertproblems) identisch verschwinden. Die folgenden N. B. beziehen sich also nur auf die Eigenwertprobleme, für die diese Tatsache beweisbar ist (z. B. auf alle von Courant in Acta math. 49 zusammengestellten Problemklassen).

Damit haben wir im Hinblick auf N. B. α' sofort:

N. B. β: $G_1 + G_2 + \ldots + G_l = G$, d. h. *die Gebietsteilung ist lückenlos* [12]).

Ehe wir weitere N. B. zusammenstellen, folgern wir hieraus den Nullstellensatz der Eigenfunktionen: *Durch die Nullinien einer zu λ_n gehörigen Eigenfunktion u_n des durch $D, H, G, \mathfrak{R}$ gegebenen Eigenwertproblems kann das Grundgebiet G nicht in mehr als n Teilgebiete zerlegt werden.*

Für den Beweis dieses Satzes und für spätere Verwendung zeigen wir zunächst die Gültigkeit des

Hilfssatz 2: *Ist G' ein von Nullinien einer zu λ_n gehörigen Eigenfunktion u_n von G begrenztes Teilgebiet* (in dessen Innerem noch weitere Nullinien verlaufen dürfen), *so tritt der Zahlwert λ_n im Spektrum des zu D, H, G' gehörigen gebundenen Eigenwertproblems auf.*

---

[11]) Es kommt im Falle $\lambda_n = \lambda_n^*$ gelegentlich vor, daß sich mehr als $r - k + 1$ der zu λ_n gehörigen Eigenfunktionen von G linear aufbauen lassen aus zu λ_n^* gehörigen Eigenfunktionen der Teilgebiete: Im Beispiel ist $\lambda_{12} = \lambda_{12}^*$, $r = k = 4$, also $r - k + 1 = 1$. Ferner gelten $\lambda_9^* = \lambda_{10}^* = \lambda_{11}^* = \lambda_{12}^*$, $\lambda_{12} = \lambda_{13}$ und $u_9^* + u_{10}^* = u_{12}$, $u_{11}^* + u_{12}^* = u_{13}$. Es lassen sich also 2 (> 1) Eigenfunktionen zu λ_{12} aus denen zu λ_{12}^* linear kombinieren.

[12]) Daraus folgt unmittelbar die Tatsache: Ist G' ein echtes Teilgebiet von G und λ_n' der n-te Eigenwert des durch D, H, G' gegebenen gebundenen Eigenwertproblems, so ist $\lambda_n < \lambda_n'$. Diese Tatsache bewies zuerst Courant unter Benutzung des unendlichen Anwachsens der Eigenwerte. Da diese Tatsache aber z. B. auch für ausgeartete symmetrische Integralgleichungen gilt, war die Vermutung naheliegend, daß die Benutzung des unendlichen Anwachsens der Eigenwerte überflüssig ist. Aus dieser Vermutung heraus entstand der hier dargestellte Aufbau der Theorie der Ungleichheitsbeziehungen zwischen den Eigenwerten verschiedener Eigenwertprobleme. — Der anschließende Nullstellensatz wurde zuerst von Courant (ebenfalls unter Benutzung des unendlichen Anwachsens der Eigenwerte) gewonnen.

Denn nehmen wir in der Hauptgleichung (1) für ζ alle die Funktionen, die längs des Randes von G' die Randwerte 0 haben und in $G - G'$ identisch verschwinden, so folgt daraus für alle längs des Randes von G' verschwindenden Funktionen ζ

$$D_{G'}[u_n, \zeta] - \lambda_n H_{G'}[u_n, \zeta] = 0.$$

Daher ist nach Hilfssatz 1 der Zahlwert λ_n sicher ein Eigenwert des gebundenen Problems für G' und überdies der in G' liegende Ausschnitt von u_n eine zu λ_n als Eigenwert gehörige Eigenfunktion von G'. (Die Ordnung des Zahlwerts λ_n im Spektrum von G' braucht keineswegs n zu sein!)

Wir beweisen nun den Nullstellensatz indirekt.

Angenommen, die zu λ_n gehörige Eigenfunktion u_n teile durch ihre Nullinien G in mehr als n Teilgebiete. Dann seien $G_1, G_2, \ldots, G_n$ irgendwelche n der von Nullinien begrenzten Teilgebiete. Unsere Annahme ist dann $G_1 + G_2 + \ldots + G_n < G$ (G wird durch $G_1, \ldots, G_n$ nicht lückenlos erschöpft). Da nach Hilfssatz 2 λ_n im Spektrum jedes der Teilgebiete $G_1, \ldots, G_n$ auftritt, ist der n-te Zahlwert λ_n^* im gemischten Spektrum für $G_1, \ldots, G_n$ sicher nicht größer als λ_n: $\lambda^* \leqq \lambda_n$. Nun lehrt (6) sofort $\lambda_n = \lambda_n^*$, es muß also der Gleichheitsfall vorliegen. Daher gilt N. B. β: $G_1 + G_2 + \ldots + G_n = G$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

Zur späteren Verwendung merken wir an:

Corollar 1: *Teilt eine Eigenfunktion durch ihre Nullinien ein Grundgebiet in m Teile, so ist die Ordnungszahl des zugehörigen Eigenwerts mindestens m.*

Corollar 2: *Die erste Eigenfunktion besitzt keine Nullinien im Innern des Grundgebiets.*

Corollar 3: *Der erste Eigenwert ist einfach.*

Die im Nullstellensatz genannte *Maximalteilzahl* n für zu λ_n gehörige Eigenfunktionen wird gelegentlich erreicht (Beispiel: λ_4 ist einfacher Eigenwert von G, u_4 teilt das Quadrat in 4 Teilgebiete). Daß sie nicht immer erreichbar ist, folgt z. B. unmittelbar aus dem Vorkommnis mehrfacher Eigenwerte. Auch bei einfachen Eigenwerten wird die Maximalteilzahl n nicht immer erreicht (Beispiel: λ_{11} ist einfach, u_{11} teilt G nur in 9 Teilgebiete). Man kann (auf Grund der Definitheit und der Orthogonalitätsbedingungen der Eigenfunktionen) zeigen, daß für $n > 1$ jede Eigenfunktion u_n das Grundgebiet in mindestens zwei Teilgebiete zerlegen muß. Ferner lassen sich an einem Beispiel zu beliebig hohen Ordnungszahlen gehörige Eigenfunktionen angeben, die nur Zweiteilung des Grundgebiets bewirken. Die einzige denkbare Verschärfung des Nullstellensatzes wäre hiernach die, daß vielleicht von einer gewissen Ordnungszahl an die

Maximalteilzahl n nicht mehr erreicht werden kann. Doch erscheint dies sehr zweifelhaft. Als zu λ_n gehörige *Höchstteilzahl* $\bar{n}$ bezeichnen wir in N. B. η die höchste Anzahl der Teilgebiete, in die G durch eine zu λ_n gehörige Eigenfunktion von G zerlegt werden kann. (Nach dem Nullstellensatz ist $\bar{n} \leqq n$.)

Wir fahren nun fort in der Zusammenstellung notwendiger Bedingungen für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (6).

N. B. γ: *λ_n^* muß in jedem der einzelnen Spektren der Teilgebiete mindestens einmal auftreten.*

Denn sonst verschwände jede der Funktionen $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^*$ in mindestens einem der Teilgebiete, es könnte also eine solche Funktion nicht Eigenfunktion für G sein im Widerspruch zu N. B. α. Genauer gewinnen wir eine untere Schranke für die Häufigkeit des Auftretens des Zahlwerts λ_n^* unter den ersten n Werten des gemischten Spektrums: Ist λ_n^* für einige (oder alle) der Teilgebiete $G_1, \ldots, G_l$ mehrfacher Eigenwert, so kann es im Falle $\lambda_n = \lambda_n^*$ wegen N. B. α nicht möglich sein, k der Eigenfunktionen zu λ_n^* so auszuwählen, daß von einem der Teilgebiete gar keine Eigenfunktion zur Verwendung kommt. *Sei λ_n für G_i r_i-facher Eigenwert* ($r_i \geqq 1$ wegen N. B. γ, $\sum_{i=1}^{l} r_i = r$ wegen (7)), *so muß* also *gelten*

N. B. δ: $$(r \geqq)\ k \geqq \Sigma' r_i + 1\ (\geqq l),$$

wobei $\Sigma' r_i$ die größte Summe ist, die man aus $l-1$ der Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_l$ bilden kann.

Ist insbesondere λ_n^* für eins der Teilgebiete G_i einfacher Eigenwert, so wird $\Sigma' r_i + 1 = \Sigma r_i = r$, dann ist also $k = r$, d. h. die verglichenen Spektren haben (der Ordnungszahl nach) nur eine einzige Stelle (beim Wert λ_n) gemeinsam[13]).

Die Bedingung N. B. δ sagt im wesentlichen, daß das Gleichheitszeichen nur bei mehrfach im gemischten Spektrum der Teilgebiete auftretenden Eigenwerten vorkommen kann, und dann auch nur bei den höchsten zu Gruppen gleicher Eigenwerte gehörigen Ordnungszahlen.

Da die Funktionen $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^*$ längs der Einteilungslinien der Gebietsteilung verschwinden (also Nullinien haben), haben wir wegen N. B. α'' sofort die weitere notwendige Bedingung für $\lambda_n = \lambda_n^*$:

---

[13]) Diese Bedingung ist nicht notwendig für Überdeckung der Spektren an nur einer Stelle. Es kommt $k = r$ vor, ohne daß λ_n^* für eins der Teilgebiete nur einfacher Eigenwert ist: Im Beispiel ist $\lambda_{12} = \lambda_{12}^*$ für G, G_1, G_2 je zweifacher Eigenwert und trotzdem $k = r$ (= 4).

N. B. ε: *Die Linien der* (nach N. B. β lückenlosen) *Gebietsteilung von* G, *die durch* $G_1, G_2, \ldots, G_i$ *bewirkt wird, müssen unter den Nullinien von mindestens* $r - k + 1$ *verschiedenen* (d. h. untereinander orthogonalen) *zu* λ_n *gehörigen Eigenfunktionen von* G *vorkommen*[14]).

In dem Sonderfall, daß es eine Eigenfunktion von G zu λ_n gibt, die den Rand eines der G_i zu Nullinien hat, jedoch darin keine weiteren Nullinien besitzt, ist λ_n $(= \lambda_n^*)$ erster und daher einfacher Eigenwert für dieses Teilgebiet. Dann wird $\sum' r_i + 1 = r$, und die Spektren können sich nicht in mehr als einem Punkt überdecken[15]) (vgl. d. Folgerung N. B. δ).

Schließlich gewinnen wir noch mit Hilfe des Nullstellensatzes für $\lambda_n = \lambda_n^*$ notwendige Bedingungen über die Teilzahl l der Gebiete: Wegen des Nullstellensatzes, $k \leqq n$ und N. B. α folgt unmittelbar

N. B. η: $l \leqq n$ (vgl. Begründung zu N. B. γ), und im Falle $\bar{n} < n$ sogar ($\bar{n}$ ist die Höchstteilzahl) N. B. η': $l < \bar{n}$.

Denn $l > \bar{n}$ ist wegen der Definition der Höchstteilzahl in Hinblick auf N. B. α ausgeschlossen (da jede Funktion $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i^*$ das Grundgebiet in mindestens l Teile zerlegt). Im Falle $l = \bar{n}$ müßte die Gebietsteilung durch eine höchstteilende zu λ_n gehörige Eigenfunktion von G hervorgerufen sein derart, daß in keinem der Teilgebiete weitere Nullinien dieser Eigenfunktion verliefen. λ_n ist dann für jedes dieser Teilgebiete erster und daher einfacher Eigenwert. Daher ist wegen $\bar{n} < n$ sicher $\lambda_n^* > \lambda_{\bar{n}}^* = \lambda_n$.

Hinsichtlich der Gebietsteilung besteht also auch bei lückenloser Teilung keine Möglichkeit des Gleichheitszeichens in (6) in den Fällen $l > n$ bzw. $l \geqq \bar{n}$. Die letzten beiden Bedingungen sagen im wesentlichen, daß der Gleichheitsfall nicht zu nahe am Anfang des Spektrums eintreten kann.

Hinreichende Bedingungen (H. B.) für $\lambda_n = \lambda_n^*$.

Die für das Eintreten des Gleichheitszeichens in (6) notwendigen Bedingungen N. B. β bis N. B. η' ergaben sich als Folgerung aus N. B. α,

---

[14]) Daraus kann man nicht folgern $k = r$, denn es kommt vor, daß zwei zueinander orthogonale zum gleichen Eigenwert gehörige Eigenfunktionen desselben Gebiets gewisse Nullinien (im Gebietsinnern) gemeinsam haben: Im Beispiel ist $\lambda_{12} = \lambda_{13}$, und u_{12} und u_{13} sind zueinander orthogonal und haben das Mittellinienkreuz des Quadrates G als gemeinsame Nullinien.

[15]) Diese Bedingung ist nicht notwendig für Überdeckung der Spektren in nur einem Punkt: Es kommt $k = r$ vor, auch wenn u_n Nullinien in jedem der Teilgebiete hat: Im Beispiel ist $\lambda_{12} = \lambda_{12}^*$, $k = r = 4$, u_{12} hat in G_1 und in G_2 Nullinien.

wenn noch als gegeben angenommen wurde, daß keine Eigenfunktion von G in einem Teilgebiet von G identisch verschwinden kann (siehe S. 235). Wir zeigen jetzt, daß N. B. α' auch hinreichend ist für $\lambda_n = \lambda_n^*$:

H. B. α': *Gelte* (7), (S. 233). *Gibt es dann k zu λ_n^* gehörige Eigenfunktionen u_i^* der Teilgebiete, die sich zu einer zu λ_n gehörigen Eigenfunktion von G linear kombinieren lassen, so ist $\lambda_n = \lambda_n^*$.*

Denn für diese Linearkombination φ gelten $D[\varphi] = \lambda_n H[\varphi]$, weil φ Eigenfunktion zu λ_n ist, und $D[\varphi] = \lambda_n^* H[\varphi]$, weil die u_i^* in $\varphi = \Sigma c_i u_i^*$ zu λ_n^* gehören.

Ferner bemerken wir die

H. B. ε': *Die Gebietsteilung bestehe aus gewissen der Nullinien einer maximal teilenden Eigenfunktion von G, die zu λ_n gehört*[16]) (dann ist $\lambda_n = \lambda_n^*$).

Seien nämlich $G_1, G_2, \ldots, G_l$ die Teilgebiete und mögen diese durch die Nullinien der gemeinten Eigenfunktion zerfallen in bzw. $r_1, r_2, \ldots, r_l$ Teilgebiete ($r_i \geqq 1$, $\sum_{i=1}^{l} r_i = n$). Der Zahlwert λ_n ist nach Hilfssatz 2 für jedes der Gebiete $G_1, \ldots, G_l$ Eigenwert, und zwar wegen Corollar 1 zum Nullstellensatz für G_i zu einer r_i nicht unterschreitenden Ordnungszahl. Sei m die höchste Ordnungszahl, mit der der Zahlwert λ_n in dem zur Teilung gehörigen gemischten Spektrum vorkommt, so ist also $m \geqq \Sigma r_i = n$, also $\lambda_m^* \geqq \lambda_n^*$. Nach (6) ist $\lambda_n^* \geqq \lambda_n$; daher folgt mit $\lambda_m^* = \lambda_n$ sofort $\lambda_n = \lambda_n^*$[17]).

Bemerkungen. 1. N. B. ε ist nicht hinreichend für $\lambda_n = \lambda_n^*$: Die Einteilung bestehe aus gewissen (oder sämtlichen) Nullinien einer Eigenfunktion zu λ_n. (Dies ist jedoch H. B. ε', wenn die fragliche Eigenfunktion maximalteilend ist): Obwohl im Beispiel die Mittellinie des Quadrates Nullinie von u_8 ist, haben wir $\lambda_8 < \lambda_8^*$.

2. In N. B. α', H. B. α' haben wir betont geschrieben: ... Linearkombination von Eigenfunktionen der Teilgebiete „zu λ_n^*", und nicht „zum Wert λ_n als Eigenwert". Dazu sei bemerkt: Zwar notwendig (wegen N. B. α), aber nicht hinreichend für $\lambda_n = \lambda_n^*$ ist: Es gibt eine Linearkombination von zu dem Wert λ_n als Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen der Teilgebiete, die eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_n für

---

[16]) Dann muß, falls der Wert λ_n im Spektrum von G mehrfach ist, n die niedrigste Ordnungszahl seines Vorkommens sein.

[17]) H. B. ε' ist nicht notwendig für $\lambda_n = \lambda_n^*$, da es auch Beispiele für das Eintreten des Gleichheitsfalles bei Gebietsteilung durch nicht maximal teilende Eigenfunktionen von G gibt: Im Beispiel ist $\lambda_{12} = \lambda_{12}^*$ und u_{12} teilt G nur in acht Felder.

das Gesamtgebiet ist. Als beweisendes Beispiel nehme man eine nicht maximal teilende Eigenfunktion von G ($\bar{n} < n$). Dann werde die Gebietsteilung durch deren sämtliche Nullinien gebildet: $G_1, G_2, \ldots, G_{\bar{n}}$. Dann ist λ_n erster und daher einfacher Eigenwert für jedes der Teilgebiete, also ist wegen $\bar{n}+1 \leqq n$ $(\lambda_n =)$ $\lambda^*_{\bar{n}} < \lambda^*_{\bar{n}+1} \leqq \lambda^*_n$, folglich $\lambda_n < \lambda^*_n$.

3. Es ist nicht hinreichend für $\lambda_n = \lambda^*_n$, daß sich Eigenfunktionen zu λ^*_n linear zusammensetzen lassen zu einer Eigenfunktion für das Gesamtgebiet: Im Beispiel ergeben die Eigenfunktionen zu λ^*_5, $(=)$ λ^*_6 zusammen $u^*_5 + u^*_6 = u_8$; dennoch ist $\lambda_6 < \lambda^*_6$, $\lambda_5 < \lambda^*_5$, $(\lambda_8 < \lambda^*_8)$.

4. Man erkennt leicht, daß die anderen angegebenen notwendigen Bedingungen nicht hinreichend sind für $\lambda_n = \lambda^*_n$.

5. Es ist bisher weder gelungen, ein Beispiel mit $k < r$ zu finden, noch zu beweisen, daß stets $k = r$ ist (daß also der Gleichheitsfall immer nur einfach auftritt).

Beispiel zur Diskussion des Gleichheitszeichens in Abschnitt III.

Das Gebiet G sei ein Quadrat von der Seitenlänge π. Die Gebietsteilung entstehe durch die Mittellinie gemäß nebenstehender Figur. Es ist $G_1 + G_2 = G$. Als Eigenwertprobleme werden die gebundenen Probleme für die Gebiete G, G_1 und G_2 betrachtet, die auf die Funktionale gegründet sind:

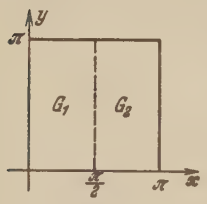


Fig. 2.

$$D[\varphi] \equiv \int\int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy; \quad H[\varphi] \equiv \int\int \varphi^2\, dx\, dy.$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen sind dann die folgenden:

$$\text{für } G\text{: } \lambda_i = n_i^2 + m_i^2; \quad u_i = \sin n_i x \cdot \sin m_i y,$$

$$\text{für } G_1\text{: } \lambda_{1,i} = 4n_i^2 + m_i^2; \quad u_{1,i} = \sin 2n_i x \cdot \sin m_i y,$$

$$\text{für } G_2\text{: } \lambda_{2,i} = 4n_i^2 + m_i^2; \quad u_{2,i} = \sin 2n_i\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin m_i y,$$

wobei n_i, m_i die ganzen Zahlen durchlaufen. Das gemischte Spektrum für G_1, G_2 entsteht durch zweimaliges Anschreiben der der Größe nach geordneten Zahlenfolge $4n_i^2 + m_i^2$. Die zugehörigen Eigenfunktionen werden

$$u^*_{2j-1} = \sin 2n_i x \sin m_i y,$$

$$u^*_{2j} = \sin 2n_i\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin m_i y,$$

für $j = 1, 2, \ldots$, $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq y \leqq \pi$; $u^*_k \equiv 0$ außerhalb dieser Gebiete.

In der folgenden Tabelle sind die beiden zu vergleichenden Spektren nebeneinander gestellt, und es ist jeweils eine Skizze der Nulllinienteilung der zugehörigen Eigenfunktionen beigefügt. (Bei mehrfachen

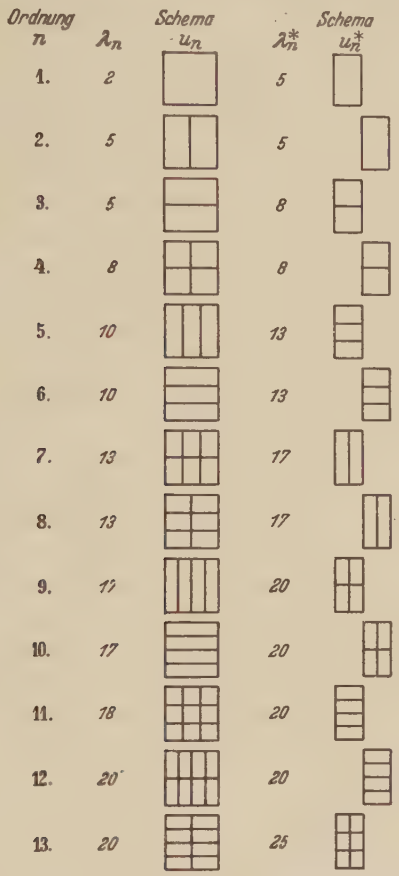


Fig. 3. Tabelle der Eigenwerte und des Schemas der Nullinien der zugehörigen Eigenfunktionen für das Beispiel zu Abschnitt III.

Eigenwerten zukommenden Ordnungszahlen ist die Reihenfolge der zugehörigen Eigenfunktionen unbestimmt). Aus der Tabelle entnehmen wir Beispiele für die im Haupttext erwähnten Vorkommnisse.

(Eingegangen am 8. Januar 1935.)

Über Irreduzibilitätskriterien von I. Schur und G. Pólya.

Herrn I. Schur zum 60. Geburtstage gewidmet.

Von

Alfred Brauer in Berlin und Richard Brauer in Princeton.

Herr I. Schur hat im Archiv der Mathematik und Physik die folgenden Aufgaben gestellt[1]): Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ voneinander verschiedene ganze rationale Zahlen; man setze

$$P(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - a_\nu).$$

Dann sind die Polynome

(1) $P(x) - 1,$

(2) $P(x) + 1$ für $n > 4,$

(3) $P^2(x) + 1,$

(4) $P^4(x) + 1$

im Körper P der rationalen Zahlen sämtlich irreduzibel. An diese Aufgaben, die Herr Schur auch in seinen Übungen zur Algebra zu stellen pflegte, knüpft eine ganze Reihe von Arbeiten an. In ihnen handelt es sich um das Problem, die Irreduzibilität eines Polynoms aus den Werten zu erschließen, die es an gewissen ganzzahligen Stellen annimmt. Zunächst bewies W. Flügel[2]) die Irreduzibilität der Polynome (1) und (2); eine Teillösung veröffentlichte auch J. Westlund[3]). Herr G. Pólya[4]) bewies das folgende allgemeine Kriterium, aus dem für $n \geqq 7$ die Irreduzibilität von (1) und (2) ebenfalls folgt:

Nimmt ein ganzzahliges Polynom n-ten Grades an n ganzzahligen Stellen Werte an, die sämtlich von 0 verschieden und absolut kleiner als $\frac{\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)!}{2^{n - \left[\frac{n}{2}\right]}}$ sind, so ist es im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel.

---

[1]) Aufgabe 226, Archiv (3) 13 (1908), S. 367 und Aufgabe 275, Archiv (3) 15 (1909), S. 259.

[2]) Lösung der Aufgabe 226, Archiv (3) 15 (1909), S. 271—272.

[3]) On the irreducibility of certain polynomials, American Mathematical Monthly 16 (1909), S. 66—67.

[4]) Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 28 (1919), S. 31—40.

Die Irreduzibilität der Polynome (3) läßt sich leicht zeigen. In einer aus den Schurschen Übungen zur Algebra hervorgegangenen Arbeit bewiesen wir gemeinsam mit Herrn H. Hopf[5]) die Irreduzibilität der Polynome (4) und

$$P^s(x) + 1. \tag{5}$$

Die Polynome (2), (3), (4) und (5) sind Spezialfälle der Polynome $G(P(x))$, wo $G(z) = z^r + 1$ ist. Ist r keine Potenz von 2, so sind diese Polynome natürlich reduzibel. Herr I. Schur vermutet, daß sie für $r = 2^s$ irreduzibel sind; für $s > 3$ ist es bisher nicht gelungen, den Beweis hierfür zu erbringen.

In unserer eben genannten Arbeit wird ferner die Irreduzibilität einiger weiterer Polynome der Form $G(P(x))$ bewiesen, wo $G(z)$ ein ganzzahliges irreduzibles Polynom ist. Insbesondere ergibt sich Irreduzibilität, wenn $G(z)$ irreduzibel und von der Form $cz^4 + 1$ mit $c > 0$ ist. Ist ferner $G(z) = c_0 z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + 1$ irreduzibel und positiv definit, so gibt es nur endlich viele wesentlich verschiedene Polynome $P(x)$, für die $G(P(x))$ reduzibel wird, falls man Polynome, die durch eine lineare Substitution auseinander hervorgehen, als nicht wesentlich verschieden rechnet. Ein Zerfallen in Faktoren ungleichen Grades tritt hierbei dann und nur dann ein, wenn $P(x)$ im wesentlichen $x^3 - x$ und $G(z)$ eins von sieben angebbaren Polynomen ist.

Durch Verschärfung des oben genannten Pólyaschen Kriteriums für den Fall definiter Polynome bewies H. Ille[6]) ebenfalls die Irreduzibilität der Polynome (4). Endlich zeigten die Herren H. L. Dorwart und O. Ore[7]), daß jedes ganzzahlige Polynom $f(x)$ vom Grade $n \geqq 8$ irreduzibel ist, das an mehr als $\frac{n}{2}$ Stellen den Wert $+1$ annimmt.

Die betrachteten Polynome haben sämtlich die Eigenschaft, den Wert ± 1 an vielen ganzzahligen Stellen anzunehmen. Man kann nun einen Schritt weitergehen und Polynome betrachten, die an vielen ganzzahligen Stellen einen Primzahlwert annehmen. Hier zeigte P. Stäckel[8]), daß

---

[5]) A. Brauer, R. Brauer und H. Hopf, Über die Irreduzibilität einiger spezieller Klassen von Polynomen, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **35** (1926), S. 99—112; vgl. auch G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II, Berlin, Springer 1925, S. 137, 347—350.

[6]) Einige Bemerkungen zu einem von G. Pólya herrührenden Irreduzibilitätskriterium, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **35** (1926), S. 204—208.

[7]) Criteria for the irreducibility of polynomials, Annals of Mathematics **34** (1933), S. 81—94.

[8]) Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen, Journ. f. d. reine und angew. Math. **148** (1918), S. 101—112.

jedes Polynom n-ten Grades in P irreduzibel ist, das an mindestens $2n+1$ ganzzahligen Stellen Primzahlwerte $\pm p_\nu$ annimmt. Dieses Resultat hat Herr O. Ore[9]) verschärft, indem er zeigte, daß jedes ganzzahlige Polynom irreduzibel ist, das an s ganzzahligen Stellen den Wert ± 1 und an t solchen Stellen einen Primzahlwert annimmt, falls

$$s+t \geqq n+3 \quad \text{für} \quad n>5$$

oder falls

$$2s+t \geqq n+5$$

ist.

Für den Fall, daß an den betrachteten Stellen überall dieselbe Primzahl angenommen wird, hat Herr G. Pólya[10]) gezeigt, daß $f(x)$ entweder irreduzibel oder das Produkt zweier irreduzibler Faktoren gleichen Grades ist, falls $f(x)$ vom Grade $n \geqq 17$ ist und an n Stellen denselben Primzahlwert annimmt. Dieser Pólyasche Satz gilt bereits für $n \geqq 7$, dagegen ist er für $n<7$ nicht mehr richtig[11]). Ob für große n ein Zerfallen in zwei Faktoren gleichen Grades eintreten kann, ist bisher unbekannt. Für $n=10$ tritt dies jedenfalls noch ein, wie Herr W. Schulz[12]) gezeigt hat.

Endlich kennt man einige Fälle, in denen Irreduzibilität eintritt, wenn der von dem Polynom oft angenommene Wert keine Primzahl, sondern eine beliebige ganze Zahl ist. Ist $G(z)$ ein ganzzahliges irreduzibles Polynom 1., 2. oder 3. Grades, so gibt es jedenfalls, wie wir gezeigt haben[13]), für jedes feste $G(z)$ höchstens endlich viele wesentlich verschiedene $P(x)$, für die $G(P(x))$ in P reduzibel wird. Letzteres gilt auch, wenn $G(z)$ vom Grade 4 oder 6 ist und in einem imaginär quadratischen Körper zerfällt. Ist speziell $n>5$ und $d \not\equiv 3 \pmod 4$ eine quadratfreie positive ganze rationale Zahl, so sind die Polynome $P^4(x)+d$, wie Herr U. Wegner[14]) gezeigt hat, stets irreduzibel. Schließlich hat Herr L. Weisner[15]) soeben den folgenden Satz ohne Beweis veröffentlicht: Das Polynom $c\,x(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \pm k$ ist im Körper der

---

[9]) Einige Bemerkungen über Irreduzibilität, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **44** (1934), S. 147—151.

[10]) A. a. O. [4]).

[11]) A. Brauer, Bemerkungen zu einem Satze von Herrn G. Pólya, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **43** (1933), S. 124—129; vgl. hierzu auch H. L. Dorwart und O. Ore a. a. O. [7]).

[12]) A. a. O. [11]).

[13]) A. a. O. [5]).

[14]) Über die Irreduzibilität einer Klasse von ganzen rationalen Funktionen, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **40** (1930), S. 239—241.

[15]) Irreducibility of polynomials of degree n which assume the same value n times, Bulletin of the American Math. Soc. **40** (1934), S. 662.

rationalen Zahlen irreduzibel, wenn wenigstens eine der folgenden n Ungleichungen erfüllt ist:

$$c > 2^n k^2, \qquad a_\nu > 4nk \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Im folgenden soll der Pólyasche Satz, daß ein Polynom n-ten Grades $f(x)$, das an n ganzzahligen Stellen die Primzahl p annimmt, in P nicht in zwei Faktoren ungleichen Grades zerfallen kann, wesentlich verschärft und verallgemeinert werden. Es ergibt sich, daß ein Zerfallen in zwei Faktoren ungleichen Grades im Körper P bereits dann nicht eintreten kann, wenn $f(x)$ an t ganzzahligen Stellen den Wert p annimmt und

$$t > \operatorname{Max}\left(\frac{2}{3}n, \frac{n+7}{2}\right) \tag{6}$$

ist. Dasselbe gilt, wenn $f(x)$ an t Stellen a_ν den Wert p^k annimmt, falls

$$f'(a_\nu) \not\equiv 0 \pmod{p} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, t)$$

ist und (6) erfüllt ist. Ferner kann $f(x)$ in P nicht in zwei Faktoren ungleichen Grades zerfallen, wenn es an t Stellen a_ν, die zu je zweien (mod p) inkongruent sind, den Wert p^k annimmt und

$$t > \operatorname{Max}\left(\frac{4}{5}n, \frac{n+7}{2}, \frac{2}{3}n + 2\right)$$

ist. Sind aber von den Stellen a_ν mindestens zwei kongruent (mod p), so tritt Irreduzibilität im Körper P ein, falls

$$t > \frac{n}{2} + \frac{k^2 + 3k}{2} + 3$$

und $p > 2^{k+2}$ ist. Endlich wird gezeigt, daß $f(x)$ in P nicht in zwei Faktoren ungleichen Grades zerfällt, falls es an n ganzzahligen Stellen einen Wert annimmt, der ein Teiler von p^k ist und $n > 12k(2k^2 + 4k + 1)$ ist.

§ 1.

Es soll zunächst der folgende Hilfssatz bewiesen werden:

Hilfssatz 1. *Es sei $k \geqq 0$ eine ganze Zahl, p eine ungerade Primzahl. Nimmt das ganzzahlige Polynom $h(x)$ den Wert $\pm p^k$ an u ganzzahligen Stellen an und treten beide Vorzeichen wirklich auf, so ist*

$$u \leqq 3 + \sqrt{4k+1}.$$

Beweis. $h(x)$ nehme den Wert p^k an den ganzzahligen Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_v$ und den Wert $-p^k$ an den ganzzahligen Stellen $b_1, b_2, \ldots, b_w$ an. Dann ist

$$h(x) + p^k = \prod_{\nu=1}^{w} (x - b_\nu)\, \psi(x),$$

wo $\psi(x)$ ein ganzzahliges Polynom ist. Für $x = a_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, v)$ ergibt sich

$$2p^k = \prod_{\nu=1}^{w} (a_\mu - b_\nu)\, \psi(a_\mu). \tag{7}$$

Für $\mu = 1, 2, \ldots, v$ ist also $\prod_{\nu=1}^{w} (a_\mu - b_\nu)$ ein Teiler von $2p^k$. Analog folgt, daß für $\nu = 1, 2, \ldots, w$ das Produkt $\prod_{\mu=1}^{v} (b_\nu - a_\mu)$ ein Teiler von $2p^k$ ist.

Man muß jetzt zwei Fälle unterscheiden:

1. Eine der beiden Zahlen v und w ist 1, etwa $v = 1$.

Es genügt, $w \geqq 4$ anzunehmen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_1 = 0$ gewählt werden. Nach (7) ist dann $b_1 b_2 \ldots b_w$ ein Teiler von $2p^k$. Daher kann nur ein b_ν, etwa b_w, gerade sein; die übrigen sind von der Form $\pm p^\lambda$ $(\lambda \geqq 0)$; es sei etwa $b_\nu = \pm p^{\lambda_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, w-1)$. Dann ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{w-1} \leqq k.$$

Jedes feste λ kann höchstens zweimal auftreten; daher ist für ungerades w

$$2\left(0 + 1 + 2 + \ldots + \frac{w-3}{2}\right) \leqq k,$$

$$\frac{w-3}{2}\left(\frac{w-3}{2} + 1\right) = \frac{(w-2)^2 - 1}{4} \leqq k.$$

Ebenso erhält man für gerades w

$$2\left(0 + 1 + \ldots + \frac{w-4}{2}\right) + \frac{w-2}{2} = \left(\frac{w-2}{2}\right)^2 \leqq k.$$

Also ist in beiden Fällen

$$w - 2 \leqq \sqrt{4k+1},$$

$$u = v + w \leqq 3 + \sqrt{4k+1}.$$

2. Es ist $v \geqq 2$ und $w \geqq 2$.

Es genügt, $u > 4$ anzunehmen, da $4 \leqq 3 + \sqrt{4k+1}$ ist. Wegen (7) könnte (mod 2) jedes a_μ höchstens einem b_ν und jedes b_ν höchstens einem a_μ kongruent sein. Da $v \geqq 2$, $w \geqq 2$ und $v + w > 4$ ist, sind alle a_μ untereinander (mod 2) kongruent und zu allen b_ν inkongruent. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $w \geqq v$ und $a_1 = 0$ annehmen. Ferner setze man $a_2 = p^\lambda a_2'$ mit $(a_2', p) = 1$. Dann ist wegen (7) und $b_\nu \not\equiv a_1 \pmod 2$

$$b_\nu = \eta_\nu p^{\beta_\nu} \qquad (\eta_\nu = \pm 1;\ \nu = 1, 2, \ldots, w). \tag{8}$$

Analog folgt wegen (7) und $b_\nu \not\equiv a_2 \pmod 2$

$$a_2 - b_\nu = \zeta_\nu p^{\gamma_\nu} \qquad (\zeta_\nu = \pm 1;\ \nu = 1, 2, \ldots, w). \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt dann

$$(10) \qquad \zeta_\nu p^{\gamma_\nu} = p^\lambda a_2' - \eta_\nu p^{\beta_\nu} = \begin{cases} p^\lambda (a_2' - \eta_\nu) & \text{für } \beta_\nu = \lambda, \\ p^\lambda (a_2' - \eta_\nu p^{\beta_\nu - \lambda}) & \text{für } \beta_\nu > \lambda, \\ p^{\beta_\nu} (a_2' p^{\lambda - \beta_\nu} - \eta_\nu) & \text{für } \beta_\nu < \lambda. \end{cases}$$

Gleichung (10) ist nur möglich, wenn die Klammern auf der rechten Seite, abgesehen vom Vorzeichen, eine Potenz von p oder gleich 1 sind. Daher ist der Fall $\beta_\nu < \lambda$ unmöglich. Da a_2' und λ fest sind, kann der Fall $\beta_\nu > \lambda$ höchstens für ein b_ν erfüllt sein, da $a_2' - \eta_\nu p^{\beta_\nu - \lambda} \not\equiv 0 \pmod p$ ist. Ferner kann es höchstens zwei Werte b_ν geben, für die $\beta_\nu = \lambda$ ist, nämlich $b_\nu = \pm p^\lambda$. Diese beiden Werte können gleichzeitig nur dann auftreten, wenn von den beiden Werten $a_2' \pm 1$ der eine ± 1, der andere eine Potenz von p ist. Dies ist nur für $a_2' = \pm 2$, $p = 3$ und $k \geqq 1$ möglich. Folglich ist für $p > 3$ hier $w \leqq 2$ und wegen $v \leqq w$ auch $v \leqq 2$, also $u = v + w \leqq 4$ entgegen der Annahme.

Ist $p = 3$ und $w = 3$, also $a_2 = \pm 2 \cdot 3^\lambda$ und $b_1 = \pm 3^{\lambda+1}$, $b_2 = +3^\lambda$, $b_3 = -3^\lambda$, so könnte nur dann auch $v = 3$ sein, wenn $a_3 = \mp 2 \cdot 3^\lambda$ ist. Das ist aber unmöglich, da $a_2 - b_1$ oder $a_3 - b_1$ durch 5 teilbar wäre. Für $p = 3$ ist daher

$$u \leqq 5 < 3 + \sqrt{4k+1},$$

da $k \geqq 1$ ist. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Zusatz. *Sind die im Hilfssatz* 1 *betrachteten Stellen* (mod p) *inkongruent, so ist* $u \leqq 4$. *Sind niemals drei von ihnen untereinander* (mod p) *kongruent, so ist* $u \leqq 5$. *Sind schließlich niemals drei von ihnen* (mod p^2) *kongruent, so ist* $u \leqq 7$.

Beweis. Tritt von den beim Beweise des Hilfssatzes 1 genannten Fällen der erste ein, so ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung durch unmittelbare Abzählung. Im zweiten Falle ist $u = 4$ für $p > 3$. Für $p = 3$ kann $u = 5$ sein, aber diese Stellen sind dann natürlich nicht alle inkongruent (mod 3).

§ 2.

Satz 1. *Nimmt das ganzzahlige Polynom* $f(x)$ *vom Grade* $n \geqq 13$ *die Primzahlpotenz* p^k *an mehr als* $\frac{4}{5} n$ *ganzzahligen Stellen* a_ν *an, die zu je zweien* (mod p) *inkongruent sind, so ist* $f(x)$ *im Körper der rationalen Zahlen entweder irreduzibel oder das Produkt zweier irreduzibler Faktoren gleichen Grades.*

Beweis. Es sei $f(x)$ das Produkt zweier ganzzahligen Faktoren

$$(11) \qquad f(x) = g(x) G(x),$$

wo $G(x)$ den Grad M und $g(x)$ den Grad m hat, $(M \geqq m)$, dann ist wegen $n = M + m$

$$m \leqq \frac{n}{2}. \tag{12}$$

An α der gegebenen Stellen a_ν sei $g(x) = \pm 1$, an β Stellen sei $g(x) = \pm p^\varkappa$ mit $0 < \varkappa < k$ und an γ Stellen sei $g(x) = \pm p^k$. Ist t die Anzahl der gegebenen Stellen, so ist also

$$t = \alpha + \beta + \gamma > \tfrac{4}{5} n. \tag{13}$$

An den Stellen der zweiten und dritten Art ist $g(x) \equiv 0 \pmod p$. Da die Stellen inkongruent sind und man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, daß in $f(x)$ und also auch in $g(x)$ nicht alle Koeffizienten durch p teilbar sind, ist folglich

$$\beta + \gamma \leqq m. \tag{14}$$

Analog ist wegen (11) an den Stellen der ersten beiden Arten

$$G(a_\nu) = \frac{p^k}{g(a_\nu)} \equiv 0 \pmod p,$$

also

$$\alpha + \beta \leqq M. \tag{15}$$

Man muß nun drei Fälle unterscheiden:

1. Es nehme $g(x)$ an allen Stellen erster Art denselben Wert c ($c = +1$ oder $c = -1$) und an allen Stellen dritter Art denselben Wert d ($d = +p^k$ oder $d = -p^k$) an.

Dann verschwindet an den $\alpha + \gamma$ Stellen erster und dritter Art das Polynom

$$H(x) = G(x) + \frac{p^k}{c\,d}\, g(x) - \frac{p^k}{c} - \frac{p^k}{d}. \tag{16}$$

Ist $H(x)$ identisch Null, so sind die Faktoren $G(x)$ und $g(x)$ von $f(x)$ vom gleichen Grade $\frac{n}{2}$. Verschwindet $H(x)$ nicht identisch, so ist sein Grad M und also

$$\alpha + \gamma \leqq M. \tag{17}$$

Da schließlich $g(x)$ an den Stellen erster Art denselben Wert c annimmt, ist

$$\alpha \leqq m. \tag{18}$$

Daher ergibt sich aus (14), (15), (17) und (18)

$$\begin{aligned} 5\,t = 5(\alpha + \beta + \gamma) &= \alpha + 2(\alpha + \beta) + 2(\alpha + \gamma) + 3(\beta + \gamma) \\ &\leqq m + 2M + 2M + 3m = 4n \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (13); dieser Fall ist also unmöglich.

2. Kommt unter den Werten $g(a_\nu)$ sowohl $+1$ wie -1 vor, so ist nach Hilfssatz 1 für $k = 0$

$$\alpha \leqq 4. \tag{19}$$

Dann folgt aus (14), (19) und (12)

$$t = \alpha + \beta + \gamma \leqq 4 + m \leqq 4 + \frac{n}{2}. \tag{20}$$

Für $n \geqq 13$ ergibt sich hieraus, da t ganz ist, ein Widerspruch zu (13).

3. Kommt unter den Werten $g(a_\nu)$ nicht ± 1, aber sowohl $+p^k$ wie $-p^k$, also unter den Werten $G(a_\nu)$ sowohl $+1$ wie -1 vor, so ist nach Hilfssatz 1, angewandt auf $G(x)$,

$$\gamma \leqq 4. \tag{21}$$

Ist hier $\gamma = 4$, nimmt also $G(x)$ den Wert ± 1 an vier der Stellen a_ν an, etwa an den Stellen $a_1' < a_2' < a_3' < a_4'$, so müssen diese Stellen vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen sein. Da nämlich eine ganzzahlige Stelle, an der $G(x)$ den Wert $+1$ annimmt, von einer solchen, an der es den Wert -1 annimmt, höchstens um 2 entfernt sein kann, ist $G(a_1') = G(a_4')$. Für mindestens eine der beiden Stellen a_2' und a_3', etwa für a_2', ist dann $G(a_2') = -G(a_1')$. Wegen $a_4' - a_2' = 2$ ist $a_4' - a_3' = a_3' - a_2' = 1$. Nach (7) muß $(a_4' - a_2')(a_1' - a_2') = 2(a_1' - a_2')$ ein Teiler von 2 sein, also ist auch $a_2' - a_1' = 1$. Die Zahlen a_1', a_2', a_3', a_4' sind also vier aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Ferner bilden die Zahlen $G(a_1'), G(a_2'), G(a_3'), G(a_4')$ und daher nach (11) auch die Zahlen $g(a_1'), g(a_2'), g(a_3'), g(a_4')$ zwei Zeichenwechsel. Da $g(x)$ an diesen Stellen den Wert $\pm p^k$ annimmt, muß $g(x)$ im Innern des Intervalls $\{a_1' \ldots a_4'\}$ an mindestens zwei Stellen den Wert $+1$ und an mindestens zwei Stellen den Wert -1 annehmen. Diese Stellen sind von a_1', a_2', a_3', a_4' verschieden und also nicht ganzzahlig. Daher kann $g(x)$ höchstens an $m - 2$ ganzzahligen Stellen den Wert $+1$ oder den Wert -1 annehmen. Daher ist

$$\alpha \leqq m - 2 \quad \text{für} \quad \gamma = 4. \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgt daher

$$\alpha + 2\gamma \leqq m + 6. \tag{23}$$

Wegen (18) gilt (23) auch für $\gamma \leqq 3$. Daher erhält man aus (14), (15) und (23)

$$\begin{aligned} 3t = 3(\alpha + \beta + \gamma) &= (\alpha + 2\gamma) + (\beta + \gamma) + 2(\alpha + \beta) \\ &\leqq m + 6 + m + 2M = 2n + 6, \end{aligned}$$

$$t \leqq [\tfrac{2}{3} n] + 2. \tag{24}$$

Für $n \geqq 13$ ergibt sich hieraus wieder ein Widerspruch zu (13). Damit ist Satz 1 bewiesen.

Zusatz. *Tritt für $n \geqq 13$ eine Zerlegung in Faktoren gleichen Grades $G(x)$ und $g(x)$ ein, so ist wegen* (16)

$$G(x) = -\frac{p^k}{cd} g(x) + \frac{p^k}{c} + \frac{p^k}{d} \quad (c = \pm 1, \quad d = \pm p^k).$$

Schließt man den Fall der Zerlegung in Faktoren gleichen Grades aus, so läßt sich (20) ersetzen durch

$$t \leqq 4 + m \leqq 4 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+7}{2}. \tag{25}$$

Daher läßt sich Satz 1 wegen (24) und (25) auch folgendermaßen formulieren:

Satz 1a). *Nimmt das ganzzahlige Polynom n-ten Grades $f(x)$ die Primzahlpotenz p^k an t ganzzahligen Stellen an, die zu je zweien* (mod p) *inkongruent sind, ist*

$$t > \mathrm{Max}\left(\frac{4}{5}n, \frac{n+7}{2}, \frac{2}{3}n + 2\right),$$

so kann $f(x)$ nicht in zwei Faktoren ungleichen Grades zerfallen.

Für $k = 0$ wird $\beta = \gamma = 0$ und $t = \alpha$. Daher ergibt sich wegen (18) und (19)

Satz 2. *Ist $n \geqq 8$, nimmt das ganzzahlige Polynom n-ten Grades $f(x)$ den Wert ± 1 an mehr als $\frac{n}{2}$ ganzzahligen Stellen an, so ist $f(x)$ irreduzibel oder das Produkt zweier irreduzibler Polynome gleichen Grades.*

Dieses Resultat findet sich bereits bei Dorwart und Ore [16]).

Ist $k = 1$, so ist $\beta = 0$ und $t = \alpha + \gamma$. Liegt nun der erste der beim Beweise des Satzes 1 unterschiedenen Fälle vor, so ist, wenn beide Faktoren verschiedenen Grad haben,

$$\gamma \leqq m \leqq \frac{n-1}{2} \tag{26}$$

da $g(x)$ an γ Stellen denselben Wert annimmt. Aus (18), (26) und (17) folgt dann

$$3t = 3(\alpha + \gamma) = \alpha + \gamma + 2(\alpha + \gamma) \leqq m + m + 2M = 2n,$$

$$t \leqq \frac{2}{3}n. \tag{27}$$

Liegt aber der zweite oder der dritte Fall vor, so folgt aus (19) und (26) bzw. aus (21) und (18)

$$t = \alpha + \gamma \leqq \frac{n+7}{2}. \tag{28}$$

Aus (27) und (28) erhält man die folgende Verschärfung des Pólyaschen Satzes da kein Gebrauch davon gemacht wurde, daß die a_ν (mod p) inkongruent sind:

[16]) A. a. O. [7]).

Satz 3. *Nimmt das ganzzahlige Polynom n-ten Grades $f(x)$ die Primzahl p an t ganzzahligen Stellen an, ist*

$$t > \text{Max}\left(\frac{2}{3}n, \frac{n+7}{2}\right),$$

so ist $f(x)$ irreduzibel oder das Produkt zweier irreduzibler Faktoren gleichen Grades[17]).

Satz 4. *Nimmt das ganzzahlige Polynom n-ten Grades $f(x)$ die Primzahlpotenz p^k an t ganzzahligen Stellen a_ν an, ist*

$$f'(a_\nu) \not\equiv 0 \pmod{p} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, t \tag{29}$$

und

$$t > \text{Max}\left(\frac{2}{3}n, \frac{n+7}{2}\right),$$

so ist $f(x)$ irreduzibel oder das Produkt zweier irreduzibler Polynome gleichen Grades.

Beweis. Wäre in den Bezeichnungen des Satzes 1 die Zahl $\beta > 0$, so gäbe es Stellen a_ν, für die

$$g(a_\nu) \equiv G(a_\nu) \equiv 0 \pmod{p}$$

wäre. Dann wäre aber wegen (11) auch

$$f'(a_\nu) = g(a_\nu)\, G'(a_\nu) + G(a_\nu)\, g'(a_\nu) \equiv 0 \pmod{p}$$

im Widerspruch zu (29). Also ist $\beta = 0$ und die Behauptung folgt aus (27) und (28).

Die Sätze 1, 3 und 4 lassen sich auch folgendermaßen formulieren: *Die Polynome*

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_t)\, \psi(x) + p^k,$$

wo $\psi(x)$ ein beliebiges ganzzahliges Polynom des Grades $n - t$ ist, sind irreduzibel oder das Produkt zweier irreduzibler Polynome gleichen Grades, falls je zwei der $a_\nu \pmod{p}$ inkongruent sind und

$$t > \text{Max}\left(\frac{4}{5}n, \frac{n+7}{2}, \frac{2}{3}n + 2\right)$$

ist oder falls (6) *erfüllt ist und entweder $k = 1$ ist oder* (29) *gilt.*

§ 3.

Allgemein läßt sich der Satz 3 nicht mehr verschärfen. Aus jedem Polynom, das den Bedingungen des Pólyaschen Satzes genügt und in zwei Faktoren gleichen Grades zerfällt, erhält man unendlich viele Polynome n-ten Grades, die an $\frac{2}{3}n$ ganzzahligen Stellen die Primzahl p annehmen und in zwei Faktoren ungleichen Grades zerfallen. So liefert

[17]) Für $n = 7$ gilt dies bereits für $t = 7$, vgl. A. Brauer, a. a. O. [11]).

das oben erwähnte Beispiel des Herrn W. Schulz[18]) für jedes ganzzahlige c die Polynome 15. Grades

$$\{x(x-6)(x-8)(x-17)(x-19)-10079\}$$
$$\{(x-1)(x-3)(x-12)(x-14)(x-20)+10079$$
$$+cx(x-1)(x-3)(x-6)(x-8)(x-12)(x-14)(x-17)(x-19)(x-20)\},$$
$$\{(x-1)(x-3)(x-12)(x-14)(x-20)+10079\}$$
$$\{x(x-6)(x-8)(x-17)(x-19)-10079$$
$$+cx(x-1)(x-3)(x-6)(x-8)(x-12)(x-14)(x-17)(x-19)(x-20)\},$$

die an zehn ganzzahligen Stellen die Primzahl 10079 annehmen.

Setzt man nun aber voraus, daß von den Stellen a_ν mindestens zwei (mod p) kongruent sind, so läßt sich der Satz 3 verschärfen. Insbesondere ergibt sich, daß unter geeigneten Voraussetzungen ein Zerfallen in Faktoren gleichen Grades nicht mehr eintreten kann. Es gilt

Satz 5. *Nimmt das ganzzahlige Polynom n-ten Grades $f(x)$ die Primzahl $p > 5$ an t ganzzahligen Stellen an, von denen mindestens zwei* (mod p) *kongruent sind, ist*

$$t > \mathrm{Max}\left(\frac{n}{2}, 4\right),$$

so ist $f(x)$ im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel.

Beweis. Wäre

$$f(x) = g(x)G(x),$$

so könnten an den Stellen a_ν die Polynome $g(x)$ und $G(x)$ nur die Werte ± 1, $\pm p$ annehmen. Wegen $t > \frac{n}{2}$ könnte jedes dieser Polynome nicht an den t Stellen denselben Wert annehmen; wegen $t > 4$ könnte nach Hilfssatz 1 keines der Polynome an den t Stellen nur die Werte ± 1 annehmen. Jedes der Polynome nimmt daher an diesen Stellen absolut genommen sowohl den Wert p als auch den Wert 1 an. Es seien nun r und s $(r < s)$ zwei (mod p) kongruente a_ν. Dann ist

$$g(r) \equiv g(s) \pmod{p} \tag{30}$$

und

$$G(r) \equiv G(s) \pmod{p}.$$

Entweder ist nun $|g(r)|$ oder $|G(r)| \equiv 1 \pmod{p}$. Ist $|g(r)| \equiv 1 \pmod{p}$, so folgt wegen $p \neq 2$ aus (30)

$$g(r) = g(s) \tag{31}$$

und daher auch

$$G(r) = G(s); \tag{32}$$

analog folgt (31) und (32) für $|G(r)| \equiv 1 \pmod{p}$.

[18]) A. a. O. [12]).

Eins der Polynome $\pm g(x)$, $\pm G(x)$, etwa $g(x)$, nimmt also an den Stellen r und s den Wert p an. Nach dem Obigen muß dann $g(x)$ an mindestens einer der Stellen a_ν den Wert $\varepsilon = \pm 1$ annehmen. Es sei a' eine solche Stelle. Da $(s-a')(r-a')$ ein Teiler von $p+\varepsilon$ sein muß, ist $|s-a'|$ oder $|r-a'| = 1$. Anderenfalls wäre wegen $p > 5$

$$|s-a'|\,|r-a'| \geqq 2(p-2) > p+1,$$

was unmöglich ist. Folglich kämen für a' nur die Werte $r-1$, $r+1$, $s-1$ und $s+1$ in Frage. Nur an diesen Stellen könnte $g(x)$ den Wert ± 1 annehmen. Eine leichte Diskussion ergibt, daß gleichzeitig höchstens an zwei dieser Stellen $g(x) = \pm 1$ sein kann.

Ist also t_1 die Anzahl der Stellen a_ν, für die $g(x) = \pm 1$ ist, und t_2 die Anzahl der übrigen a_ν, so ist

$$t_1 \leqq 2.$$

Da $g(r) = g(s) = p$, also $G(r) = G(s) = 1$ ist, kann nicht $G(a_\nu) = -1$ für irgendein a_ν sein, da wegen $p > 5$ jedes a_ν von r oder von s um mehr als 2 entfernt ist. An den Stellen a_ν nimmt also $g(x)$ von den Werten $\pm p$ nur den Wert $+p$ an. Diesen Wert kann $g(x)$ außer an den Stellen r und s höchstens noch an einer Stelle b annehmen, denn für jedes a' muß wegen $g(a') = \varepsilon$ das Produkt $(a'-r)(a'-s)(a'-b)$ ein Teiler von $p+\varepsilon$ sein. Da $|(a'-r)(a'-s)| \geqq p-1$ ist, muß $|a'-b| = 1$ sein. Andererseits war einer der beiden Faktoren $|a'-r|$ oder $|a'-s|$ gleich 1, daher kommt für b höchstens ein Wert in Frage, und zwar existiert wegen $p > 5$ ein solches b höchstens dann, wenn es nur einen Wert a' gibt, also $t_1 = 1$ ist. Daher ist $t_2 \leqq 3$ für $t_1 = 1$ und $t_2 \leqq 2$ für $t_1 = 2$, also $t = t_1 + t_2 \leqq 4$ gegen die Voraussetzung. Folglich ist $f(x)$ irreduzibel.

Bemerkung. Ein analoger Satz gilt auch für $p = 2$, 3 und 5.

§ 4.

Im Satz 1 war vorausgesetzt worden, daß von den Stellen a_ν je zwei (mod p) zueinander inkongruent sind. Um nun auch den Fall zu behandeln, daß unter diesen Stellen kongruente auftreten, sollen zunächst zwei Hilfssätze bewiesen werden.

Hilfssatz 2. *Es seien r und s voneinander verschiedene nichtnegative ganze Zahlen, $z = |r-s|$ und $p > 2^{z+2}$ eine Primzahl. Das ganzzahlige Polynom $h(x)$ nehme an gewissen ganzzahligen Stellen a_ν den Wert p^r und an einer weiteren ganzzahligen Stelle b den Wert $\pm p^s$ an. Ferner sei N_1 die Anzahl der zu b (mod p) kongruenten a_ν und $N_2(y)$ für positives y die*

Anzahl derjenigen a_ν, die zu $b \pmod p$ inkongruent und von b um mindestens y entfernt sind. Dann ist

$$N_1 = \operatorname{Min}(r, s); \tag{33}$$

$$N_2\left(\frac{p}{2}\right) \leqq z, \tag{34a}$$

$$N_2\left(\frac{p}{4}\right) \leqq z+1, \tag{34b}$$

$$N_2\left(\frac{p^2}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}z. \tag{34c}$$

Beweis. Es ist

$$h(x) - p^r = \prod_\nu (x - a_\nu)\,\psi(x),$$

wo $\psi(x)$ ganzzahlig ist; also ist für $x = b$

$$\pm p^s - p^r = \prod_\nu (b - a_\nu)\,\psi(b) \neq 0.$$

Daher ist

$$\prod_\nu (b - a_\nu) \mid (p^s \pm p^r). \tag{35}$$

Hieraus ergibt sich (33) unmittelbar.

Weiter folgt aus (35)

$$\prod_{a_\nu \not\equiv b \pmod p} (b - a_\nu) \mid (p^z \pm 1). \tag{36}$$

Da die Differenzen $b - a_\nu$ ganze Zahlen sind und für ein festes b höchstens je zwei dieser Differenzen absolut gleich sein können, muß wegen (36) für jedes y

$$y \cdot y(y+1)(y+1)(y+2)(y+2)\ldots\left(y + \left[\tfrac{1}{2}N_2(y) - \tfrac{1}{2}\right]\right) \leqq p^z + 1 \tag{37}$$

sein, wo die Anzahl der Faktoren auf der linken Seite $N_2(y)$ ist, also ist erst recht

$$y^{N_2(y)} \leqq p^z + 1. \tag{38}$$

Nun ist aber wegen $p > 2^{z+2}$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{z+1} = p^z \frac{p}{2^{z+1}} > p^z + 1.$$

Also folgt für $y = \frac{p}{2}$ wegen (38)

$$N_2\left(\frac{p}{2}\right) < z+1.$$

Damit ist (34a) bewiesen. Ferner ist wegen $z \geqq 1$

$$\left(\frac{p}{4}\right)^{z+1}\left(\frac{p}{4}+1\right) = p^z \frac{p}{4^{z+1}}\left(\frac{p}{4}+1\right) > p^z \frac{2^{z+2}}{2^{2z+2}}\left(\frac{2^{z+2}}{2^2}+1\right)$$

$$= p^z \frac{1}{2^z}(2^z+1) > p^z + 1.$$

Daher ist wegen (37)

$$N_2\left(\frac{p}{4}\right) \leqq (z+1),$$

also ist (34 b) bewiesen. Endlich gilt auch (34 c), denn es ist

$$\left(\frac{p^2}{2}\right)^{\frac{s+1}{2}} = p^s \frac{p}{2^{\frac{s+1}{2}}} > p^s + 1.$$

Hilfssatz 3. *Es sei k eine positive ganze Zahl, ϱ ganz und $0 \leqq \varrho \leqq k$, ferner ω positiv. Man setze*

$$S_\varrho = \sum_{\varkappa=0}^{k} \operatorname{Max}(\omega, |\varkappa - \varrho|).$$

Dann ist

$$S_\varrho = S_{k-\varrho} \tag{39}$$

und für $\varrho + 1 \leqq \frac{k}{2}$ gilt

$$S_\varrho \geqq S_{\varrho+1}. \tag{40}$$

Beweis. (39) ergibt sich, wenn man in der Summe $k - \varkappa$ als neuen Summationsindex einführt. Weiter ist

$$S_{\varrho+1} = \sum_{\varkappa=0}^{k} \operatorname{Max}(\omega, |\varkappa - \varrho - 1|) = \sum_{\varkappa=0}^{k} \{\operatorname{Max}(\omega, |\varkappa - \varrho|)\}$$
$$- \operatorname{Max}(\omega, k - \varrho) + \operatorname{Max}(\omega, |-\varrho - 1|),$$
$$S_\varrho - S_{\varrho+1} = \operatorname{Max}(\omega, k - \varrho) - \operatorname{Max}(\omega, \varrho + 1).$$

Wegen $\varrho + 1 \leqq \frac{k}{2}$ ist $2\varrho + 2 \leqq k$ und also $\varrho + 1 < k - \varrho$. Daher ist die Differenz nichtnegativ und (40) ist bewiesen.

§ 5.

Satz 6. *Es sei $k \geqq 1$ eine positive ganze Zahl und $p > 2^{k+2}$ eine Primzahl. Nimmt das ganzzahlige Polynom $f(x)$ vom Grade n den Wert p^k an mehr als $\frac{n}{2} + \frac{k^2+3k}{2} + 3$ ganzzahligen Stellen a_ν an, von denen mindestens zwei (mod p) kongruent sind, so ist $f(x)$ im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel.*

Beweis. Für $k = 1$ folgt die Behauptung aus Satz 5; es sei also $k > 1$. Angenommen, es sei $f(x)$ reduzibel,

$$f(x) = g(x)G(x),$$

wo $g(x)$ den Grad $m \leqq \frac{n}{2}$ besitze. Man verteile die Stellen a_ν auf $k + 1$ Klassen $\mathfrak{K}_\varkappa (\varkappa = 0, 1, \ldots, k)$ derart, daß a_ν zu $\mathfrak{K}_\varkappa$ gehört, wenn $g(a_\nu) = \pm p^\varkappa$ ist. Tritt in $\mathfrak{K}_\varkappa$ hier immer nur dasselbe Vorzeichen auf, so heiße $\mathfrak{K}_\varkappa$ eine Klasse erster Art, sonst eine Klasse zweiter Art. Die Anzahl der Elemente in $\mathfrak{K}_\varkappa$ sei $\alpha_\varkappa$ $(\alpha_\varkappa \geqq 0)$.

Eine Stelle von $\mathfrak{K}_0$ kann zu einer Stelle einer anderen Klasse (mod p) nicht kongruent sein, da $g(x)$ für beide Stellen (mod p) inkongruente

Werte annimmt. Durch Betrachtung von $G(x)$ folgt das gleiche für die Klasse $\mathfrak{K}_k$.

Man hat nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Es gibt eine Klasse $\mathfrak{K}_\varrho$ derart, daß die nicht zu $\mathfrak{K}_\varrho$ gehörigen Stellen a_ν einem Intervall J der Länge $\frac{p}{2}$ angehören.

Nach Voraussetzung gibt es (mod p) kongruente Stellen a_ν; es seien r und s zwei solche Stellen. Mindestens eine von ihnen, etwa r, muß von J einen Abstand $d \geqq \frac{p}{4}$ haben; r gehört dann notwendig zu $\mathfrak{K}_\varrho$. Ist $\mathfrak{K}_\varkappa$ eine von $\mathfrak{K}_\varrho$ verschiedene Klasse zweiter Art, so muß nach dem Zusatz zu Hilfssatz 1

$$\alpha_\varkappa \leqq 4 \tag{41}$$

sein, da zwei Zahlen a_ν aus $\mathfrak{K}_\varkappa$ als Zahlen aus J inkongruent (mod p) sind. Ist $\mathfrak{K}_\varkappa$ von der ersten Art, so ergibt der Hilfssatz 2, angewandt auf $g(x)$ oder $-g(x)$, daß die Anzahl der zu r inkongruenten Stellen a_ν aus $\mathfrak{K}_\varkappa$ höchstens

$$|\varrho - \varkappa| + 1 \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, k;\ \varkappa \neq \varrho) \tag{42}$$

beträgt, da sie von r sämtlich um mindestens $\frac{p}{4}$ entfernt sind. In J kann höchstens eine zu r (mod p) kongruente Stelle a_ν liegen. Tritt eine solche Stelle auf, so ist J von r um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernt; nach Hilfssatz 2 kann man daher (42) durch

$$|\varrho - \varkappa| \tag{43}$$

ersetzen. Daher ist im letzteren Fall wegen (41) und (43)

$$\sum_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\varrho}}^{k} \alpha_\varkappa \leqq 1 + \sum_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\varrho}}^{k} \mathrm{Max}\,(4, |\varrho - \varkappa|) \tag{44}$$

und sonst wegen (41) und (42)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\varrho}}^{k} \alpha_\varkappa &\leqq \sum_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\varrho}}^{k} \mathrm{Max}\,(4, |\varrho - \varkappa| + 1) = k + \sum_{\substack{\varkappa=0\\ \varkappa\neq\varrho}}^{k} \mathrm{Max}\,(3, |\varrho - \varkappa|) \\ &= k - 3 + \sum_{\varkappa=0}^{k} \mathrm{Max}\,(3, |\varrho - \varkappa|). \end{aligned} \tag{45}$$

Die Summen auf der rechten Seite von (44) und (45) nehmen nach Hilfssatz 3 ihren größten Wert für $\varkappa = 0$ und für $\varkappa = k$ an. In (44) kann die 1 vor der Summe fortgelassen werden, falls in der Summe überall die 4 genommen werden muß, da dann jede von $\mathfrak{K}_\varrho$ verschiedene Klasse

höchstens vier Stellen a_ν enthält. Daher genügt es, (45) zu betrachten. Man findet daher für $k \geqq 3$

$$(46) \quad \sum_{\substack{\varkappa=0 \\ \varkappa \neq \varrho}}^{k} \alpha_\varkappa \leqq k-3+\sum_{\varkappa=0}^{k} \mathrm{Max}\,(3,\varkappa) = k-3+9+\sum_{\varkappa=3}^{k} \varkappa = \frac{k^2+3k}{2}+3.$$

Diese Abschätzung gilt auch für $k = 2$, wie sich aus (45) direkt ergibt.

Ist nun $\mathfrak{K}_\varrho$ von der ersten Art, so ist α_ϱ höchstens gleich dem Grad m von $g(x)$, also $\alpha_\varrho \leqq \frac{n}{2}$. Für die Gesamtanzahl t aller Stellen a_ν findet man daher aus (46)

$$(47) \quad t \leqq \frac{n}{2}+\frac{k^2+3k}{2}+3.$$

Ist aber $\mathfrak{K}_\varrho$ von der zweiten Art, so ist nach Hilfssatz 1

$$\alpha_\varrho \leqq \sqrt{4\varrho+1}+3 \leqq \sqrt{4k+1}+3,$$

also wegen (46)

$$(48) \quad t \leqq \sqrt{4k+1}+3+\frac{k^2+3k}{2}+3 \leqq 2\left(\frac{k^2+3k}{2}+3\right).$$

Anderseits ist

$$(49) \quad t \leqq n,$$

da $f(x)$ vom Grade n ist und an t Stellen denselben Wert p^k annimmt. Aus (48) und (49) folgt

$$2t \leqq n+2\left(\frac{k^2+3k}{2}+3\right).$$

Also gilt auch hier (47). Nun widerspricht aber (47) der Voraussetzung. Daher ist der erste Fall unmöglich.

2. Außerhalb jeder Klasse $\mathfrak{K}_\varrho$ gibt es zwei Stellen a_ν, die um mehr als $\frac{p}{2}$ entfernt sind.

Um eine gute Abschätzung zu erhalten, muß man hier mehrere Unterfälle unterscheiden:

a) Keine Klasse $\mathfrak{K}_\varrho$ enthält zwei (mod p) kongruente Stellen a_ν.

Nach Voraussetzung gibt es zwei (mod p) kongruente Zahlen r und s unter den a_ν, die also zu verschiedenen Klassen $\mathfrak{K}_\varrho$ und $\mathfrak{K}_\sigma$ gehören müssen. Da nun eine Stelle von $\mathfrak{K}_0$ und von $\mathfrak{K}_k$ nicht zu einer Stelle einer anderen Klasse kongruent sein kann, ist

$$(50) \quad 0 < \varrho < k, \qquad 0 < \sigma < k.$$

Wegen $\varrho \neq \sigma$ ist folglich $k \geqq 3$. Es sei $\mathfrak{K}_\varkappa$ eine von $\mathfrak{K}_\varrho$ und $\mathfrak{K}_\sigma$ verschiedene Klasse. Ist $\mathfrak{K}_\varkappa$ von der zweiten Art, so ist nach dem Zusatz von Hilfssatz 1

$$(51) \quad \alpha_\varkappa \leqq 4,$$

da die Stellen von $\mathfrak{R}_\varkappa \pmod p$ inkongruent sind. Ist aber $\mathfrak{R}_\varkappa$ von der ersten Art, so enthält es nach (34a) höchstens $|\varrho - \varkappa|$ zu r inkongruente Stellen, die von r um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernt sind, und höchstens $|\sigma - \varkappa|$ zu r inkongruente Stellen, die von s um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernt sind. Nun ist jede Stelle sicher von einer der beiden Stellen r und s um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernt. Ferner gibt es in $\mathfrak{R}_\varkappa$ höchstens eine zu r kongruente Stelle, weil sonst $\mathfrak{R}_\varkappa$ zwei kongruente Stellen enthielte. Daher gilt wegen (51) in jedem Falle

$$\alpha_\varkappa \leqq \operatorname{Max}(4, |\varrho - \varkappa| + |\sigma - \varkappa| + 1) = 1 + \operatorname{Max}(3, |\varrho - \varkappa| + |\sigma - \varkappa|). \tag{52}$$

Sind alle Stellen von $\mathfrak{R}_\sigma$ um weniger als $\frac{p}{2}$ von s entfernt, so sind sie von r um mehr als $\frac{p}{2}$ entfernt. Daher ergibt sich nach (34a) und dem Zusatz von Hilfssatz 1

$$\alpha_\sigma \leqq \operatorname{Max}(4, |\varrho - \sigma| + 1), \tag{53}$$

da in $\mathfrak{R}_\sigma$ nur eine zu r kongruente Stelle, nämlich s auftreten kann.

Nach Voraussetzung gibt es außerhalb von $\mathfrak{R}_\varrho$ mindestens zwei Stellen a_ν, etwa a_1' und a_2', die um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernt sind; es möge a_1' zu $\mathfrak{R}_{u_1}$ und a_2' zu $\mathfrak{R}_{u_2}$ gehören. Dann gibt es nach Voraussetzung in $\mathfrak{R}_\varrho$ höchstens eine zu a_1' kongruente Stelle, und zwar existiert eine solche nach (33) höchstens dann, wenn μ_1 von 0 und k verschieden ist. Ist nun $\mathfrak{R}_\varrho$ von der ersten Art, so gibt es in $\mathfrak{R}_\varrho$ nach (34b) höchstens $|\mu_1 - \varrho| + 1$ zu a_1' inkongruente Stellen, die von a_1' um mindestens $\frac{p}{4}$ entfernt sind. Folglich gibt es in $\mathfrak{R}_\varrho$ wegen (50) insgesamt höchstens k von a_1' um mehr als $\frac{p}{4}$ entfernte Stellen; das gleiche gilt für a_2'. Daher ist, gleichgültig ob $\mathfrak{R}_\varrho$ von der ersten oder zweiten Art ist,

$$\alpha_\varrho \leqq \operatorname{Max}(4, 2k) \leqq 2k + 2. \tag{54}$$

Aus (53) und (54) folgt

$$\begin{aligned} \alpha_\varrho + \alpha_\sigma &\leqq 2k + 2 + \operatorname{Max}(4, |\varrho - \sigma| + 1) \\ &\leqq 2k + 4 + \operatorname{Max}(2, |\varrho - \sigma|) \leqq 2k + 4 + 2|\varrho - \sigma|. \end{aligned} \tag{55}$$

Analog gilt (55), wenn alle Stellen von $\mathfrak{R}_\varrho$ von r um weniger als $\frac{p}{2}$ entfernt sind. Enthält aber $\mathfrak{R}_\sigma$ eine Stelle s', die von s um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernt ist, und $\mathfrak{R}_\varrho$ eine Stelle, die von r um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernt ist, so folgt aus (34b)

$$\alpha_\varrho \leqq \operatorname{Max}(4, |\varrho - \sigma| + 1 + |\varrho - \sigma| + 1 + 2) = 2|\varrho - \sigma| + 4, \tag{56}$$

da $\mathfrak{R}_\varrho$ nur eine zu s und höchstens eine zu s' kongruente Stelle enthalten kann. Analog folgt

$$\alpha_\sigma \leqq 2|\varrho - \sigma| + 4$$

und daher wegen (56) und (50)

$$\alpha_\varrho + \alpha_\sigma \leqq 2|\varrho - \sigma| + 2|\varrho - \sigma| + 8 \leqq 2(k-2) + 2|\varrho - \sigma| + 3$$
$$= 2k + 4 + 2|\varrho - \sigma|.$$

Also gilt (55) auch hier und aus (52) und (55) folgt

$$t = \alpha_\varrho + \alpha_\sigma + \sum_{\substack{\varkappa \neq \varrho \\ \varkappa \neq \sigma}} \alpha_\varkappa \leqq 2k + 4 + 2|\varrho - \sigma|$$
$$+ \sum_{\substack{\varkappa \neq \varrho \\ \varkappa \neq \sigma}} \{\mathrm{Max}\,(3, |\varrho - \varkappa| + |\sigma - \varkappa|)\} + k - 1$$
$$\leqq 3k + 3 + 2|\varrho - \sigma| + \sum_{\substack{\varkappa \neq \varrho \\ \varkappa \neq \sigma}} \mathrm{Max}\,(\tfrac{3}{2}, |\varrho - \varkappa|)$$
$$+ \sum_{\substack{\varkappa \neq \varrho \\ \varkappa \neq \sigma}} \mathrm{Max}\,(\tfrac{3}{2}, |\sigma - \varkappa|),$$

$$t \leqq 3k + 3 + \sum_{\varkappa \neq \varrho} \mathrm{Max}\,(\tfrac{3}{2}, |\varrho - \varkappa|) + \sum_{\varkappa \neq \sigma} \mathrm{Max}\,(\tfrac{3}{2}, |\sigma - \varkappa|).$$

Wegen (50) und nach Hilfssatz 3 nehmen die Summen auf der rechten Seite ihre größten Werte an, wenn $\varrho = 1$ und $\sigma = k-1$ oder $\varrho = k-1$ und $\sigma = 1$ ist. Daher ist wegen $k \geqq 3$

$$t \leqq 3k + 3 - \tfrac{3}{2} + \sum_{\varkappa=0}^{k} \mathrm{Max}\,(\tfrac{3}{2}, |1 - \varkappa|) - \tfrac{3}{2} + \sum_{\varkappa=0}^{k} \mathrm{Max}\,(\tfrac{3}{2}, |k-1-\varkappa|)$$
$$= 3k + 2(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} + \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \varkappa),$$

$$t \leqq 3k + 7 + k^2 - k < k^2 + 3k + 6. \tag{57}$$

b) Eine Klasse $\mathfrak{R}_\varrho$ enthält zwei (mod p) kongruente Stellen r und s, aber keine Klasse enthält mehr als zwei untereinander kongruente Stellen.

Analog wie in (52) findet man für $\varkappa \neq \varrho$, da jetzt $\mathfrak{R}_\varkappa$ höchstens zwei untereinander kongruente Stellen enthalten kann,

$$\alpha_\varkappa \leqq \mathrm{Max}\,(5, |\varrho - \varkappa| + |\varrho - \varkappa| + 2) = 2 + 2\,\mathrm{Max}\,(\tfrac{3}{2}, |\varrho - \varkappa|). \tag{58}$$

Ist $\mathfrak{R}_\varrho$ von der zweiten Art, so ist $\alpha_\varrho \leqq 5$. Es sei $\mathfrak{R}_\varrho$ von der ersten Art. Außerhalb von $\mathfrak{R}_\varrho$ gibt es wieder zwei um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernte a_r, etwa a_1' aus $\mathfrak{R}_{\mu_1}$ und a_2' aus $\mathfrak{R}_{\mu_2}$. In $\mathfrak{R}_\varrho$ können nach Voraussetzung höchstens zwei zu a_1' kongruente Stellen liegen. Ist aber ϱ oder μ_1 gleich 1 oder $k-1$, so gibt es wegen (33) nur eine solche Stelle, für ϱ oder μ_1 gleich 0 oder k gibt es keine solche Stelle. Daher gibt es nach (34 b) insgesamt höchstens $k+1$ von a_1' um mehr als $\frac{p}{4}$ entfernte Stellen. Folglich ist wegen $k \geqq 2$

$$\alpha_\varrho \leqq \mathrm{Max}\,(5, 2k+2) = 2k + 2. \tag{59}$$

Aus (58) und (59) folgt

$$t = \alpha_\varrho + \sum_{\varkappa \neq \varrho} \alpha_\varkappa \leqq 2k + 2 + 2k + 2 \sum_{\varkappa \neq \varrho} \mathrm{Max}\left(\tfrac{3}{2}, |\varrho - \varkappa|\right). \tag{60}$$

Ist nun $\varrho \neq 0$ und $\varrho \neq k$, so nimmt in (60) die Summe ihren größten Wert für $\varrho = 1$ an. Man erhält

$$t \leqq 4k + 2 + 2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{k^2 - k}{2}\right) = k^2 + 3k + 6. \tag{61}$$

Ist aber $\varrho = 0$ oder k, so kommen in den Klassen $\mathfrak{K}_\varkappa$ für $\varkappa \neq \varrho$ keine zu r kongruenten Stellen vor, daher läßt sich (58) durch

$$\alpha_\varkappa \leqq \mathrm{Max}\,(5, 2\,|\varrho - \varkappa|) \tag{62}$$

ersetzen. Aus (59) und (62) folgt

$$\begin{aligned} t &\leqq 2k + 2 + 2 \sum_{\varkappa \neq \varrho} \mathrm{Max}\left(\tfrac{5}{2}, |\varrho - \varkappa|\right) \\ &= 2k + 2 + 2\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{k^2 + k}{2}\right) = k^2 + 3k + 6. \end{aligned}$$

Also gilt (61) auch hier.

c) Eine Klasse, etwa $\mathfrak{K}_\varrho$, enthält drei (mod p) kongruente Stellen r_1, r_2, r_3, aber keine Klasse enthält drei (mod p^2) kongruente Stellen.

Für die Klassen $\mathfrak{K}_\varkappa$ zweiter Art gilt nach dem Zusatz von Hilfssatz 1

$$\alpha_\varkappa \leqq 7 \qquad (\varkappa \neq \varrho \text{ und } \varkappa = \varrho), \tag{63}$$

da $\mathfrak{K}_\varkappa$ nicht drei (mod p^2) kongruente Stellen enthält. Es sei μ die Maximalanzahl der zu r_1 (mod p) kongruenten Stellen, die eine von $\mathfrak{K}_\varrho$ verschiedene Klasse erster Art enthält. Ist $\mu \neq 0$, so kann nach Hilfssatz 2, angewandt auf $g(x)$ und $G(x)$, kein $\mathfrak{K}_\varkappa$ mit $\varkappa < \mu$ oder $\varkappa > k - \mu$ zu r_1 kongruente Stellen enthalten. Speziell ist also

$$\mu \leqq \varrho \leqq k - \mu.$$

Für die Gesamtanzahl der zu r_1 (mod p) kongruenten Stellen, die in von $\mathfrak{K}_\varrho$ verschiedenen Klassen erster Art vorkommen, erhält man also höchstens

$$\sum_{\substack{\varkappa = u \\ \varkappa \neq \varrho}}^{k-u} \mu = (k - 2\mu)\,\mu = \frac{k^2}{8} - \left(\frac{k}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,\mu\right)^2 \leqq \frac{k^2}{8}. \tag{64}$$

Ist $\mathfrak{K}_\varkappa$ eine von $\mathfrak{K}_\varrho$ verschiedene Klasse erster Art, so sei $\beta_\nu^{(\varkappa)}$ die Anzahl der von r_ν um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernten, zu r_1 (mod p) inkongruenten Stellen aus $\mathfrak{K}_\varkappa$ und $\alpha'_\varkappa$ die Gesamtanzahl der zu r_1 (mod p) inkongruenten Stellen aus $\mathfrak{K}_\varkappa$. Dann ist

$$2\,\alpha'_\varkappa \leqq \beta_1^{(\varkappa)} + \beta_2^{(\varkappa)} + \beta_3^{(\varkappa)}, \tag{65}$$

da jede der fraglichen Stellen von mindestens zwei der drei Stellen r_ν um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernt ist. Andererseits ist nach Hilfssatz 2

$$\beta_\nu^{(\varkappa)} \leqq |\varkappa - \varrho| \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

folglich wegen (65)

$$\alpha'_\varkappa \leqq \frac{3}{2}\,|\varkappa - \varrho|. \tag{66}$$

Daher ergibt sich wegen (63), (64) und (66)

$$t \leqq \alpha_\varrho + \frac{k^2}{8} + \sum_{\varkappa \neq \varrho} \mathrm{Max}\left(7, \frac{3}{2}\,|\varkappa - \varrho|\right). \tag{67}$$

Es sei nun zunächst

$$2 \leqq \varrho \leqq k-2, \tag{68}$$

also

$$k \geqq 4. \tag{69}$$

Es sei $\mathfrak{R}_\varrho$ von der ersten Art. Nach Voraussetzung gibt es außerhalb von $\mathfrak{R}_\varrho$ wieder mindestens zwei um mindestens $\frac{p}{2}$ entfernte Stellen a'_1 und a'_2, etwa aus den Klassen $\mathfrak{R}_{\mu_1}$ und $\mathfrak{R}_{\mu_2}$. Nach Hilfssatz 2, angewandt auf $g(x)$, enthält dann $\mathfrak{R}_\varrho$ höchstens $|\mu_1 - \varrho| + 1$ zu a'_1 inkongruente Stellen, die von a'_1 um mindestens $\frac{p}{4}$ entfernt sind, und höchstens $\mathrm{Min}\,(\mu_1, \varrho)$ zu a'_1 kongruente Stellen, also insgesamt höchstens $\mathrm{Max}\,(\mu_1, \varrho) + 1$ Stellen, die von a'_1 um mindestens $\frac{p}{4}$ entfernt sind. Analog folgt, wenn man Hilfssatz 2 auf $G(x)$ anwendet, daß es höchstens $\mathrm{Max}\,(k - \mu_1, k - \varrho) + 1$ solche Stellen geben kann. Also gibt es wegen (68) höchstens $k - 2 + 1$ solche Stellen und analog folgt, daß es höchstens $k - 1$ Stellen in $\mathfrak{R}_\varrho$ gibt, die von a'_2 um mindestens $\frac{p}{4}$ entfernt sind. Folglich ist, wenn $\mathfrak{R}_\varrho$ von der ersten oder der zweiten Art ist, wegen (63)

$$\alpha_\varrho \leqq \mathrm{Max}\,(7, 2k-2). \tag{70}$$

Daher folgt aus (67) und (69)

$$t \leqq \mathrm{Max}\,(7, 2k-2) + \frac{k^2}{8} + \frac{3}{2}\sum_{\varkappa \neq \varrho} \mathrm{Max}\left(\frac{14}{3}, |\varkappa - \varrho|\right). \tag{71}$$

Die Summe auf der rechten Seite nimmt nach Hilfssatz 3 ihren größten Wert für $\varrho = 2$ an. Daher folgt für $k \geqq 6$

$$t \leqq 2k - 2 + \frac{k^2}{8} + \frac{3}{2}\left(\frac{14}{3} + \frac{14}{3} + \frac{11}{3} + \frac{8}{3} + \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \sum_{\varkappa=1}^{k-3} \varkappa\right),$$

$$t \leqq 2k - 2 + \frac{k^2}{8} + 27 + \frac{3}{2}\,\frac{(k-2)(k-1)}{2} = \frac{7}{8}k^2 - \frac{k}{4} + \frac{53}{2},$$

folglich wegen $k \geqq 6$

$$t \leqq k^2 + 3k + 6. \tag{72}$$

Aus (71) folgt direkt, daß (72) auch für $k = 5$ gilt. Wegen (69) braucht (72) nur noch für $k = 4$ bewiesen zu werden.

Hierzu denke man sich die beiden Klassen $\mathfrak{K}_\varkappa$ mit $\varkappa = \varrho \pm 1$, also da wegen (68) hier $\varrho = 2$ ist, die Klassen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_3$ in je zwei Halbklassen zerlegt, derart, daß $g(x)$ an den Stellen jeder Halbklasse auch dem Vorzeichen nach denselben Wert annimmt. Dann folgt aus Hilfssatz 2 nach der zu (66) führenden Methode, daß in jeder dieser vier Halbklassen höchstens $\frac{3}{2}|\varrho \pm 1 - \varrho|$, also nur eine zu r_1 inkongruente Stelle liegen kann. An mindestens zwei der drei Stellen r_1, r_2, r_3 muß $g(x)$ auch dem Vorzeichen nach denselben Wert annehmen; daher folgt nach Hilfssatz 2, daß in $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ keine zu r_1 kongruenten Stellen liegen können. Folglich ist wegen (63), (66) und (70)

$$\alpha_1 \leqq 1 + 1 = 2, \quad \alpha_3 \leqq 2, \quad \alpha_0 \leqq 7, \quad \alpha_4 \leqq 7, \quad \alpha_2 \leqq 7,$$
$$t \leqq 25 < k^2 + 3k + 6.$$

Es sei jetzt $\varrho = 0, 1, k-1$ oder k.

An mindestens zwei der drei Stellen r_1, r_2, r_3 nimmt $g(x)$ denselben Wert an, daher enthalten nach Hilfssatz 2 die von $\mathfrak{K}_\varrho$ verschiedenen Klassen hier keine zu r_1 kongruenten Stellen. Analog zu (70) und (71) ergibt sich

$$\alpha_\varrho \leqq \operatorname{Max}(7, 2k+2), \tag{73}$$
$$t \leqq \operatorname{Max}(7, 2k+2) + \tfrac{3}{2} \sum_{\varkappa \neq \varrho} \operatorname{Max}(\tfrac{14}{3}, |\varkappa - \varrho|).$$

Für $k \geqq 6$ folgt hieraus

$$t \leqq 2k + 2 + \frac{3}{2}\left(\frac{11}{3} + \frac{8}{3} + \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{k^2+k}{2}\right) = \frac{3}{4}k^2 + \frac{11}{4}k + 15,$$
$$t \leqq k^2 + 3k + 6. \tag{74}$$

Um zu zeigen, daß (74) auch für $k \leqq 5$ gilt, denke man sich wieder die Klassen mit $\varkappa = \varrho \pm 1$ und $\varkappa = \varrho \pm 2$ in je zwei Halbklassen zerlegt. Für $\varkappa = \varrho \pm 1$ folgt wie oben $\alpha_\varkappa \leqq 2$ und für $\varkappa = \varrho \pm 2$ analog $\alpha_\varkappa \leqq 6$. Man erhält dann wegen (73) für $k = 5$

$$t \leqq 12 + 2 + 6 + 7 + 7 + 7 = 41 < k^2 + 3k + 6.$$

Ebenso folgt, daß (74) auch für $k = 2$, 3 und 4 gilt.

d) Eine Klasse, etwa $\mathfrak{K}_\varrho$, enthält drei (mod p^2) kongruente Stellen r_1, r_2, r_3.

Wie beim Fall c) zerlege man hier die Klassen $\mathfrak{K}_\varkappa$ in Halbklassen. Für die Anzahl der zu r_1 inkongruenten Stellen in jeder Halbklasse ergibt sich dann aus (34 c) analog wie in (66), daß sie $\frac{3}{2}(\frac{1}{2}|\varrho - \varkappa|)$ nicht übersteigt. Die Gesamtanzahl der zu r_1 kongruenten Stellen a_ν außerhalb $\mathfrak{K}_\varrho$ ist ferner analog wie in (64) höchstens $2 \cdot \frac{k^2}{8}$. Ferner ergibt sich analog zu (73) wegen Hilfssatz 1

$$\alpha_\varrho \leqq \operatorname{Max}(3 + \sqrt{4\varrho + 1}, 2k + 2) \leqq \operatorname{Max}(2\varrho + 4, 2k + 2) \leqq 2k + 4.$$

Man findet also

$$t \leqq 2k+4+\frac{k^2}{4}+\sum_{\varkappa=0}^{k} 2\cdot\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,|\varrho-\varkappa| \leqq \frac{k^2}{4}+2k+4+\frac{3}{2}\,\frac{k^2+k}{2},$$

$$t \leqq k^2+\tfrac{11}{4}k+4 < k^2+3k+6. \tag{75}$$

Daher gilt in jedem der Fälle a), b), c) und d) wegen (57), (61), (72), (74) und (75)

$$t \leqq k^2+3k+6.$$

Wegen $t \leqq n$ ist also

$$2t \leqq n+k^2+3k+6$$

entgegen der Voraussetzung; damit ist Satz 6 vollständig bewiesen.

Aus Satz 1a und Satz 6 folgt insbesondere

Satz 7. *Nimmt das ganzzahlige Polynom $f(x)$ vom Grade n die Primzahlpotenz p^k an t ganzzahligen Stellen an, ist $p > 2^{k+2}$ und*

$$t > \operatorname{Max}\left(\frac{4}{5}n,\ \frac{n}{2}+\frac{k^2+3k}{2}+3\right),$$

so kann $f(x)$ im Körper der rationalen Zahlen nicht in zwei Faktoren ungleichen Grades zerfallen.

§ 6.

Zum Schluß soll der folgende Satz bewiesen werden, der sich leicht noch verschärfen läßt.

Satz 8. *Ist k ganz, p eine Primzahl, nimmt das ganzzahlige Polynom $f(x)$ vom Grade n an n ganzzahligen Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ einen in p^k aufgehenden Wert an, so ist für $n > 12k(2k^2+4k+1)$ entweder $f(x)$ im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel oder das Produkt zweier irreduzibler Faktoren gleichen Grades.*

Beweis. Es sei zunächst $p < 2^{k+2}$. Dann nimmt $f(x)$ an den n ganzzahligen Stellen a_ν Werte an, die von Null verschieden und absolut genommen kleiner als 2^{k^2+2k} sind. Nun ist

$$z! > 4^z \quad \text{für} \quad z \geqq 9,$$

also wegen $n > 12k(2k^2+4k+1)$

$$2^{k^2+2k} < 2^{12k^3+24k^2+6k} < \frac{(12k^3+24k^2+6k)!}{2^{12k^3+24k^2+6k}} < \frac{\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)!}{2^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}}.$$

Daher ist nach dem in der Einleitung genannten Pólyaschen Kriterium $f(x)$ irreduzibel.

Es sei also

$$p > 2^{k+2}.$$

Würde $f(x)$ in zwei Faktoren ungleichen Grades zerfallen, so sei wieder

$$f(x) = g(x)G(x),$$

wo $g(x)$ und $G(x)$ die Grade m und M $(m < M)$ haben.

Man muß zwei Fälle unterscheiden:

1. Je zwei der a_ν sind (mod p) inkongruent.

Wegen $f(a_\nu) \mid p^k$ folgt $g(a_\nu) = \pm p^\lambda$, $0 \leqq \lambda \leqq k$. Es sei etwa $g(a_\nu) = \pm 1$ für α der Stellen a_ν, also an den übrigen $n - \alpha$ Stellen $g(a_\nu) \equiv 0 \pmod p$, folglich

$$n - \alpha \leqq m. \tag{76}$$

Nimmt $g(x)$ an den α Stellen immer dasselbe Vorzeichen an, so ist $\alpha \leqq m$, nimmt $g(x)$ an diesen Stellen beide Vorzeichen an, so ist nach Hilfssatz 1 $\alpha \leqq 4$; also ist nach (76) entweder $n \leqq 2m$ und daher $m = \frac{n}{2}$, oder

$$n \leqq m + 4 < \frac{n}{2} + 4,$$

was wegen $n > 7$ unmöglich ist.

2. Zwei Stellen a_ν, etwa r und s sind (mod p) kongruent.

Man teile hier die a_ν so in Klassen ein, daß für alle a_ν aus derselben Klasse sowohl $g(x)$ als auch $G(x)$ denselben Wert haben. Die Anzahl der möglichen Klassen ist dann offenbar $4(k+1)^2$. Ist $\mathfrak{K}_\varkappa$ eine Klasse, die weder r noch s enthält, so ist für die Stellen dieser Klasse, sie mögen etwa mit $a_\nu^{(\varkappa)}$ bezeichnet werden, entweder $g(a_\nu^{(\varkappa)}) \neq g(r)$ oder $G(a_\nu^{(\varkappa)}) \neq G(r)$. Von den Differenzen $g(r) - g(a_\nu^{(\varkappa)})$ und $G(r) - G(a_\nu^{(\varkappa)})$ ist daher mindestens eine von 0 verschieden. Jede dieser Differenzen ist absolut kleiner oder gleich $2p^k$ und teilbar durch $\prod_\nu (r - a_\nu^{(\varkappa)})$. Daher ist

$$\left| \prod_\nu (r - a_\nu^{(\varkappa)}) \right| \leqq 2p^k.$$

Ist $\eta_\varkappa$ die Anzahl der $a_\nu^{(\varkappa)}$, für die $|r - a_\nu^{(\varkappa)}| > \frac{p}{2}$ ist, so ist also

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{\eta_\varkappa} \leqq 2p^k$$

und folglich $\eta_\varkappa \leqq k$ wegen $p > 2^{k+2}$, denn es ist

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{k+1} = p^k \frac{p}{2^{k+1}} > 2p^k.$$

Ebenso kann es höchstens k Stellen $a_\nu^{(\varkappa)}$ mit $|s - a_\nu^{(\varkappa)}| > \frac{p}{2}$ geben. Da aber wegen $|r - s| \geqq p$ für jedes $a_\nu^{(\varkappa)}$ entweder $|r - a_\nu^{(\varkappa)}| > \frac{p}{2}$ oder $|s - a_\nu^{(\varkappa)}| > \frac{p}{2}$ ist, enthält $\mathfrak{K}_\varkappa$ höchstens $2k$ Stellen $a_\nu^{(\varkappa)}$. Man muß jetzt zwei Unterfälle unterscheiden:

a) Es gehören r und s zu derselben Klasse $\mathfrak{K}_\varrho$.

Diese Klasse kann höchstens m Stellen enthalten und, da die $4(k+1)^2-1$ von $\mathfrak{K}_\varrho$ verschiedenen Klassen höchstens je $2k$ Stellen enthalten, gilt

$$n \leqq m + \{4(k+1)^2 - 1\}\, 2k < \frac{n}{2} + 8k^3 + 16k^2 + 6k,$$

$$n < 16k^3 + 32k^2 + 12k < 12k(2k^2 + 4k + 1). \tag{77}$$

b) Es gehören r und s zu verschiedenen Klassen $\mathfrak{K}_\varrho$ und $\mathfrak{K}_\sigma$.

Bestimmt man die Konstanten c und d so, daß

$$G(r) - c\,g(r) - d = 0,$$
$$G(s) - c\,g(s) - d = 0$$

ist, so verschwindet das Polynom

$$H(x) = G(x) - c\,g(x) - d$$

offenbar für alle a_ν aus $\mathfrak{K}_\varrho$ und $\mathfrak{K}_\sigma$. Wegen $m < M$ hat $H(x)$ genau den Grad M. Ist also w die Gesamtanzahl der Stellen von $\mathfrak{K}_\varrho$ und $\mathfrak{K}_\sigma$, so ist

$$w \leqq M.$$

Andererseits ist, da jede Klasse höchstens m Stellen enthält,

$$w \leqq 2m,$$
$$3w = 2w + w \leqq 2M + 2m = 2n,$$
$$w \leqq \tfrac{2}{3}n.$$

Die anderen $4(k+1)^2 - 2$ Klassen enthalten höchstens je $2k$ Stellen. Also ist

$$n \leqq \tfrac{2}{3}n + (4k^2 + 8k + 2)\, 2k,$$

$$n \leqq 12k(2k^2 + 4k + 1). \tag{78}$$

Aus (77) und (78) ergibt sich die Behauptung.

Berlin.

The Institute for Advanced Study,
Princeton N. J.

(Eingegangen am 10. Januar 1935.)

Über die Reihendarstellung implizit gegebener Funktionen von endlich oder unendlich vielen Veränderlichen.

Von

Hermann Schmidt in Jena.

Im folgenden geben wir eine Art Übertragung der bekannten *Lagrange-Bürmannschen Reihenentwicklung* auf implizite Funktionen von *abzählbar vielen Veränderlichen*; die definierende Gleichung wird dabei als in den unabhängigen Veränderlichen linear, in der abhängigen analytisch vorausgesetzt (§ 2). Der Übersichtlichkeit halber wird vorher der Fall *endlich vieler Veränderlicher* nach der gleichen Methode kurz behandelt (§ 1), obwohl hier die Ergebnisse als mehr oder weniger bekannt gelten dürfen [3]), [5]), [6]). Wir fügen hierzu auch einige *Beispiele* an, darunter eine kurze Herleitung der *Waringschen Formel* für die Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, die anscheinend in diesen naturgemäßen Zusammenhang noch nicht hineingestellt worden ist. Als Anwendung von § 2 gewinnen wir ferner die Darstellung der *Umkehrfunktion einer gewöhnlichen Dirichletreihe* mit Halbebene absoluter Konvergenz als Summe aus einem logarithmischen Glied und einer absolut konvergenten „irregulären" Potenzreihe (§ 3); für die betreffende Klasse analytischer fastperiodischer Funktionen ist damit zugleich der H. Bohrsche Umkehrsatz [12]) auf besonders einfache Weise und in verschärfter Form wiedergewonnen (nämlich mit Konvergenzaussage). Schließlich wird noch eine recht *allgemeine Anwendung* auf die Darstellung impliziter Funktionen eines veränderlichen Punktes in der Umgebung eines Randpunktes des Definitionsgebietes gegeben; dabei handelt es sich um *Reihen, die zugleich absolut konvergieren und asymptotisch sind*, und zwar mit den Funktionen einer *allgemeinen „Skala"* [14]) als Entwicklungsgliedern (§ 4).

§ 1.

Übertragung der Lagrange-Bürmannschen Reihe auf p Veränderliche.

Gegeben sei die Funktion

$$G(w; z_1, \ldots, z_p) = g(w) - \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu g_\nu(w), \tag{1}$$

wobei wir voraussetzen

$$g(w), g_\nu(w) \text{ regulär für } |w| < R; \quad g^{(k)}(0) = 0 \ (k = 0, \ldots, n-1); \quad g^{(n)}(0) \neq 0; \ n > 0. \tag{2}$$

Es werde $r > 0$ so angenommen, daß die für $w = 0$ reguläre, dort nicht verschwindende Funktion

$$\tilde{g}(w) = \frac{g(w)}{w^n} \tag{3}$$

in $|w| \leqq r$ von Null verschieden bleibt. Wir betrachten solche Lösungen von $G = 0$, für die $|w| \leqq r$; es sind dieselben wie diejenigen von $F = 0$, wo

$$F = \frac{G}{\tilde{g}(w)} = w^n - \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu f_\nu(w); \tag{4}$$

$$f_\nu(w) = \frac{g_\nu(w)}{\tilde{g}(w)}. \tag{5}$$

Für $|w| \leqq r$ sei $|f_\nu(w)| \leqq M_\nu$, und es werde (z_ν) so gewählt, daß

$$\sum_{\nu=1}^{p} |z_\nu| M_\nu < r^n. \tag{6}$$

Dann hat nach dem Rouchéschen Satze für jedes Wertsystem (z_ν) dieser Art die Funktion F genau n Nullstellen w_j in $|w| < r$, keine auf $|w| = r$ [1]). Ist nun $\psi(w)$ für $|w| \leqq r$ regulär, so gilt nach dem Residuensatz

$$\sum_{j=1}^{n} \psi(w_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \psi(t) \frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t; z_1, \ldots, z_p)}{F(t; z_1, \ldots, z_p)} dt,$$

und vermöge

$$F = t^n \Big(1 - \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu t^{-n} f_\nu(t)\Big)$$

folgt

$$\sum_{j=1}^{n} \psi(w_j) = \frac{n}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{\psi(t)}{t} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \psi(t) \frac{\partial}{\partial t} \lg\Big(1 - \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu t^{-n} f_\nu(t)\Big) dt$$

$$= n\psi(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \psi'(t) \lg\Big(1 - \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu t^{-n} f_\nu(t)\Big)^{-1} dt.$$

Die letzte Form des Ausdrucks ergibt sich durch partielle Integration mit Rücksicht darauf, daß wegen (6) auf $|t| = r$ jeder Zweig des $\lg\big(1 - \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu t^{-n} f_\nu(t)\big)$ regulär und eindeutig ist [2]).

---

[1]) Die Numerierung denken wir uns dabei für jede Stelle (z_ν) willkürlich festgelegt.

[2]) Dieses Vorgehen ist vielleicht auch im klassischen Fall $p = 1$, $n = 1$ mehr zu empfehlen als das übliche Rechnen an den Koeffizienten; vgl. z. B. Hurwitz-Courant [11], S. 137 (hier ist in Gleichung (4) „=" statt „+" zu lesen), weiter Bieberbach [2], S. 202—203 und Goursat [8], § 302, S. 118.

Einer davon ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left\{ \sum_{\nu_1 \dots \nu_p} \frac{m!}{\nu_1! \dots \nu_p!} z_1^{\nu_1} \dots z_p^{\nu_p} \frac{f_1^{\nu_1} \dots f_p^{\nu_p}}{t^{mn}} \right\};$$

die Reihe konvergiert absolut und bei festem (z_ν) auch gleichmäßig in t auf $|t| = r$, und zwar nicht nur als Reihe nach homogenen Polynomen der z_ν, sondern auch als Potenzreihe in den z_ν betrachtet. In der inneren Summe durchlaufen die Indizes $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$ jeweils alle Systeme nichtnegativer ganzer Zahlen mit $\sum_{k=1}^{p} \nu_k = m$, wie es der polynomische Satz verlangt; entsprechend im folgenden.

Durch gliedweise Integration folgt jetzt

$$\sum_{j=1}^{n} \psi(w_j) = n\,\psi(0) + \sum_{\nu_1 \dots \nu_p} A_{\nu_1 \dots \nu_p} z_1^{\nu_1} \dots z_p^{\nu_p},$$

worin

$$A_{\nu_1 \dots \nu_p} = \frac{(m-1)!}{2\pi i\, \nu_1! \dots \nu_p!} \int_{|t|=r} \frac{\psi'(t) f_1^{\nu_1} \dots f_p^{\nu_p}}{t^{(nm-1)+1}}\, dt, \tag{7}$$

oder also

$$(nm-1)!\, A_{\nu_1 \dots \nu_p} = \frac{(m-1)!}{\nu_1! \dots \nu_p!} \frac{d^{nm-1}}{dt^{nm-1}} \left(\psi'(t) f_1^{\nu_1} \dots f_p^{\nu_p}\right)\Big|_{t=0} \text{ [3) 4)]}, \tag{8}$$

womit die gesuchte allgemeine Koeffizientenformel erreicht ist. Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle (z_ν) im Gebiet (6).

Sonderfälle. a) $\psi(t) = t^l$; $l > 0$, ganz.

Aus (7) oder (8) entnimmt man für die Potenzsummen

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^l = \sum_{(\nu_k)} \frac{(m-1)!\, l}{(nm-l)!\, \nu_1! \dots \nu_p!} \frac{d^{nm-l}}{dt^{nm-l}} \left(f_1^{\nu_1} \dots f_p^{\nu_p}\right) \Big|_{t=0} z_1^{\nu_1} \dots z_p^{\nu_p}, \tag{9}$$

$$m = \sum_{k=1}^{n} \nu_k \geqq \frac{l}{n} \text{ [5)]}.$$

Hieraus entspringt sofort für $n = p$, $f_\nu(w) = w^{n-\nu}$, $z_\nu = -a_\nu$ wegen

$$f_1^{\nu_1}(t) \dots f_n^{\nu_n}(t) = t^{nm - \sum_{k=1}^{n} k\nu_k}$$

---

[3]) Für $p = 2$, $n = 1$ als Übungsaufgabe bei Goursat [8], S. 142, neuerdings ohne Bezugnahme darauf breit ausgeführt bei Germay [6], S. 1—4.

[4]) Andere Verallgemeinerungen der Lagrange-Bürmannschen Reihe gaben Hermite [10], IV, S. 326—328, und Stieltjes-Poincaré [14], § 5, S. 357—362.

[5]) Wie ich nachträglich bemerkt habe, läßt sich (9) auch aus gewissen allgemeinen, auf anderem Wege gewonnenen Ergebnissen von Herrn Wirtinger [17] herleiten, indem man nämlich die dortigen Formeln (9), (11) entsprechend den Andeutungen unter VI, a. a. O. S. 267, für unseren Fall weiterbehandelt.

die *Waringsche Formel*

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^l = l \sum_{(\nu_k)} (-1)^{\nu_1 + \ldots + \nu_n} \frac{(\nu_1 + \ldots + \nu_n - 1)!}{\nu_1! \ldots \nu_n!} a_1^{\nu_1} \ldots a_n^{\nu_n},$$

worin die Summe über alle Systeme (ν_k) mit $\sum_{k=1}^{n} k\nu_k = l$ zu erstrecken ist (Gewichtsgleichung).

b) $n = 1$. Für die Lösung von $w = \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu f_\nu(w)$ kommt

$$\psi(w) = \psi(0) + \sum \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_p!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left(\psi'(t) f_1^{\nu_1} \ldots f_p^{\nu_p}\right) \Big|_{t=0} z_1^{\nu_1} \ldots z_p^{\nu_p},$$

$$w^l = l \sum \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_p!} \frac{d^{m-l}}{dt^{m-l}} \left(f_1^{\nu_1} \ldots f_p^{\nu_p}\right) \Big|_{t=0} z_1^{\nu_1} \ldots z_p^{\nu_p}$$

($p = 1$ gibt die gewöhnliche Lagrange-Bürmannsche Reihe).

Bei beliebigem p kann hier (7) unter Rückgang auf die Bezeichnungsweise (1) vermöge (3), (4), (5) so geschrieben werden:

$$A_{\nu_1 \ldots \nu_p} = \frac{(m-1)!}{2\pi i\, \nu_1! \ldots \nu_p!} \int_{|t|=r} \frac{\psi'(t)\, g_1^{\nu_1}(t) \ldots}{g^m(t)}\, dt.$$

Nimmt man jetzt den Integrationskreis so klein, daß $|t| \leqq r$ durch $u = g(t)$ schlicht abgebildet wird (was wegen $n = 1$, also $g'(0) \neq 0$ möglich ist), so kann das Integral in der u-Ebene geführt werden und erhält die Gestalt

$$(10) \qquad \frac{\nu_1! \ldots \nu_p!}{(m-1)!} A_{\nu_1 \ldots \nu_p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{0+} \frac{\psi'(t(u))\, g_1^{\nu_1}(t(u)) \ldots du}{u^m g'(t(u))}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{du^{m-1}} \left\{ \frac{\psi'(t(u))\, g_1^{\nu_1}(t(u)) \ldots}{g'(t(u))} \right\}_{u=0}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^{m-1} \left(\frac{\psi'(t)\, g_1^{\nu_1}(t) \ldots}{g'(t)} \right) \Big|_{t=0}.$$

Für $p = 1$ liefert dies den Ausdruck (I) des Herrn N. Ghosh [7] [6]).

Weitere Beispiele. a) Die für $(z_\nu) = (0)$ verschwindende Lösung von

$$w = z_0 + z_1 w + z_2 w^2 + \ldots + z_p w^p$$

---

[6]) Von einer eigentlichen „Verallgemeinerung" — wie es im Titel heißt — kann man allerdings bei seinem Hauptergebnis (I) kaum sprechen, da auch die gewöhnliche Formel anwendbar bleibt; doch ist die Umgestaltung unter Umständen für die Rechnung zweckmäßig (Beispiel: $e^w - 1 = z e^w$). Für $g_1(w) = 1$ reduziert sie sich übrigens auf die ursprüngliche Bürmannsche Reihe, wie für $g(w) = w$ auf die Lagrangesche; vgl. die geschichtlichen Bemerkungen bei Hass [9]. — A. a. O. [7] wird übrigens auch der Fall $p = 1$, $n = 2$ in Angriff genommen, ohne daß auch nur für diesen Fall die einfache Formel (8) erreicht wäre.

wird

$$w = z_0 \sum_{(\nu_k)} \frac{(\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + p\nu_p)!}{(1 + \nu_2 + 2\nu_3 + \ldots + (p-1)\nu_p)!\ \nu_1! \ldots \nu_p!}\ z_0^{\nu_2 + \ldots + (p-1)\nu_p} z_1^{\nu_1} \ldots z_p^{\nu_p}$$

erstreckt über alle Systeme $(\nu_1, \ldots, \nu_p)$ mit $\nu_1 + \ldots + \nu_p \geqq 0$; die Bedingung (6) wird bei $M_\nu = r^\nu$ diese: $\sum_{\nu=0}^{p} |z_\nu| r^\nu < r$. Jedenfalls ist also $|z_1| < 1$ zu nehmen.

b) Die verallgemeinerte *Keplersche Gleichung*[7])

$$v - \sum_{\nu=1}^{p} z_\nu \sin \nu v = \zeta$$

hat die Lösung

$$v = \zeta + \sum_{(\nu_k)} \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_p!} \frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}} \{\sin^{\nu_1}\zeta \cdot \sin^{\nu_2} 2\zeta \ldots \sin^{\nu_p} p\zeta\}\ z_1^{\nu_1} \ldots z_p^{\nu_p}.$$

Konvergenzbedingung: $\sum_{\nu=1}^{p} |z_\nu| M_\nu < r$, wenn $r > 0$ beliebig und

$$|\sin \nu(\zeta + w)| \leqq M_\nu \quad \text{für } |w| \leqq r \quad (\zeta \text{ fest}).$$

Für ζ reell kann man nehmen $M_\nu = ch\, \nu r$, alsdann $|z_\nu| < \varrho$, wenn ϱ der Bedingung $\varrho \leqq -\frac{r}{\sum_{\nu=1}^{p} ch\, \nu r}$ genügt. Das Maximum $\bar{r}$ der rechten Seite wird für die einzige Nullstelle der monoton von p gegen $-\infty$ abnehmenden Funktion $\sum_{\nu=1}^{p} (ch\, \nu r - r\, \nu\, sh\, \nu r)$ erreicht. $\varrho = 1 : \left(\sum_{\nu=1}^{p} \nu\, sh\, \nu \bar{r} \right)$ ist dann die günstigste auf diese Weise zu erhaltende Schranke.

§ 2.

Der Fall unendlich vieler Veränderlicher.

Unter Aufrechterhaltung der Voraussetzungen (2) und der Bezeichnung (5) betrachten wir jetzt an Stelle von (1) die Gleichung

$$g(w) - \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu g_\nu(w) = 0 \tag{11}$$

und beweisen

Satz 1. *Die positive Zahl r, die nichtnegativen Zahlen M_ν $(= 1, 2, \ldots)$ und die komplexen Zahlen z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mögen die Bedingungen erfüllen:*

$$\bar{g}(w) \neq 0 \quad \textit{und} \quad |f_\nu(w)| \leqq M_\nu \qquad \textit{für } |w| \leqq r, \tag{12}$$

[7]) Für die Fourierentwicklung der Lösung in Abhängigkeit von ζ vgl. Akimoff [1], insbesondere S. 1, 5/6.

sowie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu| M_\nu < r^n. \tag{13}$$

Dann hat (12) *genau* n *Lösungen* w_j *vom Betrage* $< r$. *Ist* $\psi(w)$ *für* $|w| < r$ *regulär, so läßt sich* $\sum_{j=1}^{n} \psi(w_j)$ *als in* (13) *absolut konvergente Potenzreihe nach den unendlich vielen Veränderlichen* z_ν *darstellen, wobei sich die Koeffizienten analog* (8) *bzw.* (10) *berechnen* (unten siehe (14) und die Bemerkung zum Falle $n = 1$) [8] [9]).

Beweis: Zunächst ist auf Grund der Voraussetzungen $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu f_\nu(w)$ in $|w| \leqq r$ hinsichtlich w gleichmäßig konvergent, also für $|w| < r$

$$w^n - \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu f_\nu(w)$$

eine reguläre Funktion von w (ebenso dann auch die linke Seite von (11)). Zu einem System (z_ν) läßt sich ferner ein $r' = r'(z_\nu) < r$ so angeben, daß auf $|w| = r'$ auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu f_\nu(w)| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu| M_\nu < r'^n. \tag{13'}$$

Somit hat (11) für jedes solche (z_ν) genau n Wurzeln in $|w| < r$; für diese ergibt sich dann wie oben

$$\sum_{j=1}^{n} \psi(w_j) = n\,\psi(0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r'} \psi'(t) \lg \left(1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu t^{-n} f_\nu(t)\right)^{-1} dt.$$

Wegen (13') kann auch jetzt der Logarithmus in eine Potenzreihe entwickelt werden; rechnet man die einzelnen Potenzen nach der Cauchyschen Multiplikationsregel aus, so entsteht eine absolut und für festes (z_ν) auch gleichmäßig auf $|t| = r'$ konvergente Doppelreihe, deren „Zeilen-

---

[8]) Es sei hier auf die Verwandtschaft mit einem Satz von Herrn Ostrowski [12], Satz A, S. 109—113 hingewiesen. Eine ähnliche Rolle wie unsere z_ν spielen dort sehr allgemeine Funktionen $A_\nu(P)$ eines Punktes P; es wird eine Zerlegung entsprechend dem Weierstrassschen Vorbereitungssatz gewonnen, wobei die Koeffizienten im wesentlichen als Grenzwerte von Polynomfolgen der $A_\nu(P)$ erscheinen.

[9]) Für die *allgemeine* Theorie der Potenzreihen mit unendlich vielen Veränderlichen sowie für Sätze über unendliche Systeme impliziter Funktionen siehe A. Wintner [16], sowie die dort aufgeführte Literatur, insbesondere [7]) (Hilbert). Vergleiche auch die Bemerkungen zur gleichmäßigen Konvergenz, a. a. O., S. 244, 2. Absatz.

reihen“ unendliche Formen wachsender Dimension in den z_ν sind. Wir können also gliedweise integrieren und schreiben

$$\sum_{j=1}^{n} \psi(w_j) = n\,\psi(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{i_1,\ldots,i_\mu} \sum_{(k_1,\ldots,k_\mu)} C_{i_1,\ldots,i_\mu}^{(k_1,\ldots,k_\mu)} z_{i_1}^{k_1} \ldots z_{i_\mu}^{k_\mu},$$

(14)

wo $$C_{i,\ldots,i_\mu}^{(k_1,\ldots,k_\mu)} = \frac{(m-1)!}{(nm-1)!\,k_1!\ldots k_\mu!} \frac{d^{nm-1}}{dt^{nm-1}} \{\psi'(t) f_{i_1}^{k_1} \ldots f_{i_\mu}^{k_\mu}\}_{t=0}.$$

Dabei durchlaufen für jedes μ die Systeme $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ die abzählbare Menge aller Kombinationen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) je μ *verschiedener* positiver ganzer Zahlen, während nach Festlegung einer solchen für $(k_1, k_2, \ldots, k_\mu)$ noch alle Systeme (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) von positiven (nicht notwendig voneinander verschiedenen) ganzen Zahlen mit $\sum_{j=1}^{\mu} k_j = m$ zu nehmen sind. Die Reihe konvergiert bei beliebiger Anordnung als einfache Reihe absolut für alle (z_ν), die (13) erfüllen. *Gleichmäßige* Konvergenz ist auf Grund der Herleitung offenbar gesichert in jedem Bereich $|z_\nu| \leqq \varrho_\nu$, wenn die nichtnegativen Konstanten ϱ_ν die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_\nu M_\nu < r^n$$

erfüllen, aber nicht etwa in einem Bereich

$$\sum |z_\nu| M_\nu \leqq r_1^n < r^n\ ^{10}).$$

Für $n = 1$ ist natürlich auch die Darstellung (10) übertragbar.

§ 3.

Umkehrung Dirichletscher Reihen.

Wir betrachten jetzt eine Dirichletsche Reihe der Gestalt

$$z = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{\lambda_\nu s} \quad \text{mit} \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots \to \infty,\ a_1 \neq 0,$$

die eine linke Halbebene absoluter Konvergenz besitzt. Vermöge

$$z - a_0 = a_1 z'; \quad \lambda_1 s = s'; \quad \frac{a_{\nu+1}}{a_1} = A_\nu; \quad \frac{\lambda_{\nu+1} - \lambda_1}{\lambda_1} = \alpha_\nu$$

erhalten wir (nach Weglassung der Striche) die Gleichung

(15) $$z = e^s \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{\alpha_\nu s}\right); \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \to \infty.$$

---

[10]) Anders für die *einfache* Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} F_m(z_1, \ldots, z_\nu, \ldots)$, deren Glieder die (ausgerechnet zu denkenden) Summen der genannten Zeilenreihen sind!

Wir zeigen:

Satz 2. *Bei geeigneter Wahl von $\varrho > 0$ und $r > 0$ gibt es zu jedem Punkt der Windungsfläche des $\lg z$, für den $0 < |z| < \varrho$, genau eine Lösung s der Gleichung* (15) *mit der Eigenschaft*

$$\Re(s) < \lg \varrho + r. \tag{16}$$

Für diese ist, wenn $\lg z$ den betreffenden Wert auf der Fläche bedeutet, $s - \lg z = w$ als „irreguläre Potenzreihe" darstellbar, die aus einer gewöhnlichen Potenzreihe in unendlich vielen Veränderlichen z mit explizit bekannten Koeffizienten durch $z_\nu = z^{\alpha_\nu} = e^{\alpha_\nu \lg z}$ hervorgeht. Das Bild von $\Re(s) < \lg \varrho + r$ bedeckt also das durch den Kreis $|z| = r$ und seinen Mittelpunkt aus der Windungsfläche ausgebohrte Stück schlicht, und die dieser Abbildung entsprechende, auf dem Windungsflächenstück eindeutige Umkehrfunktion wird durch die genannte irreguläre Potenzreihe vollständig dargestellt[11]).

Zum Beweis zeigen wir zunächst, daß bei geeigneter Wahl von r, ϱ für jedes solche z und jeden Zweig des Logarithmus genau eine Lösung vorhanden ist, die der schärferen ((16) nach sich ziehenden) Bedingung

$$|s - \lg z| < r \tag{16'}$$

genügt. Hierzu setzen wir in (15) $s = \lg z + w$ und haben dann die entsprechende Behauptung für die Gleichung

$$e^{-w} - 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu z^{\alpha_\nu} e^{\alpha_\nu w} = 0 \tag{17}$$

zu beweisen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächt wieder die Gleichung (11) unter den speziellen Annahmen

$$g(w) = e^{-w} - 1; \quad g_\nu(w) = A_\nu e^{\alpha_\nu w},$$

wodurch der dortigen Voraussetzungen (2) bei beliebigem R und $n = 1$ genügt wird. Es wird

$$f_\nu(w) = \frac{A_\nu w e^{\alpha_\nu w}}{e^{-w} - 1}.$$

Wir können und wollen r zwischen 0 und 2 so annehmen, daß in $|w| \leqq r$ $|w\colon (e^{-w} - 1)| \leqq 2$: dann kann $M_\nu = 2|A_\nu| e^{\alpha_\nu r}$ genommen werden. Überdies soll es für einen späteren Zweck so eingerichtet werden, daß

$$\left(\lg\left(1 + \frac{r}{2}\right)\right)^2 + \left(\arcsin \frac{r}{2}\right)^2 < r^2, \tag{18}$$

---

[11]) Auch für den naheliegenden Fall, daß die Reihe (15) abbricht, so daß also ein Exponentialpolynom vorliegt, scheint diese Entwicklung noch nicht beachtet worden zu sein.

wo der lg reell, der arcsin den Hauptwert bedeutet; daß dies durch Verkleinerung von r erreichbar ist, folgt aus den Potenzreihen dieser Funktionen sofort. In

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |z_\nu| \, |A_\nu| \, e^{\alpha_\nu r} < r$$

gibt es also zu jedem (z_ν) genau eine Lösung mit $|w| < r$, und diese wird durch eine Potenzreihe vom Typ (14) dargestellt.

Nun strebt aber für $\sigma \to -\infty$ die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu| \, e^{\alpha_\nu \sigma} \tag{19}$$

bekanntlich nach Null, wird also z. B. $< r/2$ für $\sigma < \sigma^*$. Daher wird

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |z|^{\alpha_\nu} M_\nu = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu| \, e^{\alpha_\nu (r + \lg |z|)} < r,$$

sobald

$$|z| < e^{-r+\sigma^*} = \varrho;$$

alsdann kann also $z_\nu = z^{\alpha_\nu}$ genommen werden, und wir erhalten aus der soeben gewonnenen Lösung der spezialisierten Gleichung (11) eine solche von (15) mit $|w| < r$.

Es kann auch keine weitere Lösung dieser Art für diese letztere Gleichung geben, da eine solche durch $s = \lg z + w$ in eine entsprechende von (11) mit $z_\nu = z^{\alpha_\nu}$ übergehen würde.

Hat man nun für irgendein z mit $0 < |z| < \varrho$ eine Lösung, die nur (16) erfüllt (r, ϱ die soeben bestimmten Größen), so wird bei geeigneter Wahl des lg links

$$-s + \lg z = \lg \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{\alpha_\nu s}\right),$$

wo rechts der Hauptwert genommen werden soll. Es wird (vgl. (19))

$$|s - \lg z| = \left|\lg \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{\alpha_\nu s}\right)\right| < [(\lg(1 + r/2))^2 + (\arcsin r/2)^2]^{1/2} < r$$

wegen (18), d. h. die Bedingung (16)′ ist erfüllt, die Lösung ist also unter den von uns bestimmten enthalten.

Was nun die Darstellung der Koeffizienten betrifft, so folgt aus der Übertragung von (10) auf die Lösung von (11) bzw. (15)

$$s = \lg z + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{i_1, \ldots, i_\mu} \sum_{(k_1, \ldots, k_\mu)} \frac{1}{k_1! \ldots k_\mu!} B_{i_1, \ldots, i_\mu}^{(k_1, \ldots, k_\mu)} z^{k_1 \alpha_{i_1} + \ldots + k_\mu \alpha_{i_\mu}};$$

$$\begin{aligned} B_{i_1, \ldots, i_\mu}^{(k_1, \ldots, k_\mu)} &= -\left(-e^t \frac{d}{dt}\right)^{m-1} \left\{A_{i_1}^{k_1} \ldots A_{i_\mu}^{k_\mu} e^{(k_1 \alpha_{i_1} + \ldots + k_\mu \alpha_{i_\mu} + 1) t}\right\}_{t=0} \\ &= (-1)^m \prod_{j=1}^{m-1} (k_1 \alpha_{i_1} + \ldots + k_\mu \alpha_{i_\mu} + j) \, A_{i_1}^{k_1} \ldots A_{i_\mu}^{k_\mu} \quad (m \geqq 2); \\ B_i^{(1)} &= -A_i \quad (m = 1). \end{aligned} \tag{20}$$

(20) konvergiert übrigens für $|z| \leqq \varrho_1 < \varrho$ gleichmäßig, da mit $\varrho_\nu = \varrho_1^{a_\nu}$ die Bedingung $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_\nu M_\nu < r$ erfüllt ist. Die Exponenten $\sum_{\lambda=1}^{n} k_\lambda \alpha_{i_\lambda}$ lassen sich nach der Größe abzählen; die Reihe geht bei der entsprechenden Anordnung der Glieder in eine irreguläre Potenzreihe nach den allgemeinen Potenzen z^{β_ν}, oder wenn man vermöge $z = e^Z$ lokal uniformisiert, in eine Dirichletsche Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{\beta_\nu Z}$ über, die für $\Re(Z) < \lg \varrho$ absolut konvergiert. Diese Reihen sind dann zugleich asymptotische für $z \to 0$ auf der Windungsfläche bzw. $\Re(Z) \to -\infty$. Schließlich wird $S = e^s$ selbst eine absolut konvergente Dirichletreihe, wie durch Einsetzen in die Exponentialreihe ohne weiteres klar wird.

Zieht man jetzt noch den Satz heran, daß jede gewöhnliche Dirichletreihe mit nur positiven Exponenten und einer Halbebene absoluter Konvergenz dort eine analytische fastperiodische Funktion darstellt[12]), so folgt ohne weitere Benutzung von Hilfssätzen aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen für unseren Sonderfall der *Bohrsche Umkehrsatz*[13]), der besagt, daß $S = e^s$ als Funktion von Z fastperiodisch wird; in unserem Falle — der insbesondere die Riemannsche ζ-Funktion einschließt — hat sich darüber hinaus ergeben, daß auch die Dirichletreihe $S(Z)$ wieder dem gleichen Typ absoluter Konvergenz angehört.

§ 4.

Entwicklungen nach allgemeinen Skalen.

Eine entsprechende Rolle wie die allgemeinen Potenzen in (17) werden im folgenden gewisse komplexwertige Funktionen $\varphi_\nu(P)$ eines Punktes P spielen, der in einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ mit dem ihr nicht angehörigen Häufungspunkt Π variabel sei. Hierbei nehme man entweder an, daß $\mathfrak{M} + \Pi$ ein metrischer Raum sei, oder allgemeiner (im Anschluß an Ostrowski [12], S. 107/108), daß in $\mathfrak{M}$ ein System von Teilmengen $\mathfrak{M}_\sigma$ $(0 \leqq \sigma < \infty)$ — die etwa als „$\mathfrak{M}$"-Umgebungen von Π bezeichnet werden können — derart definiert sei, daß für $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ stets

$$\mathfrak{M}_{\sigma_2} \subseteq \mathfrak{M}_{\sigma_1} \subseteq \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M},$$

und der Durchschnitt aller $\mathfrak{M}_\sigma$, aber kein einzelnes $\mathfrak{M}_\sigma$ leer ist. $\lim_{P \to \Pi} f(P) = A$ bedeutet dann: $|f(P) - A| < \varepsilon$ für $P < \mathfrak{M}_\sigma$, sobald $\sigma \geqq \sigma_\varepsilon$; auch gleichmäßige Konvergenz hinsichtlich eines Parameters t

[12]) H. Bohr, [3], Satz 5, Corollar.
[13]) Derselbe [4], vgl. auch [5], S. 93/94.

kann jetzt für eine Funktion $f(P;t)$ in zu der üblichen analoger Weise definiert werden.

Wir fordern nun von der Funktionenfolge $\varphi_\nu(P)$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ dieses:

(I) $\varphi_\nu(P) \neq 0$ auf $\mathfrak{M}$; $\varphi_0(P) = 1$.

(II) Bei festem Index k und festem $P_0 \prec \mathfrak{M}$ gelte jeweils *gleichmäßig für alle* $\nu > k$:

$$\lim_{P \to \Pi} \frac{\varphi_\nu(P)}{\varphi_\nu(P_0)} : \varphi_k(P) = 0.$$

(III) Die Folge (φ_ν) enthalte stets mit $\varphi_\varkappa$ und φ_λ auch das Produkt $\varphi_\varkappa \varphi_\lambda$ [14]).

Vorgelegt sei nunmehr die Gleichung

$$g(w) - \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(w)\, \varphi_\nu(P) = 0. \tag{21}$$

Wir beweisen

Satz 3. *In Gleichung* (21) *mögen die Funktionen* $g_\nu(w)$, $g(w)$ *die Voraussetzungen* (2), *die* $\varphi_\nu(P)$ *die Forderungen* (I), (II), (III) *erfüllen; ferner sei die Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu |\varphi_\nu(Q_0)|$ *wenigstens für ein* $Q_0 \prec \mathfrak{M}$ *und ein* r *konvergent, wo* r, M_ν (12) *erfüllen. Für eine geeignete* $\mathfrak{M}$*-Umgebung* $\mathfrak{U}$ *von* Π *gibt es dann zu jedem* $P \prec \mathfrak{U}$ *genau* n *Lösungen* w_j *mit* $|w_j| < r$. *Ist* $\psi(w)$ *für* $|w| < r$ *regulär, so läßt sich* $\sum_{j=1}^{n} \psi(w_j)$ *in eine für* $P \prec \mathfrak{U}$ *absolut konvergente, zugleich für* $P \to \Pi$ *asymptotische Reihe nach den* $\varphi_\nu(P)$ *entwickeln.*

Zum *Beweis* vorerst folgende *Hilfsbetrachtung*: Man schließt aus (I), (II) (auch ohne (III)), daß aus der absoluten Konvergenz von

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(P) = f(P)$$

in $\mathfrak{U}$ die asymptotische Darstellung durch die Reihe folgt [15]). In der Tat wird mit

$$f(P) - \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \varphi_\nu(P) = R_{k+1}(P),$$

---

[14]) Die φ_ν bilden also eine (stark spezialisierte) „Skala mit Multiplikation" im Sinne von Herm. Schmidt [15] (dort ist $\mathfrak{M}$ speziell als Teil der komplexen Zahlebene, Π als der unendlich ferne Punkt angenommen, die Definitionen sind jedoch ohne weiteres auf den jetzigen Fall übertragbar).

[15]) Daß dies bei absolut konvergenten Reihen nach „Skalenfunktionen" (definiert durch I, II, a. a. O. [15], S. 49) ohne Zusatzannahmen wie (II) nicht der Fall zu sein braucht, folgt aus der Perronschen Widerlegung einer Kroneckerschen Behauptung: [13], S. 100 ff.

wenn P_0 irgendein Punkt von $\mathfrak{U}$,

$$\left|\frac{R_{k+1}(P)}{\varphi_k(P)}\right| \leqq \sum_{\nu=k+1}^{\infty} |a_\nu \varphi_\nu(P_0)| \left|\frac{\varphi_\nu(P)}{\varphi_\nu(P_0)\ \varphi_k(P)}\right| \leqq \delta \sum_{\nu=k+1}^{\infty} |a_\nu \varphi_\nu(P_0)|$$

für alle $P < \mathfrak{B}^{(k,\,\delta)} \subseteq \mathfrak{U}$, wenn $\delta > 0$ beliebig klein vorgegeben, also auch

$$\left|\frac{R_{k+1}(P)}{\varphi_k(P)}\right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad P < \mathfrak{B}^{(k,\,\delta_\varepsilon)}.$$

Nun seien r, Q_0 entsprechend der Voraussetzung fixiert. Wegen (II) für $k = 0$ ist dann für alle $\nu > 0$

$|\varphi_\nu(P)| < \varepsilon\,|\varphi_\nu(Q_0)|$, wenn nur $P < \mathfrak{U}^{(\varepsilon)}(\Pi)$, es ist also, wenn wir $z_\nu = \varphi_\nu(P)$ nehmen, wegen der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu |\varphi_\nu(Q_0)|$ die Voraussetzung (13) erfüllt, sobald ε klein genug ist. Nun folgt ein Teil der Behauptung sofort aus Satz 1, der Rest auf grund von (III) durch Umordnung der Reihe mit Rücksicht auf die Hilfsbetrachtung.

Bemerkung 1. Wir legen Gewicht auf den Nachweis der *asymptotischen Darstellung* über die bloße Konvergenz hinaus, da erst dadurch gewährleistet wird, daß die Reihe über das Verhalten der impliziten Funktionen für $P \to \Pi$ unmittelbar Auskunft gibt. Von Anwendungen wird man vorzugsweise den Fall im Auge haben, daß $\mathfrak{M}$ ein Gebiet der komplexen Zahlebene, Π z. B. der Punkt ∞ ist, an dem die $\varphi_\nu(z)$ (alle oder zum Teil) singulär sind. $\sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z)$ hat dann, wie leicht zu sehen, jedenfalls *dann* gleichfalls ∞ zum singulären Punkt, wenn nicht alle Koeffizienten verschwinden und, falls a_q als erster $\neq 0$ ausfällt, für kein positives ganzes N gilt

$$\lim_{z \to \infty} z^N \varphi_q(z) = A \neq 0.$$

Bemerkung 2. Die Forderung (III) schränkt die zugelassenen Skalen stark ein; trotzdem ist Satz 3 weit über den Fall der allgemeinen Potenzen z^α bzw. Exponentialfunktionen $e^{-\alpha z}$ hinaus anwendbar. Als Beispiel sei genannt:

$$\varphi_\nu(z) = e^{-\alpha_\varkappa z} z^{\varkappa - \lambda},$$

worin sich die ganzen Zahlen $\varkappa$, λ für jedes ν aus der eindeutig bestimmten Darstellung $\nu = \frac{\varkappa(\varkappa+1)}{2} + \lambda$ mit $0 \leqq \lambda \leqq \varkappa$ berechnen; weiter sei hierbei

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{\varkappa+1} - \alpha_\varkappa \geqq c > 0 \quad (\varkappa = 0, 1, \ldots),$$

und schließlich sei jede Summe $\alpha + \alpha_\mu$ wieder ein α_τ. Für $\mathfrak{M}$ kann mit $z = x + iy$ die Menge $x > 1$, $|y| \leqq e^{\Psi(x)}$ genommen werden ($\Psi(x) = o(x)$ für $x \to +\infty$), als Umgebung von Π in $\mathfrak{M}$ der Durchschnitt mit jeder rechten Teilhalbebene $x - 1 > \sigma \geqq 0$ definiert werden. (I), (III) sind offenbar erfüllt, aber auch (II), wie eine kleine Rechnung lehrt.

Schriftenverzeichnis.

[1] Akimoff, M., Sur les fonctions de Bessel a plusieurs variables, Journ. de la Soc. Phys.-Math. de Léningrade II, 1 (1928), S. 1—30.
[2] Bieberbach, L., Lehrbuch der Funktionentheorie I, 3. A. (1930).
[3] Bohr, H., Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III. Dirichletentwicklung analytischer Funktionen. Acta Math. 47 (1926), S. 237—281.
[4] Derselbe, On the inverse function of an analytic almost periodic function. Ann. of Math. 32 (1931), S. 247—260.
[5] Derselbe, Fastperiodische Funktionen. Ergebnisse der Math. I, 5 (1932).
[6] Germay, R. H. J., Application de la méthode des résidus à la généralisation de la formule de Lagrange. Bull. de la Soc. royale des Sciences de Liége 1934, No. 1/2.
[7] Ghosh, N., On a generalization of Lagrange's inversion formula. Bull. of the Calcutta Math. Soc. 19 (1928), S. 21—24.
[8] Goursat, Cours d'analyse II, 4. éd. (1925).
[9] Hass, P., Die Bürmannsche Reihe, ihre Ableitung, Bedeutung und Geschichte. Mitteilungen der Math. Ges. Hamburg 6 (1926), S. 163—189.
[10] Hermite, Ch., Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables. Comptes rendus de l'Ac. des Sciences 60 (1865); Oeuvres II, S. 319—346.
[11] Hurwitz-Courant, Funktionentheorie 3. A. (1931).
[12] Ostrowski, A., Über algebraische Funktionen von Dirichletschen Reihen. Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 98—133.
[13] Perron, O., Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. Journ. f. reine u. ang. Math. 34 (1908), S. 95—143.
[14] Poincaré, H., Sur les résidus des intégrales doubles. Acta Math. 9 (1885), S. 321—380.
[15] Schmidt, Herm., Über asymptotische Entwicklungen mit allgemeiner Skala. Vortragsauszug, Jahresber. d. Deutschen Math. V. 44 (1934), S. 49—51.
[16] Wintner, A., Upon a theory of infinite systems of non linear implicit and differential equations. Amer. Journ. of math. 53 (1931) S. 241—257.
[17] Wirtinger, W., Über den Weierstraßschen Vorbereitungssatz. Journ. f. reine u. ang. Math. 158 (1927), S. 260—267.

(Eingegangen am 11. Januar 1935.)

Zur geometrischen Variationsrechnung.

3. Mitteilung.

Das Variationsproblem der F_m im Riemannschen R_n und eine Verallgemeinerung des Gauß-Bonnetschen Satzes.

Von

A. Duschek in Wien.

W. Mayer und der Verfasser haben kürzlich gezeigt[1]), daß man aus dem Verhalten des sogenannten Eulerschen Vektors in einer Kurvenschar eine ganze Reihe wichtiger differentialgeometrischer Sätze erschließen kann. Im folgenden werden analoge Untersuchungen über den Eulerschen Vektor einer einparametrigen Schar von m-dimensionalen Flächen F_m durchgeführt, allerdings von vornherein unter Beschränkung auf den Riemannschen R_n als Operationsraum. Auch hier steht wieder eine allgemeine Formel für die Ableitung des Eulerschen Vektors nach dem Scharparameter im Mittelpunkt der Untersuchung. Diese Formel ist selbstverständlich aufs engste verknüpft mit dem Ausdruck für die zweite Variation der F_m im Riemannschen R_n und ist somit eine Art Verallgemeinerung einiger Formeln, die vor mehreren Jahren von E. Bortolotti[2]) aufgestellt wurden.

In der erwähnten Abhandlung zeigten wir, daß man aus der entsprechenden Formel, wenn man sie auf Kurven des Riemannschen R_2 anwendet, einen verhältnismäßig einfachen Beweis des Gauß-Bonnetschen Satzes gewinnen kann. Die Vermutung lag nahe, daß man aus der allgemeinen Formel mittels analoger Methoden eine Verallgemeinerung dieses wichtigen Satzes der Flächentheorie erhalten könne; und das ist in der Tat der Fall. Allerdings zeigt sich ein wesentlicher, aber offenbar in der Natur der Sache begründeter Unterschied: Während im zweidimensionalen die zum Beweis benutzte Kurvenschar in der Endformel nicht mehr erscheint, bleibt die entsprechende F_m-Schar im mehrdimensionalen erhalten, d. h. es erscheinen in der Endformel Größen, die von dieser Schar abhängen. Ein weiterer Unterschied wird an Ort und Stelle besprochen.

---

[1]) Zur geometrischen Variationsrechnung, 2. Mitteilung. Monatshefte für Math. u. Physik **40** (1933), S. 294—308.

[2]) E. Bortolotti, Mem. Acc. Bologna ser. VII, t. V (1927/28), S. 43—48; und Giornale mat. di Battaglini **66** (1928), S. 153—191.

§ 1.

Der Eulersche Vektor einer F_m-Schar im R_n.

Wir betrachten eine einparametrige Schar[3])

(1, 00) $$x_i = x_i(u_\alpha, \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, m < n)$$

m-dimensionaler Flächen F_m im Riemannschen R_n mit dem Maßtensor $g_{ik}(x_j)$. Die F_m (1, 00) sollen einen gemeinsamen Rand R haben, so daß längs R der Vektor

(1, 01) $$\zeta^i = \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}$$

identisch in ε verschwindet. R begrenzt auf jeder F_m ein Gebiet G vom Inhalt

(1, 02) $$J(\varepsilon) = \int_G do = \int_G \sqrt{\gamma}\, du_1 du_2 \ldots du_m,$$

worin γ die Diskriminante des Maßtensors

(1, 03) $$_{\alpha\beta}\gamma = g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial u_\beta}$$

der F_m bedeutet. Für die erste Variation von (1, 02) findet man

$$J'(\varepsilon) = \int_G \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial \varepsilon}\, du_1 du_2 \ldots du_m.$$

Nun ist

$$\frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2}\, {}_{\alpha\beta}\gamma \frac{\partial\, {}_{\alpha\beta}\gamma}{\partial \varepsilon} \sqrt{\gamma}$$

und wegen (1, 03)

(1, 03 1) $$\frac{\partial\, {}_{\alpha\beta}\gamma}{\partial \varepsilon} = 2 g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\varepsilon} \frac{\partial x_k}{\partial u_\beta} = 2 g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\mathfrak{d}\zeta^k}{\mathfrak{d} u_\beta},$$

also

(1, 03 2) $$J'(\varepsilon) = \int_G {}_{\alpha\beta}\gamma \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\mathfrak{d}\zeta_i}{\partial u_\beta}\, do;$$

diesen Ausdruck kann man in bekannter Weise mittels einer partiellen Integration umformen; wegen $\zeta_i = 0$ längs R folgt

(1, 04) $$J'(\varepsilon) = -\int_G {}_{\alpha\beta}\gamma \frac{D^2 x_i}{D u_\alpha D u_\beta} \zeta_i\, do.$$

---

[3]) Die Indizes von Größen der F_m (des R_n) sind vorn und griechisch (hinten und lateinisch) geschrieben; also laufen griechische Indizes stets von 1 bis m, lateinische von 1 bis n. Absolute Differentiation bezüglich ${}_{\alpha\beta}\gamma$ ist mit δ, solche bezüglich g_{ik} mit $\mathfrak{d}$ und die verallgemeinerte absolute Differentiation bezüglich g_{ik} *und* ${}_{\alpha\beta}\gamma$ mit D bezeichnet. Die Christoffelsymbole $\left\{ {\alpha\ \beta \atop \varrho} \right\}_\gamma$, bzw. $\left\{ {i\ k \atop r} \right\}_g$ beziehen sich auf die Maßtensoren ${}_{\alpha\beta}\gamma$, bzw. g_{ik}.

Wir benutzen im folgenden die Abkürzungen

$$(1,05)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} = {}_\alpha\eta^i, \qquad \frac{D^2 x_i}{Du_\alpha Du_\beta} = {}_{\alpha\beta}\eta^i = {}_{\beta\alpha}\eta^i.$$

Unter dem Eulerschen Vektor verstehen wir

$$(1,06)\qquad \boxed{\varrho^i = -\,{}^{\alpha\beta}\gamma \frac{D^2 x_i}{Du_\alpha Du_\beta} = -{}^{\alpha}_{\alpha}\eta^i};$$

statt (1,04) kann man daher schreiben

$$(1,07)\qquad J'(\varepsilon) = \int_G \varrho^i \zeta_i \, do.$$

Soll die Fläche $\varepsilon = 0$ Extremale sein, so muß $J'(0) = 0$ sein, woraus in bekannter Weise[4])

$$(1,08)\qquad \varrho^i(0) = 0$$

folgt; es sind also (1,08) die Eulerschen Differentialgleichungen. Das Verschwinden des Eulerschen Vektors charakterisiert also die Minimal-F_m.

${}_{\alpha\beta}\eta^i$ heißt nach Bompiani der Krümmungstensor der F_m des R_n; er steht, als Vektor des R_n angesehen, auf der F_m senkrecht, da

$$(1,09)\qquad {}_{\alpha\beta}\eta^i \, {}_\varrho\eta_i = 0$$

ist[5]). Für die F_2 des euklidischen R_3 ist

$$(1,10)\qquad \varrho_i = -\,2H\nu_i,$$

wobei ν_i der (normierte) Normalvektor und H die mittlere Krümmung der Fläche ist.

Für die zweite Variation folgt aus (1,08)

$$(1,11)\qquad J''(\varepsilon) = -\int_G \frac{\mathfrak{d}\,\varrho^i}{\mathfrak{d}\,\varepsilon}\zeta_i \, do - \int_G \varrho^i \Big(\frac{\mathfrak{d}\,\zeta_i}{\mathfrak{d}\,\varepsilon} do + \zeta_i \frac{\partial do}{\partial \varepsilon}\Big);$$

für $\varepsilon = 0$ erhält man wegen (1,08)

$$(1,12)\qquad J''(0) = -\int_G \frac{\mathfrak{d}\,\varrho^i(0)}{\mathfrak{d}\,\varepsilon}\zeta_i \, do.$$

§ 2.

Berechnung von $\frac{\mathfrak{d}\,\varrho^i}{\mathfrak{d}\,\varepsilon}$.

So wie die zweite Variation (1,12) ist ganz allgemein das Verhalten des Eulerschen Vektors in der Schar (1,00) in erster Linie bestimmt durch seine (absolute) Ableitung nach dem Scharparameter ε. Bei ihrer Berechnung sehen wir vom Variationsproblem (1,02) ganz ab, auch die

[4]) Vgl. hierzu Duschek-Mayer, Differentialgeometrie II, Kap. V.

[5]) Duschek-Mayer, Differentialgeometrie II, S. 158.

Voraussetzungen (1,08) und $\zeta^i = 0$ längs R lassen wir fallen. Gegeben ist nur die Schar (1,00) und der Eulersche Vektor (1,06). Die etwas verwickelte Rechnung ist im folgenden nicht mit allen Einzelheiten wiedergegeben, doch soll der Gang wenigstens soweit angedeutet werden, daß die fehlenden Schritte ohne weiteres zu ergänzen sind. Wir stellen einige einfache Hilfsformeln voran[3]):

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \zeta^q}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} = \frac{D^2 \zeta^q}{D u_\alpha D u_\beta} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\, \beta \\ \tau \end{matrix} \right\}_\gamma \frac{\mathfrak{d} \zeta^q}{\mathfrak{d} u_\tau}, \tag{2,00}$$

$$\frac{\mathfrak{d}^2 x_q}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} = {}_{\alpha\beta}\eta^q + \left\{ \begin{matrix} \alpha\, \beta \\ \tau \end{matrix} \right\}_\gamma {}_\tau\eta^q, \tag{2,01}$$

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\varepsilon} \frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} = \frac{\mathfrak{d}^2 \zeta^i}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} + R^i_{.rjs}\, {}_\alpha\eta^r\, {}_\beta\eta^s\, \zeta^j, \tag{2,02}$$

wobei $R^i_{.rjs}$ der Krümmungstensor im R_n ist,

$$\frac{\partial\, {}^{\alpha\beta}\gamma}{\partial \varepsilon} = - {}^{\alpha\lambda}\gamma\, {}_{\beta\mu}\gamma \left(\frac{\mathfrak{d}\, \zeta_r}{\mathfrak{d} u_\lambda}\, {}_\mu\eta^r + \frac{\mathfrak{d}\, \zeta_r}{\mathfrak{d} u_\mu}\, {}_\lambda\eta^r \right) \tag{2,03}$$

und

$$\left[\begin{matrix} \alpha\, \beta \\ \varrho \end{matrix} \right]_\gamma = g_{pq}\, \varrho\eta^p \frac{\mathfrak{d}^2 x_q}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta}. \tag{2,04}$$

Aus (1,06) oder

$$- \varrho^i = {}^{\alpha\beta}\gamma\, {}_{\alpha\beta}\eta^i \tag{2,05}$$

folgt zunächst

$$- \frac{\mathfrak{d}\, \varrho^i}{\mathfrak{d}\varepsilon} = \frac{\partial\, {}^{\alpha\beta}\gamma}{\partial \varepsilon}\, {}_{\alpha\beta}\eta^i + {}^{\alpha\beta}\gamma \left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\varepsilon} \frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} u_\alpha \mathfrak{d} u_\beta} - {}_\lambda\eta^i \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \begin{matrix} \alpha\, \beta \\ \lambda \end{matrix} \right\}_\gamma - \left\{ \begin{matrix} \alpha\, \beta \\ \tau \end{matrix} \right\}_\gamma \frac{\mathfrak{d}\, \zeta^i}{\mathfrak{d} u_\tau} \right)$$

und daraus wegen (2,00) bis (2,03)

$$- \frac{\mathfrak{d}\, \varrho^i}{\mathfrak{d}\varepsilon} = - 2\, {}^\alpha_\beta\eta^{i\,\beta}\eta \frac{\mathfrak{d}\, \zeta_r}{\mathfrak{d} u_\alpha} + {}^{\alpha\beta}\gamma \frac{D^2 \zeta^i}{D u_\alpha D u_\beta} + R^i_{.rjs}\, A^{rs} \zeta^j - \Phi^i, \tag{2,06}$$

wobei

$$A^{rs} = {}^{\alpha\beta}\gamma\, {}_\alpha\eta^r\, {}_\beta\eta^s \tag{2,07}$$

und

$$\Phi^i = {}^{\alpha\beta}\gamma\, {}_\lambda\eta^i \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ \begin{matrix} \alpha\, \beta \\ \lambda \end{matrix} \right\}_\gamma \tag{2,08}$$

ist. Wir haben vor allem Φ^i umzuformen. Unter Benutzung von (2,00) bis (2,04) und (1,09) erhält man

$$\begin{aligned} \Phi^i &= {}^{\alpha\beta}\gamma \left({}_\mu\eta^i \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\begin{matrix} \alpha\, \beta \\ \mu \end{matrix} \right]_\gamma + {}_\lambda\eta^i \left[\begin{matrix} \alpha\, \beta \\ \mu \end{matrix} \right]_\gamma \frac{\partial\, {}^{\lambda\mu}\gamma}{\partial \varepsilon} \right) \\ &= {}^\alpha_\alpha\eta^r \frac{\mathfrak{d}\, \zeta_r}{\mathfrak{d} u_\sigma}\, {}_\sigma\eta^i + A^i_j \left({}^{\alpha\beta}\gamma \frac{D^2 \zeta^j}{D u_\alpha D u_\beta} + R^j_{.rps}\, A^{rs} \zeta^p \right). \end{aligned}$$

Trägt man diesen Ausdruck in (2, 06), so folgt die Endformel

$$(2,09)\qquad \boxed{\frac{\mathfrak{d}\,\varrho^i}{\mathfrak{d}\,\varepsilon} = \left(2\overset{\alpha}{\beta}\eta^i\,\overset{\beta}{\alpha}\eta^r + \overset{\beta}{\alpha}\eta^r\,\overset{\alpha}{\beta}\eta^i\right)\frac{\mathfrak{d}\,\zeta_r}{\mathfrak{d}\,u_\alpha} + \left(A^i_j - \delta^i_j\right)\left({}^{\alpha\beta}\gamma\,\frac{D\,\zeta^j}{Du_\alpha\,Du_\beta} + R^j{}_{rps}A^{rs}\zeta^p\right)}.$$

Nimmt man hier $m = 1$ und setzt $u_1 = t$, $do = ds$, so wird

$${}_{11}\gamma = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,\quad {}^{11}\gamma = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2,\quad {}_1\eta^i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i,\quad {}^1\eta^i = {}^{11}\gamma\,\dot{x}_i = \frac{dt}{ds}\frac{dx_i}{ds} = \frac{dt}{ds}x'_i,$$

$${}_{11}\eta^i = \frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d}\,t^2} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d^2t}{ds^2}\dot{x}_i.$$

Zur letzten Formel sei bemerkt, daß für $m = 1$

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}_\gamma = \frac{dt}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right),$$

also

$$\frac{D^2\lambda^i}{Dt^2} = \frac{\mathfrak{d}^2\lambda^i}{\mathfrak{d}\,t^2} - \left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}_\gamma\frac{\mathfrak{d}\,\lambda^i}{\mathfrak{d}\,t} = \frac{\mathfrak{d}^2\lambda^i}{\mathfrak{d}\,t^2} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d^2t}{ds^2}\frac{\mathfrak{d}\,\lambda^i}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\mathfrak{d}^2\lambda^i}{\mathfrak{d}\,s^2}$$

ist. Ferner gilt noch

$${}^1_1\eta^i = {}^{11}\gamma\,{}_{11}\eta^i = \frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d}\,s^2} = -\varrho^i,\quad A^{ik} = x'_i x'_k,\quad A^i_j = g_{kj}x'_i x'_k$$

und man erhält aus (2, 09) ohne Schwierigkeit die Formel, die Mayer und ich a. a. O. für Kurven aufgestellt haben, allerdings nicht unter Beschränkung auf den Riemannschen R_n.

§ 3.

Normalvariationen. Der Fall $n = m + 1$. Anwendungen.

Wir sprechen von Normalvariationen, wenn

$$(3,00)\qquad {}_\alpha\eta^i\,\zeta_i = 0$$

gilt. Die ε-Kurven sind dann orthogonale Trajektorien der Schar (1, 00). Es folgt

$$(3,01)\qquad \frac{\mathfrak{d}\,\zeta_i}{\mathfrak{d}\,u_\beta}\,{}_\alpha\eta^i + \zeta_i\,{}_{\alpha\beta}\eta^i = 0.$$

Setzt man

$$(3,02)\qquad \overset{\alpha}{\beta}\eta^i\,\overset{\beta}{\alpha}\eta^k = mC^{ik}$$

und

$$(3,03)\qquad -\varrho^k = \overset{\alpha}{\alpha}\eta^k = mH^k,$$

so folgt aus (2, 09)

$$(3,04)\qquad \boxed{\frac{\mathfrak{d}\,\varrho^i}{\mathfrak{d}\,\varepsilon} = -2mC^{ik}\zeta_k + m\,{}^\alpha\eta^i H^k + \left(A^i_j - \delta^i_j\right)\left({}^{\alpha\beta}\gamma\,\frac{D^2\zeta^j}{Du_\alpha\,Du_\beta} + R^j{}_{rps}A^{rs}\zeta^p\right)}.$$

Nehmen wir weiter an, daß $n = m + 1$ ist, was hier ja keine wesentliche Einschränkung bedeutet, so vereinfacht sich dieser Ausdruck

ganz bedeutend. Ist ν^i der normierte Normalvektor der F_m im R_{m+1}, also $\nu^i \nu_i = 1$ und

(3,05) $$\nu_i \, {}_\alpha\eta^i = 0,$$

so folgt

(3,06) $${}_{\alpha\beta}\eta^i = {}_{\alpha\beta}b \, \nu^i;$$

die ${}_{\alpha\beta}b$ sind ein symmetrischer Tensor der F_m (Haupttensor, 2. Grundform). Aus (3,02) erhält man

(3,07) $$C^{ik} = C \nu^i \nu$$

mit

(3,08) $$\boxed{C = \frac{1}{m} \, {}_{\alpha\beta}b \, {}^{\alpha\beta}b};$$

wir wollen diese Invariante der F_m ihre Casoratikrümmung nennen. Für die F_2 des euklidischen R_3 fällt sie mit dem von Casorati eingeführten Krümmungsmaß zusammen, nämlich mit

$$2H^2 - K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

Dabei sind R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien, H und K mittlere und Gaußsche Krümmung der F_2.

Aus (3,03) folgt

(3,09) $$H^k = H \nu^k$$

mit

(3,10) $$\boxed{H = \frac{1}{m} \, {}^{\alpha}_{\alpha}b}.$$

H nennen wir die mittlere Krümmung der F_m.

Ferner gilt, da wir Normalvariationen betrachten

(3,11) $$\zeta^i = \varphi \nu^i.$$

Die Gleichungen (3,06) sind die erste Gruppe der Ableitungsgleichungen der F_m (verallgemeinerte Gaußsche Gleichungen). Die zweite Gruppe, die verallgemeinerten Weingartenschen Gleichungen, sind Gleichungen für die Ableitungen des Normalvektors ν^i. Aus $\nu^i \nu_i = 1$ folgt zunächst

(3,12) $$\nu_i \frac{\mathfrak{d} \nu^i}{\mathfrak{d} u_\alpha} = 0$$

und somit

(3,13) $$\frac{\mathfrak{d} \nu^i}{\mathfrak{d} u_\alpha} = {}_\alpha{}^{\lambda}C \, {}_\lambda\eta^i.$$

Aus (3,05) folgt wegen (3,06)

(3,14) $$\frac{\mathfrak{d} \nu^i}{\mathfrak{d} u_\alpha} \, {}_\beta\eta^i = - \nu^i \, {}_{\alpha\beta}\eta_i = - \, {}_{\alpha\beta}b$$

und daraus und aus (3, 13)

$$ {}_{\alpha}^{\lambda}C = -{}_{\alpha}^{\lambda}b $$

Somit sind

$$ \frac{\mathfrak{d}\, v^i}{\mathfrak{d}\, u_\alpha} = -{}_{\alpha}^{\lambda}b\ {}_{\lambda}\eta^i \tag{3, 15} $$

die Weingartenschen Gleichungen.

Weiter gilt [6])

$$ \Delta_{\varepsilon\beta}\,{}_{\alpha}\eta^i = {}_{\cdot\alpha\beta\varepsilon}^{\tau}R\,{}_{\tau}\eta^i - R^i_{\cdot rkj}\,{}_{\alpha}\eta^r\,{}_{\beta}\eta^k\,{}_{\varepsilon}\eta^j, \tag{3, 16} $$

wobei ${}_{\cdot\alpha\beta\varepsilon}^{\tau}R$ der Riemannsche Krümmungstensor auf der F_m und

$$ \Delta_{\varepsilon\beta}\,{}_{\alpha}\eta^i = \frac{D_{\alpha\beta}\,\eta^i}{D\,u_\varepsilon} - \frac{D_{\alpha\varepsilon}\,\eta^i}{D\,u_\beta} \tag{3, 17} $$

ist. Wegen (3, 06) und (3, 15) folgt daraus

$$ \Delta_{\varepsilon\beta}\,{}_{\alpha}\eta^i = \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}b}{\delta\,u_\varepsilon} - \frac{\delta_{\alpha\varepsilon}b}{\delta\,u_\beta}\right) v^i - ({}_{\alpha\beta}b\ {}_{\varepsilon\lambda}b - {}_{\alpha\varepsilon}b\ {}_{\beta\lambda}b)\,{}^{\lambda}\eta^i. \tag{3, 18} $$

Überschiebung von (3, 16) und (3, 18) mit ${}_{\gamma}\eta_i$ und ν_i gibt zwei weitere Formeln, nämlich

$$ {}_{\alpha\varepsilon}b\ {}_{\beta\gamma}b - {}_{\alpha\beta}b\ {}_{\gamma\varepsilon}b = {}_{\gamma\alpha\beta\varepsilon}R - R_{irkj}\,{}_{\gamma}\eta^i\,{}_{\alpha}\eta^r\,{}_{\beta}\eta^k\,{}_{\varepsilon}\eta^j \tag{3, 19} $$

und

$$ \frac{\delta_{\alpha\beta}b}{\delta\,u_\varepsilon} - \frac{\delta_{\alpha\varepsilon}b}{\delta\,u_\beta} = -R_{irkj}\,{}_{\alpha}\eta^r\,{}_{\beta}\eta^k\,{}_{\varepsilon}\eta^j\,\nu^i. \tag{3, 20} $$

Die letzteren Gleichungen sind die Verallgemeinerung der Codazzischen Gleichungen. Schreibt man sie in der Form

$$ \frac{\delta_{\alpha\varepsilon}b}{\delta\,u_\beta} = \frac{\delta_{\alpha\beta}b}{\delta\,u_\varepsilon} + R_{\nu rks}\,\nu^p\,{}_{\alpha}\eta^r\,{}_{\beta}\eta^k\,{}_{\varepsilon}\eta^s, \tag{3, 21} $$

so folgt durch Überschiebung mit ${}^{\alpha\beta\gamma}$ wegen (3, 10)

$${}^{\alpha\beta\gamma}\frac{\delta_{\alpha\varepsilon}b}{\delta\,u_\beta} = \frac{\partial H}{\partial\,u_\varepsilon} + R_{\nu rks}A^{rk}\,\nu^p\,{}_{\varepsilon}\eta^s. \tag{3, 22} $$

Schließlich folgt aus (3, 11) wegen (3, 15)

$$ \frac{\mathfrak{d}\,\zeta^i}{\mathfrak{d}\,u_\alpha} = {}_{\alpha}\varphi\,\nu^i - \varphi\,{}_{\alpha}^{\lambda}b\ {}_{\lambda}\eta^i, \tag{3, 23} $$

wobei ${}_{\alpha}\varphi = \dfrac{\partial\,\varphi}{\partial\,u_\alpha}$ ist $\left(\text{analog im folgenden } {}_{\alpha\beta}\varphi = \dfrac{\delta^2\varphi}{\delta\,u_\alpha\,\delta\,u_\beta}\right)$ und

$$ \frac{D^2\,\zeta^i}{D\,u_\alpha\,D\,u_\beta} = {}_{\alpha\beta}\varphi\,\nu^i - ({}_{\alpha}\varphi\,{}_{\beta}^{\lambda}b + {}_{\beta}\varphi\,{}_{\alpha}^{\lambda}b)\,{}_{\lambda}\eta^i - \varphi\,{}_{\alpha}^{\lambda}b\ {}_{\beta\lambda}b\,\nu^i - \varphi\,\frac{\delta_{\alpha\lambda}b}{\delta\,u_\beta}\,\eta^i. \tag{3, 24} $$

---

[6]) Duschek-Mayer, Differentialgeometrie II, S. 163.

Setzt man die Ausdrücke (3,07), (3,09), (3,11), (3,23) und (3,24) in (3,04) ein, so folgt nach einigen Umformungen wegen

$$A^{ij}\,{}_\lambda\eta_j = {}_\lambda\eta^i \tag{3,25}$$

und (3,22)

$$\boxed{\frac{\mathfrak{d}\,\varrho^i}{\mathfrak{d}\,\varepsilon} = -(m\,\varphi\,C + \Delta\,\varphi)\,v^i + ({}_\lambda\varphi\,m\,H + \varphi\,R_{j\,r\,p\,s}\,A^{r\,s}\,v^p\,{}_\lambda\eta^j)\,{}^\lambda\eta_i - \varphi\,R^i_{.\,r\,p\,s}\,A^{r\,s}\,v^p} \tag{3,26}$$

worin noch

$$\Delta\,\varphi = {}^{\alpha\,\beta}\gamma\;{}_{\alpha\,\beta}\varphi = {}^{\alpha\,\beta}\gamma\,\frac{\delta^2\,\varphi}{\delta\,u_\alpha\,\delta\,u_\beta} \tag{3,27}$$

der zweite Beltramische Differentiator ist. Ferner folgt aus (3,03) und (3,09)

$$\varrho^i = -\,m\,H\,v^i, \tag{3,28}$$

also

$$\frac{\mathfrak{d}\,\varrho^i}{\mathfrak{d}\,\varepsilon} = -\,m\,\frac{\partial\,H}{\partial\,\varepsilon}\,v^i - m\,H\,\frac{\mathfrak{d}\,v^i}{\mathfrak{d}\,\varepsilon}. \tag{3,29}$$

Statt (3,26) kann man also auch schreiben

$$H\,\frac{\mathfrak{d}\,v^i}{\mathfrak{d}\,\varepsilon} + \frac{\partial\,H}{\partial\,\varepsilon}\,v^i = \left(\varphi\,C + \frac{1}{m}\,\Delta\,\varphi\right)v^i - H\,{}_\lambda\varphi\,{}^\lambda\eta^i + \frac{1}{m}\,\varphi\,R_{j\,r\,p\,s}\,A^{r\,s}\,v^p\,(g^{i\,j} - A^{i\,j}); \tag{3,30}$$

durch Überschiebung mit v_i folgt daraus

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,\varepsilon} = \varphi\,C + \frac{1}{m}\,\Delta\,\varphi + \frac{1}{m}\,\varphi\,R_{j\,r\,p\,s}\,A^{r\,s}\,v^j\,v^p; \tag{3,31}$$

ist σ die Bogenlänge auf den ε-Kurven, so gibt (3,11)

$$\varphi = \frac{d\,\sigma}{d\,\varepsilon} \tag{3,32}$$

und aus (3,31) wird

$$\boxed{\frac{\partial\,H}{\partial\,\sigma} = C + \frac{1}{m\,\varphi}\,\Delta\,\varphi + \frac{1}{m}\,R_{j\,r\,p\,s}\,A^{r\,s}\,v^j\,v^p} \tag{3,33}$$

Für die F_2 des euklidischen R_3 gibt (3,31)

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,\varepsilon} = (2\,H^2 - K)\,\varphi + \frac{1}{2}\,\Delta\,\varphi, \tag{3,34}$$

eine bekannte Formel für die zweite Variation von H[7]), bzw. (3,33)

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,\sigma} = 2\,H^2 - K + \frac{1}{2\,\varphi}\,\Delta\,\varphi. \tag{3,35}$$

---

[7]) W. Blaschke, Differentialgeometrie I (3. Aufl.), S. 258.

Ist hier $\varphi = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 1$, so handelt es sich um eine Schar von Parallelflächen und es wird $\Delta\varphi = 0$; ist außerdem die Fläche $\sigma = \varepsilon = 0$ eine Minimalfläche, so wird

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = -K_0, \tag{3,36}$$

wo K_0 die Gaußsche Krümmung der Fläche $\sigma = 0$ ist, oder

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{H}{\sigma} = -K_0. \tag{3,37}$$

Diese Relation ist das Analogon zu einer von Mayer und mir a. a. O.[1]) angegebenen Formel, die eine Art „innerer" Definition der Gaußschen Krümmung einer Fläche darstellt.

§ 4.

Einführung spezieller Koordinaten.

Wir betrachten wieder eine F_m-Schar

$$x_i = x_i(u_\alpha, \varepsilon) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1;\ \alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{4,00}$$

des Riemannschen R_{m+1}; die ε-Kurven seien orthogonale Trajektorien (Normalvariationen). Wir nehmen im R_{m+1} die Koordinaten

$$x_i = u_\alpha, \qquad x_{m+1} = \varepsilon, \tag{4,01}$$

dann wird

$$_\alpha\eta^i = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} = {}_\alpha\delta^i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = \alpha, \\ 0 & \text{für } i \neq \alpha, \end{cases} \tag{4,02}$$

$$g_{\alpha\beta} = {}_{\alpha\beta}\gamma, \quad g_{m+1\,\alpha} = 0, \quad g_{m+1\,m+1} = \varphi^2 = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)^2, \tag{4,03}$$

$$g^{\alpha\beta} = {}^{\alpha\beta}\gamma, \quad g^{m+1\,\alpha} = 0, \quad g^{m+1\,m+1} = \frac{1}{\varphi^2} = \left(\frac{d\varepsilon}{d\sigma}\right)^2, \tag{4,04}$$

$$\nu^\alpha = 0, \quad \nu^{m+1} = \frac{1}{\varphi}; \quad \nu_\alpha = 0, \quad \nu_{m+1} = \varphi. \tag{4,05}$$

Ferner gilt, wie ohne Schwierigkeit nachzurechnen

$$\begin{cases} \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\}_g = \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\}_\gamma, \quad \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ m+1\end{matrix}\right\}_g = -\frac{1}{2\varphi^2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\varepsilon}, \\ \left\{\begin{matrix}\alpha\, m+1\\ \gamma\end{matrix}\right\}_g = \frac{1}{2} g^{\gamma\varrho}\frac{\partial g_{\alpha\varrho}}{\partial\varepsilon}, \quad \left\{\begin{matrix}\alpha\, m+1\\ m+1\end{matrix}\right\}_g = \frac{1}{\varphi}\,{}_\alpha\varphi, \\ \left\{\begin{matrix}m+1\ m+1\\ \gamma\end{matrix}\right\}_g = -\varphi\,{}^\gamma\varphi = -\varphi\, g^{\gamma\varrho}\,{}_\varrho\varphi, \\ \left\{\begin{matrix}m+1\ m+1\\ m+1\end{matrix}\right\}_g = \frac{1}{\varphi}\,{}_{m+1}\varphi = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2}. \end{cases} \tag{4,06}$$

Daraus folgt weiter

$$_{\alpha\beta}\eta^\varrho = 0, \quad {}_{\alpha\beta}\eta^{m+1} = \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ m+1\end{matrix}\right\}_g = -\frac{1}{2\varphi^2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\varepsilon}. \tag{4,07}$$

Somit ist

$$_{\alpha\beta}b = -\frac{1}{2\varphi}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \sigma}. \tag{4,08}$$

Schließlich wird

$$A^{\varrho\sigma} = g^{\varrho\sigma}, \quad A^{\varrho\, m+1} = 0, \quad A^{m+1\; m+1} = 0, \tag{4,09}$$

und somit

$$R_{jrps}A^{rs}\nu^j\nu^p = \frac{1}{\varphi^2}R_{m+1\,\varrho\;m+1\,\sigma}g^{\varrho\sigma} = \frac{1}{\varphi^2}R_{m+1\,i\;m+1\,j}g^{ij} = \frac{1}{\varphi^2}R^i_{\cdot\,m+1\,i\;m+1}. \tag{4,10}$$

Wir bezeichnen mit

$$K_\nu = \frac{R^i_{\cdot\,piq}\nu^p\nu^q}{m\,g_{pq}\nu^p\nu^q} \tag{4,11}$$

die Richtungsinvariante der Riemannschen Krümmung des R_{m+1} in der Normalenrichtung ν^i; wegen

$$g_{pq}\nu^p\nu^q = 1$$

gibt der Vergleich mit (4, 10)

$$R_{prqs}A^{rs}\nu^p\nu^q = m\,K_\nu. \tag{4,12}$$

Somit folgt aus (3, 33)

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial \sigma} = C + K_\nu + \frac{1}{m\varphi}\Delta\varphi}. \tag{4,13}$$

Noch eine weitere Umformung von (3, 33) ist möglich. Aus $\nu^i\nu_i = 1$ folgt

$$\nu^i\frac{\mathfrak{d}\nu_i}{\mathfrak{d}u_\alpha} = 0 \tag{4,14}$$

und daraus durch nochmalige Differentiation wegen (4, 05)

$$-\frac{\mathfrak{d}\nu_i}{\mathfrak{d}u_\alpha}\frac{\mathfrak{d}\nu^i}{\mathfrak{d}u_\beta} = \nu^i\frac{D^2\nu_i}{Du_\alpha Du_\beta} = \frac{1}{\varphi}\frac{D^2\nu_{m+1}}{Du_\alpha Du_\beta}. \tag{4,15}$$

Nun ist allgemein

$$\frac{D^2\nu_i}{Du_\alpha Du_\beta} = \frac{\partial^2\nu_i}{\partial u_\alpha\partial u_\beta} - \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \omega\end\right\}_\gamma\frac{\partial\nu_i}{\partial u_\omega} - \left\{\begin{matrix}ip\\ r\end\right\}_g\frac{\partial\nu_r}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_p}{\partial u_\beta}, \tag{4,16}$$

woraus

$$\frac{D^2\nu_\varrho}{Du_\alpha Du_\beta} = 0 \tag{4,17}$$

und wegen (4, 05) und (4, 06)

$$\frac{D^2\nu_{m+1}}{Du_\alpha Du_\beta} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_\alpha\partial u_\beta} - \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \omega\end\right\}_\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial u_\omega} - \frac{1}{\varphi}\varphi_\alpha\varphi_\beta \tag{4,18}$$

folgt. Überschiebung mit ${}^{\alpha\beta}\gamma = g^{\alpha\beta}$ gibt

$$(4,19)\qquad {}^{\alpha\beta}\gamma \frac{D^2 \nu_{m+1}}{D u_\alpha D u_\beta} = \Delta \varphi - \frac{1}{\varphi} \nabla \varphi ,$$

worin

$$(4,20)\qquad \nabla \varphi = {}^{\alpha\beta}\gamma \, {}_\alpha\varphi \, {}_\beta\varphi$$

der erste Beltramische Differentiator ist. Wegen (3,15) folgt

$$(4,21)\qquad {}^{\alpha\beta}\gamma \frac{\mathfrak{d} \nu_i}{\mathfrak{d} u_\alpha} \frac{\mathfrak{d} \nu^i}{\mathfrak{d} u_\beta} = {}^{\alpha\beta}\gamma \, {}^{\lambda}_{\alpha}b \, {}_\lambda\eta_i \, {}^{\mu}_{\beta}b \, {}_\mu\eta^i = {}^{\alpha\beta}\gamma \, {}_{\lambda\mu}\gamma \, {}^{\lambda}_{\alpha}b \, {}^{\mu}_{\beta}b = m C$$

und somit ist

$$(4,22)\qquad \frac{1}{\varphi} \Delta \varphi = \frac{1}{\varphi^2} \nabla \varphi - m C.$$

In (3,33) eingetragen gibt das

$$(4,23)\qquad \frac{\partial H}{\partial \sigma} = \frac{1}{m \varphi^2} \nabla \varphi + R_{prqs} A^{rs} \nu^p \nu^q$$

oder wegen (4,12)

$$(4,24)\qquad \boxed{\frac{\partial H}{\partial \sigma} = K_\nu + \frac{1}{m \varphi^2} \nabla \varphi} .$$

§ 5.

Die Verallgemeinerung des Gauß-Bonnetschen Satzes.

Wir bezeichnen wie bisher mit

$$(5,00)\qquad do = \sqrt{\gamma}\, du_1 du_2 \ldots du_m$$

das m-dimensionale Volumelement der F_m, das wir im folgenden kurz das Flächenelement nennen wollen, und mit

$$(5,01)\qquad dv = do\, d\sigma = \varphi \sqrt{\gamma}\, du_1 du_2 \ldots du_m d\varepsilon$$

das $(m+1)$-dimensionale Volumelement des R_{m+1}. Wir knüpfen an (4;13) an. Multiplikation mit dv gibt

$$(5,02)\qquad \frac{\partial H}{\partial \sigma} dv = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \sqrt{\gamma}\, du_1 du_2 \ldots du_m d\varepsilon = \Big(C + \frac{1}{m \varphi} \Delta \varphi + K_\nu\Big) dv.$$

Nun ist

$$(5,03)\qquad \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \sqrt{\gamma} = \frac{\partial (H \sqrt{\gamma})}{\partial \varepsilon} - H \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial \varepsilon}$$

und wegen (1,031), (3,25) und (3,10)

$$(5,04)\qquad \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial \varepsilon} = \sqrt{\gamma}\, {}^{\alpha}\eta^i \frac{\mathfrak{d} \zeta_i}{\mathfrak{d} u_\alpha} = \sqrt{\gamma}\, {}^{\alpha}\eta^i ({}_\alpha\varphi \, \nu_i - \varphi \, {}^{\lambda}_{\alpha}b \, {}_\lambda\eta_i) = - \sqrt{\gamma}\, \varphi \, {}^{\alpha}_{\alpha}b$$
$$= - m \varphi H \sqrt{\gamma}.$$

Somit ist (5,03)

$$(5,05)\qquad \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \sqrt{\gamma} = \frac{\partial (H \sqrt{\gamma})}{\partial \varepsilon} + m \varphi H^2 \sqrt{\gamma}$$

und (5,02) wird

$$\frac{\partial (H\sqrt{\gamma})}{\partial \varepsilon}\, du_1\, du_2 \ldots du_m\, d\varepsilon = \Big(C - m H^2 + \frac{1}{m\varphi}\, \Delta\varphi + K_\nu\Big)\, dv. \tag{5,06}$$

Es sei nun

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) = 0 \tag{5,07}$$

die Gleichung einer geschlossenen F_m, die im folgenden mit R bezeichnet sei und ein Gebiet G, das von der Schar $x_i(u_\alpha, \varepsilon)$ schlicht überdeckt wird, berandet. Integriert man (5,06) über G, so folgt wegen

$$\int_G \frac{\partial (H\sqrt{\gamma})}{\partial \varepsilon}\, du_1\, du_2 \ldots du_m\, d\varepsilon = -\int_R H\sqrt{\gamma}\, du_1 du_2 \ldots du_m = -\int_R H\, do \tag{5,08}$$

aus (5,06)

$$\boxed{\int_R H\, do + \int_G \Big(C - m H^2 + \frac{1}{m\varphi}\, \Delta\varphi + K_\nu\Big)\, dv = 0}. \tag{5,09}$$

Dies ist die erste Form des verallgemeinerten Gauß-Bonnetschen Satzes. Man erkennt, daß er sich ganz wesentlich auf die F_m-Schar bezieht, worauf schon eingangs hingewiesen wurde. Etwas vollständiger wird die Analogie, wenn man annimmt, daß der Rand R von zwei Flächen F_m unserer Schar gebildet ist (etwa für $\varepsilon = \varepsilon_1$ und $\varepsilon = \varepsilon_2$). Dann wird der Integrand im ersten Glied von (5,09) die mittlere Krümmung des Randes selbst.

Für $m = 1$ geht (5, 09) direkt in den Gauß-Bonnetschen Satz der Flächentheorie über. Es wird ja $H = \varkappa$ (geodätische Krümmung), $C = \varkappa^2$ und $K_\nu = K$ (Gaußsche Krümmung). Ferner geht $\frac{1}{m\varphi}\, \Delta\varphi$ über in $\frac{d\varepsilon}{d\sigma} \frac{d^2}{ds^2} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$; dieser Ausdruck läßt sich integrieren und gibt den konstanten Betrag 2π, sofern der Rand glatt ist[8]).

Statt (5,09) kann man wegen (4,22) auch

$$\boxed{\int_R H\, do + \int_G \Big(\frac{1}{m\varphi^2}\, \nabla\varphi - m H^2 + K_\nu\Big)\, dv = 0} \tag{5,10}$$

schreiben. Eine dritte Gestalt ergibt sich, wenn man zunächst (3,19) mit ${}^{\alpha\beta\gamma}\, {}^{\varepsilon\gamma\gamma}$ überschiebt; wegen (3,08) und (3,10) folgt

$$m^2 H^2 - m C = m K_F - R_{irkj} A^{ik} A^{rj}, \tag{5,11}$$

wo

$$K_F = \frac{1}{m}\, {}^{\alpha\beta\gamma}\, {}^{\varepsilon\gamma\gamma}\, \gamma_{\alpha\beta\varepsilon} R$$

---

[8]) Duschek-Mayer, Differentialgeometrie I, S. 206. Vgl. auch die a. a. O. Anm. [1]) gegebene Herleitung.

der Krümmungsskalar (Ortsinvariante der Krümmung) der F_m ist. Für das zweite Glied in (5, 11) rechts erhält man, wieder unter Benutzung der speziellen Koordinaten (4, 01)

$$\begin{aligned} R_{irkj}A^{ik}A^{rj} &= R_{\alpha\varrho\beta\sigma}g^{\alpha\sigma}g^{\varrho\beta} = R_{i\varrho k\beta}g^{ik}g^{\varrho\beta} - R_{m+1\,\varrho\;m+1\,\beta}g^{\varrho\beta}\frac{1}{\varphi^2} \\ &= R_{irkj}g^{ik}g^{rj} - R_{i\,m+1\,k\,m+1}g^{ik}\cdot\frac{1}{\varphi^2} - R_{m+1\,r\,m+1\,k}\frac{1}{\varphi^2}g^{rk} \\ &= (m+1)K_R - 2mK_v, \end{aligned}$$

wo K_R der Krümmungsskalar des R_{m+1} ist. Aus (5, 11) wird also

$$C - mH^2 = \frac{m+1}{m}K_R - K_F - 2K_v, \tag{5, 13}$$

und statt (5, 09) erhält man

$$\boxed{\int_R H\,d\bar{o} + \int_G \left(\frac{m+1}{m}K_R - K_F - K_v + \frac{1}{m\varphi}\Delta\varphi\right)dv = 0}. \tag{5, 14}$$

(Eingegangen am 7. Februar 1935.)

The asymptotic behaviour of

$$F(z) = \int_{a-0}^{b+0} e^{zt}\, d\, g(t).$$

By

Rosalind Cecily Young in London.

Introduction.

The following is an essay, of a simple kind, in a combination of real variable and complex variable technique which bears on special problems in both fields, — in the theory of Fourier and Fourier-Stieltjes Transforms and in the study of an analytic function near an isolated essential singularity.

In the Laplace-Stieltjes integral

$$F(z) = \int_{a-0}^{b+0} e^{tz}\, d\, g(t), \tag{0.1}$$

$g(t)$ denotes a complex-valued function of the real variable t, with bounded variation in (a, b). When $g(t)$ is purely discontinuous with a finite number of discontinuities α_n, $F(z)$ has the form

$$\sum_{1}^{N} C_n e^{\alpha_n z}, \tag{0.2}$$

a particular case of the sums

$$\sum_{1}^{N} P_n(z)\, e^{\alpha_n z}$$

considered by Polya [1]), where the factors $P_n(z)$ are polynomials. When $g(t)$ is absolutely continuous,

$$g(t) = \int^{t} f(u)\, d\, u,$$

the function (0.1) reduces to the form

$$\mathfrak{F}(z) = \int_{a}^{b} e^{tz} f(t)\, d\, t \tag{0.3}$$

investigated by E. C. Titchmarsh [2]). The properties [3]) of the maximum modulus and zeros found by Titchmarsh for (0.3) are closely parallel to

[1]) S. Polya, Bayer. Akad. Wiss. 1920, p. 285 seq.

[2]) E. C. Titchmarsh, Proc. Lond. Math. Soc. 25 (1926), p. 283 seq.

[3]) For summary, see below (4.1).

those for the sums (0.2). It was natural to presume that properties thus shared by two opposite extreme types of the Laplace-Stieltjes integral (0.1) would extend to the whole class. That this is so will first be shewn (§ 1). The proof rests on a simple transformation formula (1.6) showing that every function (0.1) not of the form Ce^{az} is the product of a function (0.3) by a linear factor.

Titchmarsh used the fact that the expression of an integral function in the form (0.3), when possible, is essentially unique. This remains true for (0.1), — see (1.4).

Beyond this, the paper concerns subject-matter not, or only distantly, touched on by Titchmarsh: — distribution of values in the z-plane and asymptotic behaviour on lines going to infinity. The latter gains its chief interest when the wider class (0.1) is considered.

Owing to the Stieltjes notation, there is now no distinction of form between $F(z)$ and $F(z) - w$. Information on the *distribution of values* of $F(z)$ is therefore immediate.

It is seen (Theorem 2 and Corollary), that all values other than $w_0 = g(+0) - g(-0)$ are equally distributed. The value w_0 is deficient in the sense of R. Nevanlinna if and only if the point 0 is an exterior or isolated endpoint of the effective range (a, b), (when, in accordance with the Nevanlinna hypothesis, it is also an asymptotic value). Its deficiency may have any value not exceeding 1. Certain results on Borel directions for $F(z)$ also follow (2.8).

Titchmarsh established as a Lemma the asymptotic relations

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ \Re z \leqq 0}} e^{-az}\mathfrak{F}(z) = \lim_{\substack{z \to \infty \\ \Re z \geqq 0}} e^{-bz}\mathfrak{F}(z) = 0, \tag{0.4}$$

coupled with the fact that when $a < c < b$, $e^{-cz}\mathfrak{F}(z)$ is unbounded on every ray other than the imaginary axis[4]). These relations indicate that all irregularities in the behaviour of $\mathfrak{F}(z)$ at infinity are smoothed out entirely in either closed half-plane $\Re z \geqq 0$ or $\Re z \leqq 0$ on multiplying by a suitable exponential. The completeness of this result rests on the fact (included in (0.4)) that $\mathfrak{F}(z)$ itself tends to 0 as z recedes along the imaginary axis. This is the Riemann-Lebesgue theorem in the theory of Fourier transforms.

Nothing so complete can be true of all functions (0.1), as shewn for instance by the simple case

$$F(z) = C_1 e^{az} + C_2 e^{bz} \qquad (a < b). \tag{0.5}$$

Here the two limits (0.4) are however still unique (equal to C_1, C_2 respectively) if each closed half-plane $\Re(z) \leqq 0$, $\Re z \geqq 0$, is replaced by

---

[4]) (a, b) must be the *effective* range for the integral.

any partial domain in which $\Re z$ *tends to infinity with* z. They are usually different and not zero.

It is easily shewn (3.3) that the same modified statement holds good for any function (0.1); we have merely to adapt in an obvious way the original proof of (0.4).

But in directions $\Re z = \text{const}$, the limits (0.4) for a function (0.1) are not necessarily unique. This anomaly is evidently not confined to special functions such as (0.5); in fact the smoother case is the exception. From a property of Fourier-Stieltjes transforms recently discussed by A. Rajchmann and S. Verblunsky, the limit as $z \to \infty$, $\Re z = \text{const}$, of the expression

$$e^{-cz} \int_{a-0}^{b+0} e^{tz}\, d\, g(t) \tag{0.6}$$

for the range (a, b), can only be unique, if the same is true for every partial range (α, β) instead of (a, b), (3.6). This places a heavy restriction on the integrator $g(t)$ in every part of the range (a, b). Continuity is not sufficient, as shewn by known examples of Fourier constants (3.10).

The relations (0.4) or (3.3), yield in general little direct information about $F(z)$, unless $a \leqq c \leqq b$. Also, since $e^{-cz} F(z)$ is of the same form as $F(z)$, they are properly part of a theory of distribution of paths of determination and indetermination for $F(z)$. This forms the main theme of my paper. The following is a summary of results. In the case of the less obvious properties, *theorems used in proofs* will be indicated by authors' names in brackets.

Finite tracts. $F(z)$ is bounded on the positive and negative imaginary axes. The corresponding two tracts of finite indetermination may be coincident ($F(z)$ bounded in a half-plane) or distinct ($F(z)$ unbounded in both half-planes). They include all paths on which $\Re z$ is bounded (Lindelöf). There is no further finite tract (Ahlfors).

$F(z)$ is expressible (in essentially only one way) as the sum of two functions of the class, bounded one in $\Re z \leqq 0$, the other in $\Re z \geqq 0$. Each is unbounded on every ray in the opposite half-plane, unless constant (Phragmen-Lindelöf).

Paths of determination. The number of tracts of finite determination for $F(z)$ may be 0, 1, or 2 (Riemann-Lebesgue, Menchoff and F. Riesz). These tracts include

(i) either *all* or *no* rays in $\Re z > 0$;

(ii) either all or none in $\Re z < 0$;

(iii) either *all* or *no* paths on which $\Re z$ is bounded (Radon)[5].

[5]) It is probable that any asymptotic path must be part of a tract of determination including a semi-axis (either real or imaginary).

$F(z)$ is the sum of two functions tending to 0, one as $\Re z \to +\infty$, the other as $\Re z \to -\infty$, and of the constant

$$w_0 = g(+0) - g(-0).$$

Asymptotic values. $F(z)$ cannot have two *different* asymptotic values (even when there are two distinct tracts of finite determination). The single possible value is w_0 (Verblunsky). It is therefore 0 unless $t = 0$ is one of the countable set of discontinuities of $g(t)$ in the range (a, b).

For the existence of an asymptotic value w_0, it suffices that $F(z_n) \to w_0$ for some sequence of points z_n placed at equal intervals δ, not too large, parallel to the imaginary axis (Rajchmann and Vitali).

Note. It may be worth while to mention expressly the group properties of our functions (0. 1): *every sum or product of such functions is of the same form.*

The case of a sum is trivial. For a product, we have [6])

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{zt}\,d\varphi(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt}\,d\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt}\,dg(t),$$

where $g(t)$ is the "Faltung" of $\varphi(t)$ and $\psi(t)$:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-u)\,d\psi(u).$$

The Faltung of $\varphi(t)$ and $\psi(t)$ must of course be taken in the "Young-Lebesgue" sense when both are discontinuous; otherwise it may be taken in the "Riemann" sense. By first principles, $g(t)$ has a total variation not exceeding the product of the total variations of $\varphi(t)$ and $\psi(t)$, and a finite effective range (a, b) contained in $(a_\varphi + a_\psi,\ b_\varphi + b_\psi)$, where $(a_\varphi,\ b_\varphi)$, $(a_\psi,\ b_\psi)$ are those of φ and ψ.

Actually $(a_\varphi + a_\psi,\ b_\varphi + b_\psi)$ is the exact effective range, the quickest verification being by (1. 12).

Obviously the same group properties belong to the smaller class (0. 3).

1. Definitions and first properties.

In the sequel, t is a real variable, $g(t)$ a complex-valued function of bounded variation, constant for $t < -k$ and for $t > k$ (but not for all t). Two such functions $g_1(t)$, $g_2(t)$ will be called equivalent if, for every t,

$$g_1(t-0) = g_2(t-0) + C, \qquad g_1(t+0) = g_2(t+0) + C.$$

The *standard function equivalent to* $g(t)$ is

$$\mathfrak{g}(t) = \tfrac{1}{2}\{g(t+0) + g(t-0)\} - \tfrac{1}{2}\{g(+0) + g(-0)\}. \tag{1.1}$$

The *effective range* (a, b) for $g(t)$ is the smallest closed interval on either side of which $\mathfrak{g}(t)$ is constant. The Stieltjes integrals of any continuous

---

[6]) Cp. S. Bochner, Fouriersche Integrale (1932), p. 68; or direct proof by a theorem on repeated Stieltjes integration, see L. C. Young, Theory of Integration, Cambridge Tract 21 (1927), p. 40, Theorem III.

function with respect to $g(t)$ and $\mathfrak{g}(t)$ are the same over any proper (closed or open or half-open) interval and reduces to the integral over the part of the range of integration contained in (a, b). A point t_0 is an *isolated point of the range* for $g(t)$ if $\mathfrak{g}(t)$ is constant in two intervals abutting at t_0, but discontinuous at t_0.

The Laplace-Stieltjes integral

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\, dg(t) = \int_{a-0}^{b+0} e^{tz}\, dg(t) \tag{1.2}$$

exists and is differentiable under the integral sign for every complex z; and

$$\left| \int_{a-0}^{b+0} e^{tz}\, dg(t) \right| \leqq \max_{(a \leqq t \leqq b)} |e^{tz}| \int_{a-0}^{b+0} |dg(t)|. \tag{1.3}$$

Hence it represents an integral function "of exponential type".

Uniqueness theorem. The integrator $g(t)$, and in particular the range (a, b), are essentially determinate when $F(z)$ is known; the standard equivalent function (1.1) *is*

$$\mathfrak{g}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ity} - 1}{y} F(-iy)\, dy, \tag{1.4}$$

taking the principal value of the integral on the right.

This is a known inversion theorem for Fourier-Stieltjes integrals [7]). A straightforward proof similar to that of Titchmarsh is easily devised, using classical properties of Stieltjes integrals (Theorem II, p. 36 and IV, p. 41, of the tract quoted under [6])).

Transformation formula. Let

$$G(t) = G(z_0, t) = e^{-tz_0} \int_{-\infty}^{t+0} e^{uz_0}\, dg(u). \tag{1.5}$$

Then we have identically

$$F(z) = e^{b(z-z_0)} F(z_0) + (z_0 - z) \int_a^b e^{tz} G(t)\, dt \tag{1.6}$$

and $G(t)$ is not constant $= C$ p. p. in an interval $\alpha < t < \beta$ unless $g(t)$ is equivalent to $Cz_0 t$ there.

Proof. (a) To deduce (1.6) from (1.2), observe that, since $g(t)$ is equivalent to $g(t+0) + A$, we may write

$$\int_{a-0}^{b+0} e^{tz}\, dg(t) = \int_{a-0}^{b+0} e^{t(z-z_0)}\, d\left\{ \int_{-\infty}^{t+0} e^{uz_0}\, dg(u) \right\}, \tag{1.7}$$

---

[7]) Cp. S. Bochner, ibid., p. 66, Satz 7.

by the iteration theorem for Stieltjes integrals (Theorem I, p. 40, of Tract). On integration by parts, this becomes

$$= e^{b(z-z_0)}\left\{\int_{a-0}^{b+0} e^{uz_0}\,dg(u)\right\} - \int_{a-0}^{b+0}\left\{\int_{-\infty}^{t+0} e^{uz_0}\,dg(u)\right\} d\,e^{t(z-z_0)}$$

$$= e^{b(z-z_0)}F(z_0) - (z-z_0)\int_a^b e^{tz}\left\{e^{-tz_0}\int_{-\infty}^{t+0} e^{uz_0}\,dg(u)\right\}dt$$

$$= e^{b(z-z_0)}F(z_0) + (z_0-z)\int_a^b e^{tz}G(t)\,dt,$$

whence (1.6).

(b) To see that $G(t)$ cannot be a constant C almost everywhere in an interval $(\alpha < t < \beta)$ unless $g(t)$ is equivalent to Cz_0t there, we use the identity

$$\int_{\alpha+0}^{v+0} dg(t) = \int_{\alpha+0}^{v+0} e^{-tz_0}\,d\left\{\int_{a-0}^{t+0} e^{uz_0}\,dg(u)\right\} \tag{1.8}$$

corresponding to (1.7) for $z = 0$. This gives, by partial integration, writing t for v,

$$g(t+0) - g(\alpha+0) = G(t) - G(\alpha) + z_0\int_\alpha^t G(u)\,du. \tag{1.9}$$

Now by (1.5), for every t,

$$G(t+0) = G(t).$$

Hence *if* $G(t) = C$ almost everywhere in $\alpha < t < \beta$, then $G(t+0) = G(t) = C$ everywhere in $\alpha < t < \beta$, or by (1.9),

$$g(t+0) - g(\alpha+0) = Cz_0(t-\alpha).$$

Hence Q. E. D.

Corollary 1. *If z_0 be a zero of $F(z)$ then*

$$\frac{F(z)}{z_0 - z} = \int_a^b e^{tz}G(t)\,dt = \mathfrak{F}(z), \tag{1.10}$$

where $G(t) = G(t, z_0)$ is a function of bounded variation in (a, b) not vanishing p. p. in any neighbourhood (α, β) of a or b.

In this case $G(a) = G(b) = 0$.

Now by the factorisation theory of integral functions of order 1, $F(z)$ must have at least one zero, unless it be of the form Ce^{Az}. Also $F(z)$ is bounded on the whole imaginary axis, by (1.3); hence, by the factorisation theory, if $F(z)$ has one zero it has an infinity, for the product of a polynomial by an exponential cannot be bounded on a whole straight line. Thus the transformation (1.10) may be effected in an infinity of ways for every function (1.2) not of the form

$$Ce^{Az}.$$

To characterise this exception in terms of the definition (1. 2), observe that A must be real (to insure boundedness on the imaginary axis) and that, for any complex C and real α,

$$C e^{\alpha z} = \int_{\alpha - 0}^{\alpha + 0} e^{tz} d g(t),$$

with

$$C = g(\alpha + 0) - g(\alpha - 0).$$

The exceptional functions thus coincide with the functions (1. 2) whose range (a, b) reduces to a single point. Further, by the uniqueness theorem, they admit of no other expression in the form (1. 2).

The integral $\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{F}(z, z_0)$ on the right in (1. 10) is an ordinary Laplace integral for the range (a, b), such as discussed by E. C. Titchmarsh. Its main properties[8]) thus extend at once to $F(z)$:

If $F(0) = 0$ take $z_0 = 0$ in (1. 10), we get

$$F(z) = - z \mathfrak{F}(z).$$

If $F(0) \neq 0$ and z_0 be any zero of $F(z)$, (1. 10) gives

$$\frac{F(z)}{F(0)} = \frac{\mathfrak{F}(z)}{\mathfrak{F}(0)} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right).$$

We infer

Theorem 1. When $g(t)$ has bounded variation, and finite effective range (a, b) not reducing to a point, the integral function

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} d g(t)$$

has perfectly regular growth of order 1 and mean type, with

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{r} = \max |a|, |b| \tag{1.11}$$

for the maximum modulus $M(r)$ of $F(z)$ on $|z| = r$ and

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r)}{r} = \frac{b - a}{\pi} \tag{1.12}$$

for the number $n(r)$ of zeros of $F(z)$ in $|z| \leqq r$.

Also

$$F(z) = \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) z^k e^{cz} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right),$$

where $c = \frac{a + b}{2}$ and the zeros z_n are in increasing order of moduli.

The series

$$\Sigma \Re \left(\frac{1}{z_n}\right)$$

---

[8]) Appendix, (4. 1).

is absolutely, and the series

$$\Sigma\, \Im\left(\frac{1}{z_n}\right)$$

non-absolutely, convergent.

Note 1. Theorem 1 may be proved directly by following the line of argument taken by Titchmarsh, instead of using his results in conjunction with the transformation formula (1. 10). The verification is somewhat laborious, as his argument is often intricate and appeals constantly to (0. 4), which must be replaced by the weaker form (3. 3) below.

2. Distribution of values.

Deficient values. Sums of functions of the form (1. 2) are again of that form. The integrator for the resultant is the sum of the integrators for the separate terms.

In particular, when $F(z)$ is of our form, so is

$$F(z) - w$$

for each complex w. The new range extends from the least to the greatest of the three numbers $a, b, 0$:

for every w, if $a < 0 < b$, or if 0 is a non-isolated endpoint of (a, b);

for every $w \neq 0$, if 0 is outside (a, b);

for every $w \neq w_0 = g(+0) - g(-0)$, if 0 is an isolated end-point of (a, b).

In the third case, $F(z) - w_0$ has a range (a', b') excluding the point 0; its integrator $g_1(t)$ is obtained from $g(t)$ by obliterating the isolated discontinuity at 0, e. g.

$$\begin{aligned} g_1(t) &= g(t) - g(-0) \quad \text{when} \quad t < 0, \\ &= g(t) - g(+0) \quad \text{when} \quad t > 0. \end{aligned}$$

In the second case, the exception is also $w_0 = g(+0) - g(-0)$, which happens then to be 0.

From Theorem 1 we now infer

Theorem 2. A function (1. 2) other than a constant assumes an infinity of times each value $w \neq w_0$, where

$$w_0 = g(+0) - g(-0).$$

The number $n(r, w)$ of times that $F(z) = w$ in $|z| < r$ is asymptotically the same for every $w \neq w_0$, with

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r, w)}{r} = L = \frac{1}{\pi} \max |a|, |b|, (b - a). \tag{2. 1a}$$

And

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r, w_0)}{r} = L_0 = \frac{1}{\pi}(b' - a'), \tag{2. 1b}$$

where (a', b') is the modified effective range for $g(t)$ when its possible dicontinuity at $t = 0$ is ignored.

The relations (2.1) determine Nevanlinna's *deficiency*[9]) of a value w for $F(z)$:

$$\delta(w) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, w)}{T(r)}, \tag{2.2}$$

(where $T(r)$ is the mean of $\overset{+}{\log}|F|$ on $|z| = r$).

When the ratio $\frac{n(r, w)}{r}$ tends to a unique limit $L(w)$ as $r \to \infty$, $\frac{N(r, w)}{r}$ tends to the same limit and the deficiency is given simply by

$$\delta(w) = 1 - CL(w) \tag{2.3}$$

where C is a constant independent of w, viz.

$$C = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{r}{T(r)}. \tag{2.4}$$

But by Nevanlinna's theorem[9]), the deficient values w for $F(z)$, (those for which $\delta(w) \neq 0$), are countable. Hence for $w \neq w_0$, we have $\delta(w) = 0$,

$$CL(w) = CL = 1 \tag{2.5}$$

and so

$$\delta(0) = 1 - \frac{L_0}{L}. \tag{2.6}$$

This gives

Corollary 2. The function $F(z)$ has no deficient values if $a < 0 < b$ or if 0 is a non-isolated end-point of the range; otherwise w_0 is its only deficient value[10]), with deficiency

$$\delta(0) = \min \frac{a'}{b'}, \frac{b'}{a'}. \tag{2.7}$$

Borel directions. Theorems 1 and 2 show that $F(z)$ has no value w exceptional in the sense of Borel, unless $F(z) = A e^{\alpha z} + B$, when B is the only exceptional value.

This property extends at once to the "Borel directions" of $F(z)$ of divergent order 1[11]). By a theorem of Valiron[12]) there are at least two such directions; from the absolute convergence of

$$\sum_0^\infty \Re \frac{1}{z_n(w)}$$

---

[9]) R. Nevanlinna, Fonctions méromorphes, p. 80.

[10]) In this case $F(z) \to 0$ in a half-plane [see (3.3) below] and 0 is also an asymptotic value, in accordance with the Nevanlinna hypothesis, ibid. pp. 94, 95.

[11]) Valiron's definition, Acta math. 52, p. 69, II.

[12]) Ibid., p. 92, XV.

and the non-absolute convergence of

$$\sum_0^\infty \frac{1}{z_n(w)}$$

for each w, it follows that $\arg z = \theta = \pm\frac{\pi}{2}$ are the only possible directions, and that one at least, and hence each, is devoid of an exceptional value.

Thus:

(2.8) For functions $F(z)$ other than $A e^{\alpha z} + B$, the imaginary semi-axes are Borel directions of divergent order 1 without an exceptional value.

A more precise inference from Theorems 1 and 2 is that the number of points $z_n(w)$ of moduli less than r in an angular neighbourhood of $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ is asymptotically equal to the total number in $|z| < r$, viz. Lr if $w \neq 0$, $L_0 r$ if $w = 0$, as $r \to \infty$. But here the two directions $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ occur together and cannot be separated so easily.

Note 2. The limit in (2.4) is really a unique one, since it is known that

$$T(r) = N(r, w) + O(\log r)$$

for almost all values of w [Nevanlinna, p. 82 [13])]. The relation thus obtained:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r)}{r} = L = \max|a|, |b|, (b-a), \tag{2.9}$$

may be compared with that relating to $\log M(r)$:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} = J = \max|a|, |b|.$$

This is an example of the fact that $T(r)$ and $\log M(r)$ behave similarly, and *may*, but *need not*, be asymptotically equal. Owing to the general inequality [Nevanlinna, p. 24, (1)]:

$$T(r) < \log M(r) < \frac{2+\delta}{\delta} T[(1+\delta)r],$$

which holds for each $\delta > 0$, we must in any case have

$$L \leqq J \leqq L \min \frac{(2+\delta)(1+\delta)}{\delta} = L(3+2\sqrt{2}).$$

This is obviously verified, since

$$2 < \pi < 3 + 2\sqrt{2}.$$

3. The asymptotic behaviour of $F(z)$.

Finite tracts. The following three cases occur, according to the position of the effective range (a, b) for the integrator $g(t)$:

---

[13]) Also J. E. Littlewood, Journ. Lond. Math. Soc. 5, 2 (1930), p. 85.

(i) $a \leqq b \leqq 0$: $F(z)$ *bounded in* $\Re z \geqq 0$;
(ii) $0 \leqq a \leqq b$: $F(z)$ *bounded in* $\Re z \leqq 0$;
(iii) $a < 0 < b$: $F(z)$ *is the sum of two non-constant functions of the class, one bounded in* $\Re z \geqq 0$, *the other in* $\Re z \leqq 0$.

(i) and (ii) are deduced directly from inequality (1.3), and (iii) follows, since

$$F(z) = \int_{-\infty}^{-0} e^{tz}\, d\, g(t) + \int_{+0}^{\infty} e^{tz}\, d\, g(t) + [g(+0) - g(-0)]. \tag{3.1}$$

Now it is obvious that *the expression of a given integral function as the sum of two others, bounded in two given complementary half-planes, if possible at all, is necessarily unique, except for additive constants.* For if $f_1(z) + f_2(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$ be two such expressions, the differences

$$f_1(z) - \varphi_1(z), \qquad \varphi_2(z) - f_2(z)$$

are bounded one in one half-plane, one in the other, hence (since they are equal), both in either, which is impossible unless they are constant. It follows that if neither of the two functions is constant, their sum is unbounded in each of the considered half-planes.

Hence, by the theorem of Phragmen and Lindelöf, since our functions have order 1, *in case* (iii) $F(z)$ *is unbounded on every ray other than the imaginary axis.*

Each function of our class is bounded on every path on which $\Re z$ is bounded. In case (iii) these paths form *two distinct finite tracts*; in cases (i) and (ii) they combine to form *a single finite tract* including a whole half plane.

In either case there can be *no further finite tract*; in other words a half-plane in which $F(z)$ is unbounded ($\Re z < 0$ in case (i), $\Re z > 0$ in case (ii), either in case (iii)) cannot be divided by a receding path on which $F(z)$ is bounded into two domains $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ in each of which $F(z)$ is unbounded. For by a trivial modification of an argument due to L. Ahlfors [14]) the existence of these domains would require

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{r^2} > 0$$

which is ruled out by (1.11).

Case (iii), with two distinct finite tracts, illustrates a slightly less delicate form of the property just used, viz. that the maximum modulus of an integral function with n distinct finite tracts satisfies the relation

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{r^{n/2}} > 0.$$

[14]) L. Ahlfors, Acta Soc. Sc. Fenn. A, I (1930), No. 9, pp. 21—25. Cp. below, Appendix (4.2).

This is here verified with $n = 2$. The same property also provides an alternative proof to the above. For in case (iii) ($F(z)$ unbounded in both half-planes), it implies that there is no finite tract not contiguous to the imaginary axis, since our functions have order 1; and the same follows when $F(z)$ is bounded in a half-plane, because $F(z) + F(-z)$ is then unbounded in both half-planes and of the same order.

Paths of determination.

α) *Paths on which* $\Re z \to \infty$. When $F(z)$ is of form (1.2), so is

$$e^{-cz}F(z)$$

for every real c:

$$e^{-cz}F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-c)z}\,dg(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\,dg(t+c).$$

The new integrator is a "translation" of the old; the new effective range is $(a-c,\ b-c)$, related to the point 0 as (a, b) is to c. Our results in case (iii) of this section thus translate as follows:

(3.2) *For every c interior to the effective range,*

$$e^{-cz}F(z)$$

is the sum of two non-constant functions of the form (1.2), *bounded one in* $\Re z \geqq 0$, *one in* $\Re z \leqq 0$; *it is* (*therefore*) *unbounded on every ray other than the imaginary axis.*

On the other hand, writing $z = x + iy$,

(3.3) *We have, uniformly in y,*

(a) $$\lim_{x \to -\infty} e^{-az}F(z) = g(a+0) - g(a-0),$$

(b) $$\lim_{x \to +\infty} e^{-bz}F(z) = g(b+0) - g(b-0).$$

Proof. Note first that each relation implies the other, on substituting $-t$ for t and $-z$ for z. Also

$$F(z) = \int_{-\infty}^{b-0} e^{tz}\,dg(t) + \int_{b-0}^{b+0} e^{tz}\,dg(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz}\,dg_1(t) + [g(b+0) - g(b-0)]\,e^{bz},$$

where $g_1(t)$ equal to $g(t)$ for $t < b$, and to $g(b-0)$ for $t \geqq b$, is continuous at b. Hence it suffices to consider the case in which $g(t)$ is continuous at b, and show that the limit in (b) is then uniformly 0.

Now inequality (1.3), applied to the two terms in

$$F(z) = \int_{a-0}^{b-\varepsilon} e^{tz}\, dg(t) + \int_{b-\varepsilon}^{b} e^{tz}\, dg(t)$$

gives

$$|e^{-bz}F(z)| \leqq e^{-\varepsilon x} \int_{a-0}^{b-\varepsilon} |dg(t)| + \int_{b-\varepsilon}^{b} |dg(t)|.$$

The right-hand side is independent of y and less than any given $\eta > 0$ when ε is fixed small enough to insure (by continuity of $g(t)$ at b)

$$\int_{b-\varepsilon}^{b} |dg(t)| < \eta/2,$$

and x large enough for

$$e^{-\varepsilon x} \int_{a-0}^{b} |dg(t)| < \eta/2.$$

Hence q. e. d. This is the exact analogue of the corresponding proof by Titchmarsh [15]).

(3.4) As (3.3) shows, $F(z)$ has a finite determination w when $\Re z \to +\infty$ if $b \leqq 0$, or when $\Re z \to -\infty$ if $0 \leqq a$; and if $a < 0 < b$, $F(z)$ is the sum (3.1) of a function of each of these kinds, with determination 0, and of constant w. In each case

$$w = g(+0) - g(-0).$$

(3.5) If $g(t)$ is discontinous at $t = b$, all paths on which $\Re z \to +\infty$ are paths of unique determination (infinite if $b > 0$). If $g(t)$ is discontinuous at $t = a$, all paths on which $\Re z \to -\infty$ are paths of unique determination (infinite if $a < 0$).

If $g(t)$ is continuous at both end-points of the range, however, $F(z)$ may oscillate infinitely in either direction of the real axis. Titchmarsh [16]) has constructed functions with an infinity of zeros on both halves of the real axis. Multiplied by a suitable exponential, to bring $t = 0$ inside the range, such a function becomes unbounded on both halves of the real axis by (3.2), the zeros remaining undisturbed.

β) *Paths on which $\Re z$ is bounded.* The asymptotic behaviour of $F(z)$ on a receding path on which $\Re z$ is bounded is determined in each half plane $\Im z > 0$, $\Im z < 0$ by its behaviour on any standard path of this type; this the following theorem shows:

---

[15]) Lemma (2.2), p. 288. See also M. L. Cartwright, Quart. Journ. Maths. Oxford Series, I, 1 (1930), 3.12.

[16]) E. C. Titchmarsh, loc. cit. L. M. S. Proc. pp. 291, 285.

Theorem 3a. When $F(z)$ tends to a (finite) limit w on some path Γ on which $\Re z$ is bounded and $\Im z \to +\infty$ (or $\Im z \to -\infty$), then $F(z)$ tends uniformly to w, as $\Im z \to +\infty$ (or $\Im z \to -\infty$), in every strip $|\Re z| \leqq k$.

Proof. If $F(z) \to w$ on Γ, then for any real c,

$$F_c(z) = e^{-cz}\{F(z) - w\}$$

tends to 0 on Γ.

Choose $c = c_1$, and $c = c_2$ (3.3) so that

$$\lim_{x \to +\infty} F_{c_1}(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} F_{c_2}(x) = 0.$$

The path Γ, which we may render free of double points and starting at $z = 0$, without further intersection with the real axis, then divides the half-plane $\Im z \geqq 0$ (or $\Im z \leqq 0$), into two parts; in the one $F_{c_1}(z)$, in the other $F_{c_2}(z)$, tends (uniformly) to 0 as $z \to \infty$, by Lindelöf's theorem.

Since in any strip $|\Re z| \leqq k$, both exponentials remain in moduli greater than some positive number, it follows that $F(z) - w$ tends uniformly to 0 in the strip.

The simplest standard path is the imaginary axis or a parallel line. The next theorem shows that it suffices to consider a certain sequence of points on such a line.

Theorem 3b. If, for some real δ of modulus less than $(b - a)$,

$$\lim_{n \to \infty} F(\zeta_0 + in\delta) = w, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

then

$$\lim_{y \to +\infty} F(\zeta_0 + iy\delta) = w.$$

Proof. The theorem reduces by change of origin for z and change of integrator to the case $w = 0$, $\zeta_0 = 0$, $\delta > 0$. The hypothesis becomes

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a-0}^{b+0} e^{in\delta t}\,dg(t) = 0.$$

In virtue of a lemma, given by A. Rajchmann for real integrators, and true for complex[17]), it follows that for every bounded measurable function $h(t)$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a-0}^{b+0} e^{in\delta t} h(t)\,dg(t) = 0.$$

---

[17]) See Appendix (4.3).

We take $f(t) = e^{iyt}$. Then $F(iy + in\delta) \to 0$ for each fixed y. But since $F(z)$ is regular and bounded in any strip $|\Re z| \leqq k$, this implies that $F(iy) \to 0$ as $y \to +\infty$, $-$ by Vitali's convergence theorem applied to

$$f_n(z) = F(z + in\delta).$$

Q. E. D.

It follows that in the lemma itself, it is immaterial whether the exponent n be interpreted as an integer or as a continuous variable[18]). The same is therefore true of the following special case of the lemma:

(3.6) If

$$\lim_{y \to +\infty} \int_{a-0}^{b+0} e^{iyt}\, dg(t) = w,$$

then for every subinterval (α, β) of (a, b),

$$\lim_{y \to +\infty} \int_{\alpha-0}^{\beta+0} e^{iyt}\, dg(t) = \begin{cases} w \\ 0 \end{cases}$$

according as $t = 0$ is, or is not, a point of (α, β). (In the lemma (4. 3), put $h(t) = 1$ for $\alpha \leqq t \leqq \beta$ and $= 0$ elsewhere).

Hence taking $\alpha = \beta$, we deduce

Theorem 4. If $F(z)$ tends to a unique limit w as z recedes along the positive (or along the negative) imaginary axis, then the integrator $g(t)$ is essentially continuous[19]) at each point $t \neq 0$, and

$$w = g(+0) - g(-0).$$

The distinction between the positive and negative directions is ruled out by the next theorem.

Theorem 5. If $F(z)$ tends to a unique limit w as $z = iy \to +i\infty$, then $F(z)$ tends to w as $z = iy \to -i\infty$

Proof. We have to show that if

$$\lim_{y \to +\infty} \int_{a-0}^{b+0} e^{iyt}\, dg(t) \tag{3.7}$$

is unique, then so is

$$\lim_{y \to +\infty} \int_{a-0}^{b+0} e^{-iyt}\, dg(t).$$

---

[18]) This may also be deduced directly from S. Verblunsky's refinement of the lemma [see again (4. 3)], without the appeal above made to complex variable methods and Vitali's theorem.

[19]) i. e. $g(t+0) = g(t-0)$.

This is obvious when $g(t)$ is real, since the two integrals are then conjugate imaginaries. Hence it suffices to show that (3.7) implies the uniqueness of

$$\lim_{y\to+\infty} \int_{a-0}^{b+0} e^{iyt}\,d\,\Re\,g(t).$$

But this is true by Rajchmann's Lemma, for *the real part of a function of bounded variation $g(t)$ is the integral of a bounded function with respect to $g(t)$.*

The latter property results from a refinement of a theorem of Radon[20]), by which, if $\varphi(t)$, $\psi(t)$ be any two real functions of bounded variation, there is a set E and function $\chi(t)$ such that

$$\int^t E(u)\,d\,\varphi(u) = \int^t \chi(u)\,d\,\psi(u), \tag{3.8}$$

with

$$\int^t \{1 - E(u)\}\,d\,\psi(u) \equiv 0. \tag{3.9}$$

[The set E is the complement of the maximum set over which $\psi(t)$, but not $\varphi(t)$, has zero total variation.]

Taking $\varphi(t) = \Im\,g(t)$, $\psi(t) = \Re\,g(t)$ in this theorem, we get, for the corresponding set E:

$$\int^t E(u)\,dg(u) = \int^t E(u)\,d\,\Re\,g(u) + i\int^t E(u)\,d\,\Im\,g(u) = \Re\,g(t) + i\int^t \chi(u)\,d\,\Re\,g(u),$$

or

$$\int^t E(u)\,dg(u) = \int^t \{1 + i\,\chi(u)\}\,d\,\Re\,g(u).$$

Hence

$$\Re\,g(t) = \int^t \frac{E(u)}{1 + i\,\chi(u)}\,dg(u),$$

by the iteration theorem for Stieltjes integrals already used, and in the last integral the integrand is bounded since $\chi(u)$ is real.

(3.10) Thus there are two possibilities:

(α) $F(iy)$ tends to the same unique limit as $y \to \pm\infty$.

(β) $F(iy)$ tends to no unique limit either as $y \to +\infty$ or as $y \to -\infty$.

Ignoring a possible discontinuity of the integrand $g(t)$ for $t = 0$:

(α) occurs when the standard function $\mathfrak{g}(t)$ equivalent to $g(t)$ is absolutely continuous (Riemann-Lebesgue theorem);

(β) when it is discontinuous (Theorem 4).

---

[20]) See Appendix (4.4).

The remaining functions, whose integrands are essentially, but non-absolutely, continuous, are divided between the two categories. It suffices to take as integrand any function — of which examples are now classical —, continuous and of bounded variation in $(0,2\pi)$, vanishing at $t = 0$, $t = 2\pi$, whose complex Fourier coefficients are, — or are not —, $o\left(\frac{1}{n}\right)$. For under these circumstances,

$$F(in) = \int_0^{2\pi} e^{int}\, dg(t) = -in \int_0^{2\pi} e^{int} g(t)\, dt$$

will — or will not —, tend to 0 as $n \to \infty$, and by Theorem 3b, n may be replaced by a continuous variable y.

The earliest recorded examples appear to be those of Menchoff and F. Riesz[21]). In Menchoff's example,

$$\left| n \int_0^{2\pi} e^{int} g(t)\, dt \right| < \frac{c}{\sqrt{\log n}}.$$

In F. Riesz's example,

$$n \int_0^{2\pi} e^{int} g(t)\, dt = 1 \quad \text{when } n = 1, 4, 4^2, 4^3, \ldots.$$

In both, the construction can be varied in many ways.

4. Appendix.

(4.1) *Titchmarsh's results*[22]). If in an interval (a, b), $f(t)$ is integrable in the sense of Lebesgue and does not vanish p. p. in a neighbourhood of a or b then the integral

$$\mathfrak{F}(z) = \int_a^b e^{tz} f(t)\, dt$$

has perfectly regular growth of order 1 and mean type with

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{r} = \max |a|, |b|$$

---

[21]) D. Menchoff, Comptes rendus Paris **163** (1916), pp. 433—435; F. Riesz, Math. Zeitschr. II (1918), pp. 312—315; see also A. Rajchmann, loc. cit. below, Math. Annalen **101** (1929), pp. 693—697.

[22]) E. C. Titchmarsh loc. cit. Proc. L. M. S. **25** (1926) p. 285. (1. 27) and Theorems IV, VI, II, V, p. 288, Lemmas (2. 2) and (2. 3). The function $\mathfrak{F}(z)$ is there standardised so that $\mathfrak{F}(0) \neq 0$ and in some cases $-a = b = 1$. We have re-established the general conditions.

for the maximum modulus $M(r)$ on $|z| = r$, and

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = \frac{b-a}{\pi}$$

for the number $n(r)$ of zeros in $|z| \leqq r$.

Also

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{1}{k!}\,\mathfrak{F}^{(k)}(0)\,z^k\,e^{cz}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right),$$

where $c = \frac{a+b}{2}$ and the zeros z_n are numbered in increasing order of moduli.

The series

$$\Sigma\,\Re\left(\frac{1}{z_n}\right),$$

but not

$$\Sigma\,\Im\left(\frac{1}{z_n}\right),$$

is absolutely convergent.

Further

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \Re z\leqq 0}} e^{-az}\,\mathfrak{F}(z) = \lim_{\substack{z\to\infty \\ \Re z\geqq 0}} e^{-bz}\,\mathfrak{F}(z) = 0$$

uniformly, but when $a < c < b$

$$e^{-cz}\,\mathfrak{F}(z)$$

is unbounded on every ray $\arg z = \text{const} \neq \frac{\pi}{2}$.

The expression of an integral function in the above form, when possible, is essentially unique.

(4. 2) *Phragmen-Lindelöf-Ahlfors Theorem*[23]). *Hypotheses.* $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n$ are distinct domains extending to infinity and each bounded by a simple continuous curve passing through 0. Their *openings at distance* r, $\Theta_k(r)$, satisfy

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta_k(r) \leqq \alpha \qquad \text{for} \quad r > r_0.$$

$f(z)$ is a function regular and unbounded in each $\mathfrak{D}_k$ and continuous and bounded on Γ_k, and

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \qquad \text{for} \quad z \text{ in } \Sigma\,\mathfrak{D}_k.$$

Conclusion:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\frac{n\pi}{\alpha}}} > 0.$$

The „*opening at distance* r" of a simply connected domain $\mathfrak{D}$ with attainable frontier points 0, ∞ is the angle $\Theta(r)$ subtended by the first

---

[23]) See L. Ahlfors, Acta Soc. Sc. Fenn., A. I (1930), No. 9, proof pp. 21—25.

arc γ_r of $|z| = r$ which separates the part of $\mathfrak{D}$ inside going to 0 from the part outside going to ∞. It corresponds to the cross-section Θ_x of Ahlfors' fundamental lemma (loc. cit., p. 6).

The theorem is stated by Ahlfors for $\alpha = 2\pi$ and the Γ_k paths of determination for $f(z)$; but the general statement may be inferred from the proof.

(4.3) Denote as usual by $g(t)$ a complex-valued function of bounded variation in (a, b).

Rajchmann's (Madame Gruzewska's) Lemma[24]. If

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a-0}^{b+0} e^{i n \delta t}\, d\, g(t) = w,$$

then

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a-0}^{b+0} e^{i n \delta t}\, h(t)\, d\, g(t) = w\, h(0),$$

for every bounded measurable function $h(t)$.

This results for complex $g(t)$ from the following generalisation:

Verblunsky's Lemma[25]. Let $\{\zeta_n\}$ be a sequence of complex numbers whose real parts are bounded and δ a real number of modulus less than

$$\frac{2\pi}{b-a}.$$

If for each $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a-0}^{b+0} e^{(\zeta_n + i k \delta) t}\, d\, g(t) = 0,$$

then for each $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a-0}^{b+0} e^{(\zeta_n + i k \delta) t}\, h(t)\, d\, g(t) = 0,$$

whatever be the bounded measurable function $h(t)$.

If $g(t)$ is continuous at a or b, the theorem holds also with $\delta = \frac{\pm 2\pi}{b-a}$

This is proved for a general $h(t)$ by transfinite induction from the special case of a trigonometrical polynomial. Verblunsky's statement is different in form and is taken from a totally different angle, but the two theorems are equivalent *a posteriori*.

---

[24]) Cp. A. Rajchmann, Math. Annalen **101** (1929), pp. 688—690, where however $g(t)$ is assumed real.

[25]) Cp. S. Verblunsky, Proc. L. M. S. **34** (1932), proof p. 530.

(4. 4) *Radon's theorem*[26]). A necessary and sufficient condition for a real function $f(t)$ of bounded variation to be expressible as an integral with respect to another $g(t)$, is that $f(t)$ should be „absolutely continuous" with respect to $g(t)$.

[A function is absolutely continuous with respect to $g(t)$ if its total variation over a set E vanishes whenever that of $g(t)$ does.]

The theorem as proved by Radon[27]) requires $g(t)$ to be monotone. The extension follows on observing that an integral with respect to $g(t)$ is also one with respect to the indefinite total variation $V(t)$ of $g(t)$, and conversely. For

$$V(t) = \int^t \Theta(u)\, dg(u)$$

where $\Theta(t)$ assumes the values 1 and -1 alone, and hence also

$$g(t) = \int^t \Theta(u)\, dV(u).$$

---

[26]) From L. C. Young, Fellowship Thesis, Trinity College, Cambridge (1930).

[27]) Radon, Sitzungsber. k. Akad. Wiss., Wien A (Math.-Nat. Kl.) 122, (1913), 1251. The treatment there, as in L. C. Young's Thesis, is n-dimensional in terms of additive functions of sets.

(Eingegangen am 11. Februar 1935.)

Ergänzung zu meiner Arbeit:

Über die Verzweigung der Lösung einer Integro-Differentialgleichung aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.

Von

Karl Maruhn in Leipzig.

[Die folgende Note schließt unmittelbar an die in der Überschrift genannte Arbeit [1]) an. Die Bezeichnungen sind dieselben wie dort, die eingeklammerten Zahlen weisen auf die Formeln hin.]

Wie ich jetzt erkannt habe, läßt sich ohne große Mühe auch die Existenz linearer, von $\lambda = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\varkappa}$ abhängiger Reihen von Gleichgewichtsfiguren beweisen, die von den kritischen homogenen Kreiszylindern abzweigen.

Betrachten wir das in (51) auftretende Integral

$$\text{(a)} \qquad I = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos n\varphi - \cos n\varphi')^3}{\varrho^2}\, d\varphi', \qquad \varrho^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2}$$

etwas näher. Wie man leicht erkennt, läßt es sich in der Gestalt

$$\text{(b)} \qquad I = \frac{4}{R^2} \int_0^{2\pi} (\cos n\varphi - \cos n\varphi') \sin^2 n \frac{\varphi + \varphi'}{2} \left(\frac{\sin n \dfrac{\varphi - \varphi'}{2}}{2 \sin \dfrac{\varphi - \varphi'}{2}} \right)^2 d\varphi'$$

schreiben.

Die in der Theorie der trigonometrischen Reihen oft angewendete Hilfsformel [2])

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} &\cos(a + z) + \cos(a + 2z) + \ldots + \cos(a + mz) \\ &= \frac{\sin\left[a + (2m+1)\frac{z}{2}\right] - \sin\left(a + \frac{z}{2}\right)}{2 \sin \frac{z}{2}} \end{aligned}$$

liefert für $a = 0$, $z = \varphi - \varphi'$

$$\text{(d)} \qquad \begin{aligned} \frac{\sin(2m+1)\dfrac{\varphi - \varphi'}{2}}{2 \sin \dfrac{\varphi - \varphi'}{2}} &= \tfrac{1}{2} + \cos(\varphi - \varphi') + \cos 2(\varphi - \varphi') + \ldots \\ &\quad + \cos m(\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

---

[1]) Vgl. diese Zeitschr. 40 (1935), S. 56—69.

[2]) Vgl. z. B. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 368. Für $z = 2\mu\pi$ (μ ganz) muß man unter dem rechtsstehenden Quotienten seinen Grenzwert für $z \to 2\mu\pi$ verstehen.

Die Untersuchung unseres Integrals I soll nunmehr für gerade und ungerade n-Werte gesondert erfolgen.

Es werde zunächst $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, angenommen. Mit Rücksicht auf (d) ergibt sich aus (b)

$$\text{(e)} \qquad I = \frac{2}{R^2} \int_0^{2\pi} [\cos(2m+1)\varphi - \cos(2m+1)\varphi'][1 - \cos(2m+1)(\varphi+\varphi')] \\ [\tfrac{1}{2} + \cos(\varphi-\varphi') + \ldots + \cos m(\varphi-\varphi')]^2 \, d\varphi'$$

oder aber

$$\text{(f)} \qquad \begin{aligned} I = \frac{2}{R^2} \int_0^{2\pi} & \{\tfrac{3}{2}\cos(2m+1)\varphi - [\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(4m+2)\varphi]\cos(2m+1)\varphi' \\ & + \tfrac{1}{2}\cos(2m+1)\varphi\cos(4m+2)\varphi' \\ & + \tfrac{1}{2}\sin(4m+2)\varphi\sin(2m+1)\varphi' \\ & - \tfrac{1}{2}\sin(2m+1)\varphi\sin(4m+2)\varphi'\} \\ & \{\tfrac{1}{2} + \cos(\varphi-\varphi') + \ldots + \cos m(\varphi-\varphi')\}^2 \, d\varphi'. \end{aligned}$$

Die Auswertung liefert, wie leicht ersichtlich, den einfachen Ausdruck

$$\text{(g)} \qquad I = \frac{2}{R^2}\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right)\frac{3}{2}\cos(2m+1)\varphi = \frac{3\pi}{2R^2}(2m+1)\cos(2m+1)\varphi \\ = \frac{3n\pi}{2R^2}\cos n\varphi.$$

Ist andererseits $n = 2m$, so bekommen wir wegen

$$\text{(h)} \qquad \begin{aligned} \sin 2m\frac{\varphi-\varphi'}{2} = {} & \sin(2m-1)\frac{\varphi-\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} \\ & + \cos(2m-1)\frac{\varphi-\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2} \end{aligned}$$

für I den Ausdruck

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} I = \frac{2}{R^2} \int_0^{2\pi} & (\cos 2m\varphi - \cos 2m\varphi')[1 - \cos 2m(\varphi+\varphi')] \\ & \left\{\left[\frac{1}{2} + \cos(\varphi-\varphi') + \ldots + \cos(m-1)(\varphi-\varphi')\right]\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\cos(2m-1)\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right\}^2 d\varphi' \\ = \frac{2}{R^2} \int_0^{2\pi} & \{\tfrac{3}{2}\cos 2m\varphi - (\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 4m\varphi)\cos 2m\varphi' \\ & + \tfrac{1}{2}\cos 2m\varphi\cos 4m\varphi' + \tfrac{1}{2}\sin 4m\varphi\sin 2m\varphi' \\ & - \tfrac{1}{2}\sin 2m\varphi\sin 4m\varphi'\}\{[\tfrac{1}{2} + \cos(\varphi-\varphi') + \ldots \\ & + \cos(m-1)(\varphi-\varphi')]^2[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(\varphi-\varphi')] \\ & + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2} + \cos(\varphi-\varphi') + \ldots + \cos(m-1)(\varphi-\varphi')] \\ & [\cos m(\varphi-\varphi') + \cos(m-1)(\varphi-\varphi')] \\ & + \tfrac{1}{8}[1 + \cos(2m-1)(\varphi-\varphi')]\} \, d\varphi' \end{aligned}$$

oder aber

$$I = \frac{2}{R^2}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{\pi}{2} + (m-1)\,\pi\right]\cos 2m\varphi + \frac{3(m-1)\,\pi}{4}\cos 2m\varphi\right.$$

(k)
$$\left. + \frac{3\pi}{4}\cos 2m\varphi + \frac{3\pi}{8}\cos 2m\varphi\right\} = \frac{3m\pi}{R^2}\cos 2m\varphi = \frac{3n\pi}{2R^2}\cos n\varphi\,^{3}).$$

Wir haben somit die für alle ganzzahligen $n \geqq 1$ gültige Beziehung

(l)
$$I = \frac{3n\pi}{2R^2}\cos n\varphi$$

gefunden. Alles in allem ist mit Rücksicht auf (51)

(m)
$$\frac{1}{\sqrt{\pi R}}\int_{\Sigma} k\cos n\varphi\, d\varphi = \frac{2n^2-4n}{8\pi R^3} + \frac{n^2}{4\pi R^3} = \frac{n^2-n}{2\pi R^3} = k_1(n).$$

Für $n = 2, 3, \ldots$ ist daher gewiß $k_1(n) > 0$. Den Fall $n = 1$ können wir außer Betracht lassen, da, wie schon früher erwähnt wurde, er keine neuen Figuren liefert.

Wegen (m) und (34) hat daher nach Kürzung durch r die Verzweigungsgleichung (28) die Gestalt

(n)
$$\mathsf{A}(n)\,\lambda + k_1(n)\,r^2 + \mathfrak{P}_5(\lambda, r) = 0, \qquad \mathsf{A}(n) = \mathsf{A} = \frac{n}{f\pi}.$$

Hierbei ist $\mathfrak{P}_5$ eine Potenzreihenentwicklung, in der die Glieder mit r, r^2 und λ fehlen. In der Umgebung von $\lambda = 0$ erhalten wir daher wegen $k_1(n) > 0$, wenn wir (n) nach r auflösen, zwei Entwicklungen

(o)
$$r^{(1)} = \left(-\frac{\mathsf{A}(n)\,\lambda}{k_1(n)}\right)^{1/2} + \mathfrak{P}_6\left\{\left(-\frac{\mathsf{A}(n)\,\lambda}{k_1(n)}\right)^{1/2}\right\},$$
$$r^{(2)} = -\left(-\frac{\mathsf{A}(n)\,\lambda}{k_1(n)}\right)^{1/2} + \mathfrak{P}_7\left\{\left(-\frac{\mathsf{A}(n)\,\lambda}{k_1(n)}\right)^{1/2}\right\},$$

unter $\mathfrak{P}_6$, $\mathfrak{P}_7$ gewisse im Nullpunkt verschwindende, mit der zweiten Potenz ihrer Veränderlichen beginnende Potenzreihen verstanden. *Von jeder der Verzweigungsfiguren mit $n \geqq 2$ gehen daher für $\lambda < 0$ zwei Arme neuer Gleichgewichtsfiguren aus.*

---

[3]) Man beachte, daß im Gegensatz zu (g) jetzt auch die beim Ausquadrieren von $[\frac{1}{2} + \cos(\varphi - \varphi') + \ldots + \cos(m-1)(\varphi - \varphi')]^2$ auftretenden doppelten Produkte der Gestalt $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi - \varphi')$, $2\cos(\varphi - \varphi')\cos 2(\varphi - \varphi')$, …, $2\cos(m-2)(\varphi - \varphi')\cos(m-1)(\varphi - \varphi')$ Beiträge liefern. — Der Fall $m = 1$ ($n = 2$) bedarf zum Teil einer Sonderbetrachtung, doch findet sich ohne Mühe, daß auch dieses Ergebnis der allgemeinen Formel (l) genügt. Vgl. hierzu auch l. c. [1]), S. 69.

(Eingegangen am 12. Februar 1935.)

Durchmesser und Umkugel bei mehrdimensionalen Punktmengen.

Von

Wilhelm Süss in Freiburg i. B.

---

1. H. W. Jung hat zuerst den folgenden Satz bewiesen[1]):

Die kleinste Kugel, in die alle n-dimensionalen Punktmengen vom Durchmesser Eins gelegt werden können, hat den Radius $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$.

Einen wesentlich kürzeren Beweis für diesen Satz hat später K. Reinhardt angegeben[2]). Einen gleichfalls kurzen Beweis einer gleichwertigen reziproken Aussage findet man bei T. Bonnesen-W. Fenchel[3]). Im folgenden beweise ich den Satz in der genannten ursprünglichen Formulierung unter Abänderung der Reinhardtschen Methode und mit Abkürzung des Beweises für den „Hauptsatz", auf den Reinhardt das Problem zurückgeführt hat, den ich dabei erweitere.

2. Dieser Hauptsatz lautet in erweiterter Form:

Es sei w der Winkel, unter dem die Kanten eines regulären Simplex S des Raumes R_n vom Mittelpunkt der Umkugel aus gesehen werden. Dann hat jedes nicht-reguläre Simplex T Kanten, die von einem beliebigen Punkt 0 aus dem Innern von T aus unter einem größeren Winkel als w gesehen werden, wenn auch Kanten da sind, die von 0 aus unter kleinerem Winkel als w gesehen werden (und umgekehrt).

Beweis: w ist bekanntlich durch $\cos w = -\frac{1}{n}$ bestimmt. Die Einheitsvektoren der Richtungen von 0 nach den $n+1$ Ecken von T seien $\mathfrak{a}_i$, die Längen der Vektoren nach den Ecken selbst A_i genannt. Angenommen, es sei im Widerspruch zu unserer Behauptung für alle $i, k = 1, 2, \ldots, n+1$ das skalare Produkt $\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k \geqq -\frac{1}{n}$. Wegen der Voraussetzung über die Lage von 0 in T gibt es stets nicht-negative „Gewichte" p_i, so daß $\sum_i p_i A_i \mathfrak{a}_i = 0$ ist. Bei Multiplikation dieser Gleichung mit $\mathfrak{a}_k$ folgt wegen $(\mathfrak{a}_k)^2 = 1$ und unserer Annahme:

$$p_k A_k \leqq \frac{1}{n} \sum_{i \neq k}^{n+1}{}' p_i A_i, \text{ also } s = \sum_{1}^{n+1} p_k A_k < \frac{1}{n} \sum_{1}^{n+1} \sum_{i \neq k}^{n+1}{}' p_i A_i = s,$$

---

[1]) Crelles Journal, 123, S. 241—257.

[2]) Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver., 25, S. 157—163.

[3]) Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934, S. 77/78.

da nach Voraussetzung mindestens ein Produkt $a_i a_k > -\frac{1}{n}$ ist. Unsere Annahme hat also zu einem Widerspruch geführt, w. z. b. w.

3. Der Beweis des Jungschen Satzes gestaltet sich nun folgendermaßen. Die Umkugel K der Punktmenge M vom Durchmesser 1 hat mit der abgeschlossenen konvexen Hülle H von M, die auch den Durchmesser 1 hat, eine Menge von Berührungspunkten gemein, aus der sich ein den Mittelpunkt 0 von K im Innern enthaltendes Simplex auswählen läßt [l. c.[3])].

Die größte Seite dieses Simplex ist einerseits höchstens gleich 1, andererseits nach Nr. 2 mindestens gleich der Seite des regulären Simplex gleicher Dimensionenzahl m und mit demselben Umkugelradius r wie K, d. h. $r\sqrt{\frac{2(m+1)}{m}}$. Es ist also $r \leqq \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}$, und da diese Schranke mit m wächst, wegen $m \leqq n$, wie behauptet,

$$r \leqq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}.$$

(Eingegangen am 1. März 1935).

Über die größte Kugel in einer konvexen Punktmenge.

Von

H. Gericke, Freiburg i. Br.

P. Steinhagen[1]) bewies für den Radius der Inkugel eines n-dimensionalen konvexen Körpers der Dicke 1 (das ist der kleinste Abstand zweier paralleler Stützgebilde) die Ungleichungen

$$\varrho \geqq \frac{1}{2\sqrt{n}} \qquad \text{für ungerades } n,$$

$$\varrho \geqq \frac{\sqrt{n+2}}{2(n+1)} \text{ für gerades } n.$$

Die zu diesem Ergebnis führende Rechnung läßt sich vereinfachen, wenn man die Formel von J. Toeplitz[2])

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{h_i^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{e_i^2},$$

wo h_i die Höhen, e_i die Abstände der Gegenkanten eines Tetraeders sind, auf den Fall von n Dimensionen verallgemeinert[3]).

Nach Steinhagen kann man sich auf die Betrachtung eines Simplex und solcher Paare paralleler Stützgebilde beschränken, die zusammen alle $n+1$ Ecken des Simplex enthalten. $A_i\,(i = 1, \ldots, n+1)$, die Endpunkte der vom Nullpunkt aus abgetragenen Vektoren $\mathfrak{x}_i$, seien die Ecken des Simplex. Die von ihnen auf eine Hyperebene H_{n-1} gefällten Lote haben die Länge p_i. Ist die Gleichung der H_{n-1} in der Hesseschen Normalform

$$\mathfrak{n}\,\mathfrak{x} - a = 0, \qquad \mathfrak{n}^2 = 1,$$

so gilt

$$\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_i - a = p_i \qquad (i = 1, \ldots, n+1),$$

$$\mathfrak{n}\,(\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_{i+1}) = p_i - p_{i+1} = d_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

in Komponenten

$$\sum_{\nu=1}^{n} n_\nu\,(x_i^{(\nu)} - x_{i+1}^{(\nu)}) = d_i.$$

---

[1]) Hamb. Abh. 1 (1922), S. 15.

[2]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 14 (1869), S. 253.

[3]) Darauf hat mich Herr Süss aufmerksam gemacht.

Die Determinante dieses Gleichungssystems verschwindet nicht, da sie dem Volumen des Simplex proportional ist, also erhält man

$$n_\nu = \sum_{i=1}^{n} F_{\nu i}(x)\, d_i.$$

Aus $n^2 = 1$ folgt dann eine Relation der Form

$$\sum_{\substack{i=1 \\ k \leqq i}}^{n} a_{ik} d_i d_k = 1, \tag{1}$$

wo die a_{ik} nur von den x_i, aber nicht von der Lage der H_{n-1} abhängen. Man kann sie also bestimmen bzw. eliminieren, indem man der H_{n-1} geeignete spezielle Lagen gibt. Und zwar werden dazu von den Punkten A_i auf alle möglichen Arten μ Punkte herausgegriffen und die H_{n-1} durch die übrigen $n+1-\mu$ Punkte so gelegt, daß die ersten μ Punkte in einer parallelen H_{n-1} liegen.

Sei $\pi_\sigma(i)$ die Permutation der Elemente $1, \ldots, n+1$, die i in $\pi_\sigma(i)$ überführt. h_{π_σ} sei der Abstand der beiden parallelen H_{n-1}, von denen die eine durch die μ Punkte $A_{\pi_\sigma(i)}$ $(i = 1, \ldots, \mu)$, die andere durch die übrigen geht. Dann ist

$$p_i = h_{\pi_\sigma} \neq 0, \quad \text{wenn} \quad \pi_\sigma^{-1}(i) \leqq \mu,$$

$$p_i = 0, \qquad \text{wenn} \quad \pi_\sigma^{-1}(i) > \mu.$$

Für ein bestimmtes π_σ, d. h. eine bestimmte Lage der H_{n-1}, geht (1) in eine Gleichung der Form über

$$\sum a_{ik} h_{\pi_\sigma}^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \sum a_{ik} = h_{\pi_\sigma}^{-2}.$$

Ich betrachte nun $\sum_{\sigma=1}^{(n+1)!} h_{\pi_\sigma}^{-2}$ daraufhin, wie die a_{ik} in den einzelnen Summanden vorkommen.

1. a_{ii} kommt vor, wenn $d_i \neq 0$ ist, d. h. wenn

entweder $p_i \neq 0$, $p_{i+1} = 0$, d. h. $\pi_\sigma^{-1}(i) \leqq \mu$, $\pi_\sigma^{-1}(i+1) > \mu$ ist. Dafür gibt es $\mu(n+1-\mu)(n-1)!$ Möglichkeiten.

oder $p_i = 0$, $p_{i+1} \neq 0$. Dafür gibt es ebenso viele Möglichkeiten.

Also kommt a_{ii} im Ganzen $2\mu(n+1-\mu)(n-1)!$ mal vor.

2. $a_{i,i-1}$ tritt auf, wenn $d_i \neq 0$ und $d_{i-1} \neq 0$ ist, also

entweder wenn $p_i \neq 0$, $p_{i-1} = p_{i+1} = 0$ ist, d. h. $\pi_\sigma^{-1}(i) \leqq \mu$, $\pi_\sigma^{-1}(i-1) > \mu$, $\pi_\sigma^{-1}(i+1) > \mu$.

Das kommt $\mu(n+1-\mu)(n-\mu)(n-2)!$ mal vor.

oder wenn $p_{i-1} = p_{i+1} \neq 0$, $p_i = 0$ ist, d. h. $\pi_\sigma^{-1}(i-1) \leqq \mu$, $\pi_\sigma^{-1}(i+1) \leqq \mu$, $\pi_\sigma^{-1}(i) > \mu$: $\mu(\mu-1)(n+1-\mu)(n-2)!$ mal;

zusammen $\mu(n+1-\mu)(n-1)!$ mal, und zwar jedesmal mit negativem Vorzeichen, da in den genannten Fällen stets

$$\operatorname{sign} d_{i-1} = -\operatorname{sign} d_i$$

ist.

3. a_{ik}, $i > k+1$, tritt auf, wenn

entweder	$p_i \neq 0$,	$p_k \neq 0$	ist;	dann ist	$\operatorname{sign} d_i d_k$:	$+$,
oder	$p_{i+1} \neq 0$,	$p_k \neq 0$	ist;	dann ist	$\operatorname{sign} d_i d_k$:	$-$,
oder	$p_i \neq 0$,	$p_{k+1} \neq 0$	ist;	dann ist	$\operatorname{sign} d_i d_k$:	$-$,
oder	$p_{i+1} \neq 0$,	$p_{k+1} \neq 0$	ist;	dann ist	$\operatorname{sign} d_i d_k$:	$+$,

alle diese a_{ik} heben sich also heraus. Es bleibt

$$\sum_{\sigma=1}^{(n+1)!} h_{\pi_\sigma}^{-2} = \mu(n+1-\mu)(n-1)!\left[2\sum_{i=1}^{n} a_{ii} - \sum_{i=2}^{n} a_{i,i-1}\right].$$

Bildet man diesen Ausdruck für $\mu = 1$, bezeichnet die von A_i ausgehende Höhe des Simplex mit h_i und berücksichtigt, daß links jedes h_i^{-2} $n!$mal erscheint, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n+1} h_i^{-2} = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ii} - \sum_{i=2}^{n} a_{i,i-1}$$

und somit als Verallgemeinerung der Toeplitzschen Formel

$$\sum_{i=1}^{n+1} h_i^{-2} = \frac{1}{\mu(n+1-\mu)(n-1)!} \sum_{\sigma=1}^{(n+1)!} h_{\pi_\sigma}^{-2}. \tag{2}$$

Nun ist $\frac{1}{\varrho} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{h_i}$, denn wenn V das Volumen, S_i die Seitenflächen des Simplex sind, so ist $n\,V = h_i S_i = \varrho \sum_{k=1}^{n+1} S_k$, also $\frac{1}{h_i} = \frac{S_i}{\varrho \cdot \Sigma S_k}$.

$$\frac{1}{\varrho^2} = \sum_{i,k=1}^{n+1} \frac{1}{h_i h_k} \leqq \sum_{i,k=1}^{n+1} (h_i^{-2} + h_k^{-2}) = (n+1)\sum_{i=1}^{n+1} h_i^{-2},$$

also nach (2)

$$\frac{1}{\varrho^2} \leqq \frac{n+1}{\mu(n+1-\mu)(n-1)!} \sum_{\sigma=1}^{(n+1)!} h_{\pi_\sigma}^{-2}.$$

Da die Breite $= 1$ sein sollte, ist $h^{-2} \leqq 1$, also

$$\varrho \geqq \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{\mu(n+1-\mu)}{n}}.$$

Da $\mu(n+1-\mu)$ am größten wird, wenn μ möglichst nahe an $\frac{n+1}{2}$ liegt, folgt

für ungerades n

$$\varrho \geqq \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

für gerades n

$$\varrho \geqq \frac{\sqrt{n+2}}{2(n+1)},$$

w. z. b. w.

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn alle h_i einander gleich und alle $h_{\pi_\sigma} = 1$ sind, also z. B. für das reguläre Simplex, jedoch, wie Steinhagen bemerkt, nicht nur für dieses.

(Eingegangen am 1. März 1935.)

On sums of like powers.

By

K. Subba Rao.

With the notation of my recent papers[1]) I prove in section I

Theorem 1: $\beta(7) \leqq 6$.

Theorem 2:
$$(7) \overset{7}{=} (7)$$
$$(6) \overset{7}{=} (7)$$
$$(5) \overset{7}{=} (7)$$
$$(4) \overset{7}{=} (7)$$
$$(6) \overset{7}{=} (6)$$
$$(5) \overset{7}{=} (6)$$
$$(5) \overset{7}{=} (5)$$

The last but one of these equations obviously implies Theorem 1.

Theorem 3: *) $\gamma(7) \leqq 9$.

Theorem 4:
$$(1) \overset{7}{=} (25)$$
$$(1) \overset{7}{=} (42) \text{ } i.\ o.$$

In section II, I prove

Theorem 1: $\beta(9) \leqq 9$.

Theorem 2:
$$(9) \overset{9}{=} (9)$$
$$(8) \overset{9}{=} (9)$$
$$(7) \overset{9}{=} (9)$$
$$(8) \overset{9}{=} (8)$$

The second and third of these equations imply Theorem 1.

Theorem 3: $(1) \overset{9}{=} (32)$.

Theorem 4:
$$\gamma(8) \leqq 13$$
$$\gamma(9) \leqq 16.$$

---

[1]) "On equal sums of like powers", Math. Zeitschr. **39** (1934), pp. 240—243. See also, K. Subba Rao "On sums of fifth powers", Journ. L. M. S. **9** (1934), pp. 172—173, and S. Sastry "On sums of powers", Journ. L. M. S. **9** (1934), pp. 242—246.

*) I defined $\gamma(k)$ in my paper "on equal sums of like powers", Math. Zeitschr. **39** (1934), pp. 240—243. There I must add that in equation (3), no x_s on the left is identical with a y_t on the right.

Section I.

We have

$$19, 19, 15, 6, 6, 2 \overset{7}{=} 20, 18, 13, 8, 8$$

$$19, 19, 19, 16, 6, 6 \overset{7}{=} 20, 18, 18, 17, 12$$

which examples prove Theorem 1.

The following examples prove Theorem 2:

$$22, 16, 12, 9, 9, 8, 4 \overset{7}{=} 19, 19, 18, 17, 3, 2, 2$$

$$22, 10, 7, 6, 4, 4, 1 \overset{7}{=} 19, 19, 17, 16, 11, 11, 3$$

$$22, 20, 16, 6, 6, 5, 1 \overset{7}{=} 23, 18, 11, 9, 8, 4, 3$$

$$18, 11, 9, 9, 7, 7, 3 \overset{7}{=} 16, 16, 14, 6, 6, 5, 1$$

$$23, 16, 10, 10, 5, 3, 2 \overset{7}{=} 21, 20, 18, 4, 4, 1, 1$$

$$15, 11, 11, 8, 1, 1 \overset{7}{=} 14, 14, 7, 6, 2, 2, 2$$

$$13, 13, 12, 11, 2, 1 \overset{7}{=} 15, 9, 9, 6, 5, 4, 4$$

$$18, 14, 13, 13, 4, 4 \overset{7}{=} 17, 17, 11, 8, 7, 5, 1$$

$$22, 11, 9, 7, 5, 2 \overset{7}{=} 20, 18, 17, 15, 12, 10, 6$$

$$20, 15, 12, 12, 10, 4 \overset{7}{=} 19, 18, 11, 9, 8, 5, 3$$

$$19, 17, 16, 16, 16, 3 \overset{7}{=} 21, 15, 13, 12, 11, 11, 4$$

$$20, 19, 16, 12, 9, 8 \overset{7}{=} 21, 17, 14, 14, 13, 4, 1$$

$$17, 11, 9, 9, 1 \overset{7}{=} 16, 15, 5, 4, 3, 2, 2$$

$$19, 7, 2, 2, 2 \overset{7}{=} 18, 16, 9, 9, 8, 8, 6$$

$$22, 14, 11, 3, 1 \overset{7}{=} 19, 19, 17, 17, 10, 7, 4$$

$$22, 12, 7, 4, 2 \overset{7}{=} 19, 18, 18, 17, 8, 6, 3$$

$$28, 28, 15, 2, 1 \overset{7}{=} 30, 22, 22, 16, 11, 10, 5$$

$$16, 7, 6, 3 \overset{7}{=} 15, 13, 11, 9, 9, 9, 8$$

$$12, 12, 7, 7, 1, 1 \overset{7}{=} 13, 10, 6, 6, 3, 2$$

$$19, 18, 10, 8, 6, 2 \overset{7}{=} 20, 15, 13, 9, 5, 1$$

$$20, 18, 13, 8, 8 \overset{7}{=} 19, 19, 15, 6, 6, 2$$

$$20, 18, 18, 17, 12 \overset{7}{=} 19, 19, 19, 16, 6, 6$$

$$18, 17, 15, 12, 2 \overset{7}{=} 19, 16, 13, 8, 8$$

$$22, 20, 9, 7, 7 \overset{7}{=} 23, 16, 14, 8, 4$$

We have the identity

$$(7x^7 + y^7)^7 - (7x^7 - y^7)^7 = 2(7x^6 y)^7 + 168070(x^4 y^3)^7 + 2058(x^2 y^5)^7 + 2(y^7)^7.$$

Now

$$2058 = 3^7 - 2^7 - 1^7,$$

and

$$168070 = 8^7 + 2^7 - 7^7 - 7^7 - 6^7 - 3^7 - 1^7.$$

Substituting these values in the above identity and observing the condition

$$y^7 > 7x^7,$$

we have

$$\begin{aligned}(7x^7 + y^7)^7 + (y^7 - 7x^7)^7 + (7x^4y^3)^7 + (7x^4y^3)^7 + (6x^4y^3)^7 + (3x^4y^3)^7 \\ + (x^4y^3)^7 + (2x^2y^5)^7 + (x^2y^5)^7 \\ = 2(7x^6y)^7 + (8x^4y3)^7 + (2x^4y^3)^7 + (3x^2y^5)^7 + 2(y^7)^7,\end{aligned}$$

that is,

$$(9) \overset{7}{=} (7) \quad i.\,o.,$$

which proves Theorem 3.

We have

$$19^7 = 18^7 + 15^7 + 14^7 + 9^7 + 2\cdot 6^7 + 2\cdot 4^7 + 3^7 + 8\cdot 2^7 + 8\cdot 1^7$$

which proves

$$(1) \overset{7}{=} (25).$$

Again we have the identity

$$(14t^7 + 1)^7 = (14t^7 - 1)^7 + (14t^6)^7 + 2689120(t^4)^7 + 8232(t^2)^7 + 2.$$

Multiplying both sides of this identity by 6^7, we have

$$(84t^7 + 6)^7 = (84t^7 - 6)^7 + (84t^6)^7 + 2689120\cdot 6^7(t^4)^7 + 8232\cdot 6^7(t^2)^7 + 2\cdot 6^7.$$

But

$$2689120 \times 6^7 = 48^7 + 2\cdot 36^7 + 24^7 + 2\cdot 21^7 + 18^7 + 5\cdot 12^7 + 9^7 + 7\cdot 3^7$$

and

$$8232 \times 6^7 = 20^7 + 18^7 + 3\cdot 14^7 + 2\cdot 12^7 + 2\cdot 10^7 + 2\cdot 8^7 + 7\cdot 4^7.$$

Substituting these values in the above identity, we have (t being positive)

$$\begin{aligned}(84t^7 + 6)^7 = (84t^7 - 6)^7 + (84t^6)^7 + (48t^4)^7 + 2\cdot(36t^4)^7 + (24t^4)^7 \\ + 2\cdot(21t^4)^7 + (18t^4)^7 + 5\cdot(12t^4)^7 + (9t^4)^7 + 7\cdot(3t^4)^7 \\ + (20t^2)^7 + (18t^2)^7 + 3\cdot(14t^2)^7 + 2\cdot(12t^2)^7 + 2\cdot(10t^2)^7 \\ + 2\cdot(8t^2)^7 + 7\cdot(4t^2)^7 + 2\cdot 6^7.\end{aligned}$$

The right hand side contains forty two seventh powers and Theorem 4 is proved. It is likely that the number 42 can be replaced by a much smaller number.

In concluding this section, I give the following example in small numbers:

$$2\cdot 8^7 + 12\cdot 2^7 = 5\cdot 7^7 + 5^7.$$

Section II.

We have

$$14, 13, 13, 4, 4, 4, 4, 3, 3 \overset{9}{=} 15, 10, 10, 10, 9, 7, 1$$

$$18, 18, 12, 12, 12, 9, 5, 1, 1 \overset{9}{=} 19, 15, 15, 13, 11, 7, 6, 2$$

which examples prove Theorem 1.

The following examples prove Theorem 2:

$$16, 12, 12, 8, 8, 6, 6, 1, 1 \overset{9}{=} 15, 15, 11, 7, 7, 5, 4, 3, 3$$

$$17, 15, 13, 13, 9, 8, 1, 1, 1 \overset{9}{=} 16, 16, 14, 14, 4, 4, 4, 3, 3$$

$$20, 17, 17, 14, 14, 12, 10, 4, 4 \overset{9}{=} 21, 11, 6, 6, 2, 2, 2, 1, 1$$

$$21, 20, 15, 10, 8, 8, 7, 6, 6 \overset{9}{=} 22, 17, 12, 12, 12, 11, 11, 3, 1$$

$$21, 17, 16, 16, 15, 14, 14, 10, 4 \overset{9}{=} 20, 18, 18, 18, 13, 13, 11, 9, 7$$

$$22, 21, 21, 20, 20, 18, 12, 9, 1 \overset{9}{=} 25, 17, 15, 14, 14, 13, 7, 7, 2$$

$$24, 22, 21, 9, 7, 5, 5, 4, 2 \overset{9}{=} 25, 20, 18, 17, 8, 6, 3, 1, 1$$

$$19, 15, 15, 13, 11, 7, 6, 2 \overset{9}{=} 18, 18, 12, 12, 12, 9, 5, 1, 1$$

$$19, 15, 14, 12, 12, 12, 1, 1 \overset{9}{=} 18, 17, 16, 13, 10, 4, 3, 3, 2$$

$$22, 22, 21, 20, 19, 15, 11, 4 \overset{9}{=} 25, 18, 16, 10, 10, 9, 8, 6, 2$$

$$15, 10, 10, 10, 9, 7, 1 \overset{9}{=} 14, 13, 13, 4, 4, 4, 4, 3, 3$$

$$16, 16, 14, 10, 10, 10, 7 \overset{9}{=} 17, 13, 13, 13, 13, 8, 4, 1, 1$$

$$21, 18, 16, 11, 8, 6, 6 \overset{9}{=} 20, 20, 15, 10, 9, 7, 2, 2, 1$$

$$15, 14, 14, 8, 7, 7, 5, 4 \overset{9}{=} 16, 12, 11, 11, 10, 9, 3, 2$$

$$16, 16, 11, 10, 8, 6, 6, 6 \overset{9}{=} 17, 13, 13, 9, 9, 9, 5, 4.$$

We have

$$5^9 = 7 \cdot 4^9 + 6 \cdot 3^9 + 19 \cdot 1^9$$

which proves Theorem 3.

We have

(1) $$16, 6, 5, 5 \overset{8}{=} 14, 14, 13, 12, 10, 4, 4, 3$$

and

(2) $$20, 15, 5, 4, 2, 2, 2 \overset{8}{=} 19, 18, 10, 9, 8$$

Multiplying the equation (1) by x^8 and (2) by y^8 and adding the sides, we have

$$16x, 6x, 5x, 5x, 20y, 15y, 5y, 4y, 2y, 2y, 2y$$

$$\overset{8}{=} 14x, 14x, 13x, 12x, 10x, 4x, 4x, 3x, 19y, 18y, 10y, 9y, 8y,$$

that is,

$$(11) \overset{8}{=} (13) \quad i.\ o.$$

Again we have

(3) $\quad 19,\ 18,\ 10,\ 8,\ 8,\ 8,\ 8,\ 6,\ 6,\ 4,\ 4 \overset{9}{=} 20,\ 13,\ 3,\ 3$

and

(4) $\quad 19,\ 19,\ 17,\ 16,\ 7,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2 \overset{9}{=} 21,\ 15.$

From (3) and (4) we have

$19x,\ 18x,\ 10x,\ 8x,\ 8x,\ 8x,\ 8x,\ 6x,\ 6x,\ 4x,\ 4x,\ 21y,\ 15y$

$\overset{9}{=} 20x, 13x, 3x, 3x, 19y, 19y, 17y, 16y, 7y, 4y, 3y, 3y, 2y, 2y, 2y, 2y,$

that is,

$$(13) \overset{9}{=} (16) \quad i.\ o.,$$

and Theorem 4 is proved.

(Eingegangen am 23. Dezember 1934.)

Ein neuer Beweis für die Reziprozitätsformel der Gaußschen Summen in beliebigen algebraischen Zahlkörpern*).

Von

Dietmar Kunert in Breslau.

Herr Hecke hat den Begriff der Gaußschen Summe auf beliebige algebraische Zahlkörper übertragen: Ist $\mathfrak{d}$ die Differente des Körpers K, ω eine beliebige von Null verschiedene Zahl aus K und $\mathfrak{d}\omega = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ganze teilerfremde Ideale sind, so gehöre zu ω in K die Gaußsche Summe

$$C(\omega) = \sum_{\mu \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S(\mu^2 \omega)}, \tag{1}$$

wo $S(\mu^2\omega)$ die Spur von $\mu^2\omega$ in K bezeichnet und die Summationsvorschrift μ mod $\mathfrak{a}$ bedeutet, daß μ ein volles Restsystem mod $\mathfrak{a}$ in K durchläuft[1]). Von der speziellen Wahl des Restsystems ist $C(\omega)$ unabhängig.

Für eine beliebige Zahl μ aus K und ein beliebiges Ideal $\mathfrak{m}$ aus K bezeichne $N(\mu)$ die Norm der Zahl μ in K, $N(\mathfrak{m})$ die Norm des Ideals $\mathfrak{m}$ in K. Der Körper K habe den Grad n, und von den konjugierten Körpern $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ seien die Körper $K^{(1)}, \ldots, K^{(r_1)}$ reell, die übrigen nicht reell. Dann gilt für Gaußsche Summen in K die Reziprozitätsformel

$$\frac{C(\omega)}{|\sqrt{N(\mathfrak{a})}|} = \left|\frac{\sqrt{N(2\mathfrak{b})}}{N(\mathfrak{b}_1)}\right| e^{\frac{\pi i}{4}(\operatorname{sgn}\omega^{(1)} + \operatorname{sgn}\omega^{(2)} + \ldots + \operatorname{sgn}\omega^{(r_1)})}\, C\left(-\frac{1}{4\omega}\gamma^2\right); \tag{2}$$

hierbei bedeutet $\mathfrak{b}_1$ den Nenner von $\frac{1}{4\omega\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}}{4\mathfrak{b}}$ und γ eine beliebige Zahl aus K, derart daß $\mathfrak{d}\gamma$ ganz und zu $\mathfrak{b}_1$ teilerfremd ist[2]). Der Beweis, den Herr Hecke für diese Reziprozitätsformel gegeben hat, benutzt die Heckeschen Thetafunktionen. Zwischen $C(\omega)$ und dem Verhalten einer gewissen Thetafunktion an einer gewissen singulären Stelle besteht nämlich ein Zusammenhang, so daß man aus der für diese Thetafunktion geltenden Transformationsformel die Formel (2) ableiten kann.

*) Diese Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau als Dissertation angenommen.

[1]) Hecke, Reziprozitätsgesetz und Gaußsche Summen in quadratischen Zahlkörpern, Gött. Nachr. 1919, S. 265—278; Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923, S. 218 ff.

[2]) Hecke, a. a. O.

Unter den bekannten Methoden, den Wert der Gaußschen Summen im rationalen Zahlkörper zu bestimmen, zeichnen sich die Kroneckersche Methode[3]) und die „*Fourierreihen*methode“[3]) durch Einfachheit und Eleganz aus. Wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden soll, lassen sich diese Methoden auch zum Beweise der Formel (2) verwenden. Versteht man nämlich unter $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ eine Basis von K und unter R eine natürliche durch $N(\mathfrak{a})$ teilbare Zahl, so ist

$$\frac{R^n}{N(\mathfrak{a})} C(\omega) = \sum_{x_1=0}^{R-1} \sum_{x_2=0}^{R-1} \cdots \sum_{x_n=0}^{R-1} e^{2\pi i S[(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n)^2 \omega]},$$

und man kann diese n Summen einzeln nacheinander nach der Kroneckerschen Methode oder nach der Fourierreihenmethode umformen. Man erhält dann für $C(\omega)$ eine neue Darstellung durch eine n-fache Summe, und in dieser Darstellung erkennt man leicht die Reziprozitätsformel (2).

Im Falle des quadratischen Körpers führt die *einmalige* Anwendung eines der genannten Umformungsverfahren zu einer Doppelsumme, die bei passender Wahl der Summationsbereiche in sich übergeht, wenn man ω durch $-\frac{1}{4\omega' d}$ ersetzt (ω' bezeichnet die Konjugierte von ω, d die Körperdiskriminante). Auf diesem Wege — mit der Kroneckerschen Methode als Umformungsprinzip — hat Herr L. J. Mordell die Reziprozitätsformel für Gaußsche Summen in quadratischen Zahlkörpern bewiesen[4]).

Im folgenden werden die Kroneckersche und die Fourierreihenmethode angewandt auf mehrfache Gaußsche Summen im rationalen Körper. Für diese Summen ergibt sich dann eine Reziprozitätsformel, aus der man nicht nur die Reziprozitätsformel für die oben definierten Gaußschen Summen in K gewinnen kann, sondern auch eine Reziprozitätsformel für Gaußsche Summen in K von allgemeinerer Art. Eine Einteilung der konjugierten Körper $K^{(1)}, \ldots, K^{(n)}$ in reelle und nicht reelle Körper wird dabei nicht benötigt. Demgemäß enthält die Reziprozitätsformel für Gaußsche Summen in K in ihrer allgemeinen Form wie in der besonderen Gestalt, die sie für die von Herrn Hecke eingeführten Summen annimmt, an Stelle des Faktors $e^{\frac{\pi i}{4}(\operatorname{sgn}\omega^{(1)} + \ldots + \operatorname{sgn}\omega^{(r_1)})}$ zuerst einen anderen Ausdruck, der sich aber nachträglich leicht in $e^{\frac{\pi i}{4}(\operatorname{sgn}\omega^{(1)} + \ldots + \operatorname{sgn}\omega^{(r_1)})}$ überführen läßt, wenn man die Körper $K^{(1)}, \ldots, K^{(r_1)}$ als reell und die übrigen als nicht reell voraussetzt.

---

[3]) Vgl. z. B. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. I, Leipzig 1927, S. 158—161 u. 153—155.

[4]) L. J. Mordell, On the reciprocity formula for the Gauß's sums in the quadratic field, Proc. of the London Math. Soc., Ser. 2, Vol. 20 (4), 1921.

Eine — allerdings nicht einwandfreie — Ableitung einer Reziprozitätsformel für mehrfache Gaußsche Summen mittels der Fourierreihenmethode findet sich schon bei A. Krazer[5]). Für die n-fache Gaußsche Summe setzt Krazer sofort eine n-fache Fourierreihe an. Mit diesem Ansatz dürfte aber ein strenger Beweis der Formel (2) recht mühsam sein, wie aus der Dissertation von Herrn W. Cramer hervorgeht, in der auf diesem Wege die Reziprozität zwischen Gaußschen Summen in reellen quadratischen Körpern bewiesen wird[6]).

§ 1.

Das Kroneckersche Verfahren. Die Fourierreihenmethode.

Satz 1. *Es sei:*

u eine rationale Zahl,

v eine rationale Zahl,

$u \neq 0$,

R eine natürliche Zahl, derart daß $2Ru$, R^2u, Rv ganz sind.

Dann ist

$$(3) \qquad \sum_{x=0}^{R-1} e^{2\pi i(ux^2+vx)} = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} u}}{|\sqrt{2u}|} \sum_{y=0}^{2R|u|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(y+v)^2}.$$

1. Beweis (Kroneckersche Methode). Nach dem Residuensatz ist

$$\sum_{x=0}^{R-1} e^{2\pi i(ux^2+vx)} = \int \frac{e^{2\pi i(uz^2+vz)}}{e^{2\pi iz}-1}\,dz,$$

das Integral in positivem Sinn um ein Parallelogramm $ABCD$ erstreckt, dessen Seiten AD und BC die reelle Achse in den Punkten $z = -\frac{1}{2}$ und $z = R - \frac{1}{2}$ schneiden und gegen die positive Richtung der reellen Achse um $\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4}$ geneigt sind, je nachdem u größer oder kleiner als Null ist, und dessen Seiten AB und CD zu beiden Seiten der reellen Achse liegen und ihr parallel sind. Rücken die Seiten AB und CD ins Unendliche, so verschwinden die über diese Seiten erstreckten Integrale von $\frac{e^{2\pi i(uz^2+vz)}}{e^{2\pi iz}-1}$. Im Falle $u > 0$ ist daher

---

[5]) Krazer, Zur Theorie der mehrfachen Gaußschen Summen, Weber-Festschrift (1912), S. 181—197. (Daß die Umordnung der n-fachen unendlichen Reihe auf S. 186 statthaft ist, bleibt unbegründet.)

[6]) Cramer, Die Reziprozitätsformel für Gaußsche Summen in reell quadratischen Zahlkörpern, Inaug.-Diss., Breslau 1932.

$$\sum_{x=0}^{R-1} e^{2\pi i(ux^2+vx)} = \int \frac{e^{2\pi i\left(u(z+R)^2+v(z+R)\right)} - e^{2\pi i(uz^2+vz)}}{e^{2\pi iz}-1}\,dz$$

$$= \int e^{2\pi i(uz^2+vz)} \frac{e^{2\pi i\cdot 2Ruz}-1}{e^{2\pi iz}-1}\,dz$$

$$= \sum_{y=0}^{2Ru-1} \int e^{2\pi i\left(uz^2+(y+v)z\right)}\,dz$$

$$= \sum_{y=0}^{2Ru-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(y+v)^2} \int e^{2\pi iu\left(z+\frac{y+v}{2u}\right)^2}\,dz,$$

wo die Integrale sämtlich über die Gerade zu erstrecken sind, die gegen die positive Richtung der reellen Achse um $\frac{\pi}{4}$ geneigt ist und die reelle Achse in $z = -\frac{1}{2}$ schneidet, und zwar ist die Gerade in Richtung wachsender Realteile zu durchlaufen. Für diesen Integrationsweg ist nun bei beliebigem reellen y

$$\int e^{2\pi iu\left(z+\frac{y+v}{2u}\right)^2}\,dz = \int e^{2\pi iu\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\,dz$$

$$= e^{\frac{\pi i}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ux^2}\,dx = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{|\sqrt{2u}|}.$$

(Die auf dieser Seite Zeile 3 vorgenommene Aufspaltung des Integrals in eine Summe von Integralen war also erlaubt.)

Ist dagegen $u < 0$, so wird

$$\sum_{x=0}^{R-1} e^{2\pi i(ux^2+vx)} = \int \frac{e^{2\pi i\left(u(z-R)^2+v(z-R)\right)} - e^{2\pi i(uz^2+vz)}}{e^{2\pi iz}-1}\,dz$$

$$= \int e^{2\pi i(uz^2+vz)} \frac{e^{2\pi i\cdot(-2Ru)z}-1}{e^{2\pi iz}-1}\,dz$$

$$= \sum_{y=0}^{2R|u|-1} \int e^{2\pi i\left(uz^2+(y+v)z\right)}\,dz$$

$$= \sum_{y=0}^{2R|u|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(y+v)^2} \int e^{2\pi iu\left(z+\frac{y+v}{2u}\right)^2}\,dz,$$

wo die Integrale sämtlich über die Gerade zu erstrecken sind, die gegen die positive Richtung der reellen Achse um $\frac{3\pi}{4}$ geneigt ist und die reelle Achse im Punkte $z = R - \frac{1}{2}$ schneidet, und zwar ist die Gerade in Richtung wachsender Realteile zu durchlaufen. Für diesen Integrationsweg ist nun bei beliebigem reellen y

$$\int e^{2\pi i u\left(z+\frac{y+v}{2u}\right)^2} dz = \int e^{2\pi i u\left(z-R+\frac{1}{2}\right)^2} dz$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi u x^2}\, dx = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{|\sqrt{2u}|}.$$

(Die auf S. 329 in Zeile 17 vorgenommene Aufspaltung des Integrals in eine Summe von Integralen war also erlaubt.)

Sowohl für $u > 0$ wie für $u < 0$ gilt mithin die Gleichung

$$\sum_{x=0}^{R-1} e^{2\pi i(ux^2+vx)} = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} u}}{|\sqrt{2u}|} \sum_{y=0}^{2R|u|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(y+v)^2}.$$

2. Beweis (Fourierreihenmethode). Die Funktion

$$f(t) = \sum_{x=0}^{R-1} e^{2\pi i\left(u(x+t)^2+v(x+t)\right)}$$

ist im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ samt ihrer ersten Ableitung stetig. Überdies ist $f(0) = f(1)$. Die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k t + b_k \sin 2\pi k t)$$

mit

$$a_k = 2\int_0^1 f(\tau)\cos 2\pi k\tau\, d\tau, \quad b_k = 2\int_0^1 f(\tau)\sin 2\pi k\tau\, d\tau$$

konvergiert daher im ganzen Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ gegen $f(t)$. Insbesondere ist

$$\sum_{x=0}^{R-1} e^{2\pi i(ux^2+vx)} = f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$= \int_0^1 f(\tau)\, d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f(\tau)\left(e^{2\pi i k\tau} + e^{-2\pi i k\tau}\right) d\tau$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \int_0^1 f(\tau)\, e^{2\pi i k\tau}\, d\tau$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \int_0^1 \sum_{x=0}^{R-1} e^{2\pi i\left(u(x+\tau)^2+v(x+\tau)\right)} e^{2\pi i k\tau}\, d\tau$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \int_0^R e^{2\pi i\left(u\tau^2+(k+v)\tau\right)}\, d\tau$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(k+v)^2} \int_0^R e^{2\pi i u\left(\tau+\frac{k+v}{2u}\right)^2} d\tau$$

$$(4) \qquad = \lim_{M\to\infty} \sum_{k=-2R|u|M}^{2R|u|M} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(k+v)^2} \int_0^R e^{2\pi i u\left(\tau+\frac{k+v}{2u}\right)^2} d\tau.$$

Setzen wir $k = 2Ruj + y$, so wird

$$\sum_{k=-2R|u|M}^{2R|u|M} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(k+v)^2} \int_0^R e^{2\pi i u\left(\tau+\frac{k+v}{2u}\right)^2} d\tau$$

$$= \sum_{y=0}^{2R|u|-1} \sum_{j=-M}^{M} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(2Ruj+y+v)^2} \int_0^R e^{2\pi i u\left(\tau+Rj+\frac{y+v}{2u}\right)^2} d\tau$$

$$- \sum_{y=1}^{2R|u|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(2R|u|M+y+v)^2} \int_0^R e^{2\pi i u\left(\tau+RM\operatorname{sgn}u+\frac{y+v}{2u}\right)^2} d\tau$$

$$= \sum_{y=0}^{2R|u|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(y+v)^2} \int_{-MR}^{(M+1)R} e^{2\pi i u\left(\tau+\frac{y+v}{2u}\right)^2} d\tau$$

$$- \sum_{y=1}^{2R|u|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(2R|u|M+y+v)^2} \int_0^R e^{2\pi i u\left(\tau+RM\operatorname{sgn}u+\frac{y+v}{2u}\right)^2} d\tau.$$

Daher können wir an Stelle der Gleichung (4) schreiben

$$(5) \qquad \sum_{x=0}^{R-1} e^{2\pi i(ux^2+vx)} = \lim_{M\to\infty} \sum_{y=0}^{2R|u|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(y+v)^2} \int_{-MR}^{(M+1)R} e^{2\pi i u\left(\tau+\frac{y+v}{2u}\right)^2} d\tau,$$

denn es ist ja

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{y=1}^{2R|u|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(2R|u|M+y+v)^2} \int_0^R e^{2\pi i u\left(\tau+RM\operatorname{sgn}u+\frac{y+v}{2u}\right)^2} d\tau$$

$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{y=1}^{2R|u|-1} \int_0^1 f(\tau)\, e^{2\pi i(2R|u|M+y)\tau}\, d\tau$$

$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{y=1}^{2R|u|-1} \frac{1}{2}\left(a_{2R|u|M+y} + i b_{2R|u|M+y}\right) = 0.$$

Nun ist für beliebiges reelles y

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-MR}^{(M+1)R} e^{2\pi i u\left(\tau+\frac{y+v}{2u}\right)^2} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i u\tau^2} d\tau = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} u}}{|\sqrt{2u}|}.$$

Aus (5) ergibt sich also

$$\sum_{x=0}^{R-1} e^{2\pi i(ux^2+vx)} = \sum_{y=0}^{2R|u|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(y+v)^2} \cdot \lim_{M\to\infty}\int_{-MR}^{(M+1)R} e^{2\pi i u\left(\tau+\frac{y+v}{2u}\right)^2} d\tau$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn} u}}{|\sqrt{2u}|} \sum_{y=0}^{2R|u|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4u}(y+v)^2}.$$

§ 2.

Beweis einer Reziprozitätsformel für mehrfache Gaußsche Summen.

Eine quadratische Form von n Variablen läßt sich bekanntlich als inneres Produkt zweier n-dimensionaler Vektoren darstellen: Bezeichnet $\mathfrak{x}$ den aus den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gebildeten Vektor $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und ist

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

die symmetrische Koeffizientenmatrix der quadratischen Form

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_{jk} x_j x_k,$$

so ist

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_{jk} x_j x_k = \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{U}\mathfrak{x}.$$

P sei eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl. Wir nennen zwei Vektoren $\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $\mathfrak{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ mit ganzen rationalen Komponenten *kongruent modulo* P, wenn die n Zahlkongruenzen

$$x_j \equiv y_j \pmod{P}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

sämtlich erfüllt sind. Ist mindestens eine dieser n Kongruenzen nicht erfüllt, dann heißen die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ *inkongruent modulo* P. Die Gesamtheit der ganzzahligen n-dimensionalen Vektoren zerfällt in $|P|^n$ Restklassen modulo P, derart daß zwei Vektoren derselben Klasse modulo P kongruent sind, während zwei Vektoren aus verschiedenen Restklassen inkongruent modulo P sind. Unter einem *vollständigen Restsystem modulo* P verstehen wir ein System von $|P|^n$ ganzzahligen Vektoren, von denen je zwei inkongruent modulo P sind.

Die Elemente der Matrix $\mathfrak{U}$ seien jetzt rationale Zahlen, und P sei eine natürliche Zahl, derart daß die Matrix $P\mathfrak{U}$ ganzzahlig ist. Die Summe

$$G(\mathfrak{U};\ P) = \sum_{\mathfrak{x} \bmod P} e^{2\pi i \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{U}\mathfrak{x}}, \tag{6}$$

bei der durch die Summationsvorschrift „$\mathfrak{x}$ mod P" ausgedrückt sei, daß der n-dimensionale Vektor $\mathfrak{x}$ ein vollständiges Restsystem modulo P durchlaufen soll, heißt dann eine *reine n-fache Gaußsche Summe*. Der Wert von $G(\mathfrak{U};\ P)$ ist unabhängig davon, welches Restsystem modulo P der Vektor $\mathfrak{x}$ durchläuft. Insbesondere ist also

$$G(\mathfrak{U};\ P) = \sum_{x_1=0}^{P-1} \sum_{x_2=0}^{P-1} \cdots \sum_{x_n=0}^{P-1} e^{2\pi i \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_{jk} x_j x_k}.$$

Die Elemente der Matrix $\mathfrak{U}$ seien wieder rationale Zahlen,

$$\mathfrak{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

sei ein n-dimensionaler Vektor mit rationalen Komponenten, und die natürliche Zahl P habe die Eigenschaft, daß die Matrix $P\mathfrak{U}$ und der Vektor $P\mathfrak{v}$ ganzzahlig sind. Die Summe

$$G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v};\ P) = \sum_{\mathfrak{x} \bmod P} e^{2\pi i \mathfrak{x}(\mathfrak{U}\mathfrak{x}+\mathfrak{v})} \tag{7}$$

heißt dann eine *allgemeine n-fache Gaußsche Summe*. Der Wert von $G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v};\ P)$ ist unabhängig davon, welches Restsystem modulo P der Vektor $\mathfrak{x}$ durchläuft. Insbesondere ist also

$$G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v};\ P) = \sum_{x_1=0}^{P-1} \sum_{x_2=0}^{P-1} \cdots \sum_{x_n=0}^{P-1} e^{2\pi i \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} u_{jk} x_j x_k + \sum_{j=1}^{n} v_j x_j\right)}.$$

Wir nennen eine n-fache Gaußsche Summe $G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v};\ P)$ *regulär*, wenn die quadratische Form $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{U}\mathfrak{x}$ den Rang n hat; andernfalls nennen wir $G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v};\ P)$ *singulär*.

Die Signatur einer reellen quadratischen Form $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{U}\mathfrak{x}$ bezeichnen wir durch $\operatorname{sgn}\mathfrak{U}$.

Satz 2. *Die reguläre n-fache Gaußsche Summe $G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v};\ R)$ habe die folgenden Eigenschaften:*

I. *$\mathfrak{U}$ sei so beschaffen, daß die $(n+1)$ Hauptunterdeterminanten*

$$D_0 = 1, \quad D_j = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1j} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2j} \\ \vdots & & & \\ u_{j1} & u_{j2} & \cdots & u_{jj} \end{vmatrix} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

sämtlich nicht verschwinden.

II. *R sei so beschaffen, daß die Ausdrücke*

$$R\frac{\Delta_j w}{D_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sämtlich ganze Zahlen sind, wenn man für Δ_j irgendeine j-reihige Determinante aus $\mathfrak{U}$ und für w irgendein Element aus $\mathfrak{U}$ oder irgendeine Komponente von $\mathfrak{v}$ oder die Zahl 1 setzt[7]).

Dann ist

$$(8)\qquad G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v};\ R) = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{U}}}{\left|\sqrt{2^n D_n}\right|} \sum_{y_1=0}^{2R\left|\frac{D_1}{D_0}\right|-1} \sum_{y_2=0}^{2R\left|\frac{D_2}{D_1}\right|-1} \cdots \sum_{y_n=0}^{2R\left|\frac{D_n}{D_{n-1}}\right|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4 D_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} U_{jk}(y_j+v_j)(y_k+v_k)};$$

hierbei bezeichnet U_{jk} das algebraische Komplement von u_{jk} in der Determinante D_n[8]).

Beweis. Im Falle $n = 1$ folgt Satz 2 unmittelbar aus Satz 1: die Gleichung (3) gilt ja insbesondere dann, wenn ihre linke Seite eine reguläre Gaußsche Summe ist.

Allgemein entsteht die rechte Seite der Gleichung (8) aus der linken durch n-malige Anwendung des Kroneckerschen Verfahrens oder der Fourierreihenmethode.

Es sei $n > 1$. Wir nehmen an,

1. Satz 2 sei für $(n-1)$-fache Gaußsche Summen bereits bewiesen,

2. die Voraussetzungen des Satzes 2 seien erfüllt für die n-fache Gaußsche Summe $G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v};\ R)$.

Dann genügt den Bedingungen des Satzes 2 auch jede der $(n-1)$-fachen Gaußschen Summen $G(\overset{*}{\mathfrak{U}}, \overset{*}{\mathfrak{v}}(x_n);\ R)$ in der Gleichung

$$(9)\qquad G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v};\ R) = \sum_{x_n=0}^{R-1} e^{2\pi i (u_{nn} x_n^2 + v_n x_n)}\, G(\overset{*}{\mathfrak{U}}, \overset{*}{\mathfrak{v}}(x_n);\ R),$$

wo

$$\overset{*}{\mathfrak{U}} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,n-1} \\ u_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

$$\overset{*}{\mathfrak{v}}(x_n) = \{v_1 + 2u_{1n}x_n,\ v_2 + 2u_{2n}x_n,\ \ldots,\ v_{n-1} + 2u_{n-1,n}x_n\}$$

[7]) Im Falle $n = 1$ sind die Forderungen I. und II. kraftlos: I. wiederholt nur die Forderung der Regularität von $G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v};\ R)$, II. ist aus formalen Gründen inhaltsleer.

[8]) Es würde genügen, weniger von R zu fordern. Mit Rücksicht auf das Folgende ist aber bei den Voraussetzungen über R jede beliebige Großzügigkeit gestattet.

ist. Und es ergibt sich aus (9) sofort

$$(10)\quad G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};\ R)$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\overset{*}{U}}}{\left|\sqrt{2^{n-1}D_{n-1}}\right|}\sum_{x_n=0}^{R-1} e^{2\pi i(u_{nn}x_n^2+v_n x_n)} \sum_{y_1=0}^{2R\left|\frac{D_1}{D_0}\right|-1} \sum_{y_2=0}^{2R\left|\frac{D_2}{D_1}\right|-1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{y_{n-1}=0}^{2R\left|\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}\right|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4D_{n-1}}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\overset{*}{U}_{jk}(y_j+v_j+2u_{jn}x_n)(y_k+v_k+2u_{kn}x_n)};$$

hierbei bedeutet $\overset{*}{U}_{jk}$ das algebraische Komplement von u_{jk} in der Determinante D_{n-1}.

Beachten wir, daß

$$\sum_{j=1}^{n-1}\overset{*}{U}_{jk}u_{jn} = -U_{nk} = -U_{kn}$$

ist und mithin

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\overset{*}{U}_{jk}(u_{jn}(y_k+v_k)+(y_j+v_j)u_{kn}) = \sum_{k=1}^{n-1}U_{kn}(y_k+v_k),$$

$$D_{n-1}u_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\overset{*}{U}_{jk}u_{jn}u_{kn} = D_n,$$

dann sehen wir, daß die Gleichung (10) sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};\ R)$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\overset{*}{U}}}{\left|\sqrt{2^{n-1}D_{n-1}}\right|} \sum_{y_1=0}^{2R\left|\frac{D_1}{D_0}\right|-1} \cdots \sum_{y_{n-1}=0}^{2R\left|\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}\right|-1} \sum_{x_n=0}^{R-1} \exp\Big\{2\pi i\Big(\frac{D_n}{D_{n-1}}x_n^2$$

$$+\Big(v_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{U_{kn}}{D_{n-1}}(y_k+v_k)\Big)x_n - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\overset{*}{U}_{jk}}{4D_{n-1}}(y_j+v_j)(y_k+v_k)\Big)\Big\}.$$

Hierin können wir nun die Summe über x_n mittels des Kroneckerschen Verfahrens oder der Fourierreihenmethode umformen, denn

$$R\frac{D_n}{D_{n-1}} \quad \text{und} \quad R\Big(v_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{U_{kn}}{D_{n-1}}(y_k+v_k)\Big)$$

sind ja ganz, wenn die Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ganz sind, und $\frac{D_n}{D_{n-1}}$ ist nicht Null. Wir erhalten dann gemäß Gleichung (3)

$$G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};R)=\frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{U}}}{\left|\sqrt{2^{n-1}D_{n-1}}\right|}\sum_{y_1=0}^{2R\left|\frac{D_1}{D_0}\right|-1}\cdots$$
$$\cdots\sum_{y_{n-1}=0}^{2R\left|\frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}\right|-1}\frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\frac{D_n}{D_{n-1}}}}{\left|\sqrt{2\frac{D_n}{D_{n-1}}}\right|}\sum_{y_n=0}^{2R\left|\frac{D_n}{D_{n-1}}\right|-1}\exp\Big\{-\frac{2\pi i D_{n-1}}{4D_n}\Big(y_n+v_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{U_{kn}}{D_{n-1}}(y_k+v_k)\Big)^2-2\pi i\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\overset{*}{U}_{jk}}{4D_{n-1}}(y_j+v_j)(y_k+v_k)\Big\}$$
$$=\frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{U}}}{\left|\sqrt{2^nD_n}\right|}\sum_{y_1=0}^{2R\left|\frac{D_1}{D_0}\right|-1}\cdots\sum_{y_n=1}^{2R\left|\frac{D_n}{D_{n-1}}\right|-1}\exp\Big\{-\frac{2\pi i}{4D_n}\Big(D_{n-1}(y_n+v_n)^2+2\sum_{k=1}^{n-1}U_{kn}(y_k+v_k)(y_n+v_n)+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{U_{jn}U_{kn}+\overset{*}{U}_{jk}D_n}{D_{n-1}}(y_j+v_j)(y_k+v_k)\Big)\Big\}.$$

Und da

$$U_{jn}U_{kn}+\overset{*}{U}_{jk}D_n=U_{jk}D_{n-1}\quad(j,k=1,2,\ldots,n-1)$$

ist[9]), ergibt sich schließlich

$$(8)\quad G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};R)=\frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{U}}}{\left|\sqrt{2^nD_n}\right|}\sum_{y_1=0}^{2R\left|\frac{D_1}{D_0}\right|-1}\cdots\sum_{y_n=0}^{2R\left|\frac{D_n}{D_{n-1}}\right|-1}\exp\Big\{-\frac{2\pi i}{4D_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}U_{jk}(y_j+v_j)(y_k+v_k)\Big\}.$$

Damit ist die Gültigkeit des Satzes 2 für die Gaußsche Summe $G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};R)$ bewiesen.

Folgerung. Die n-fache Gaußsche Summe $G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};P)$ erfülle die Voraussetzung I. des Satzes 2. (Daraus folgt insbesondere die Regularität von $G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};P)$, m. a. W. die Existenz der zu $\mathfrak{U}$ reziproken Matrix

$$\mathfrak{U}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{U_{11}}{D_n} & \frac{U_{21}}{D_n} & \cdots & \frac{U_{n1}}{D_n}\\ \frac{U_{12}}{D_n} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{U_{1n}}{D_n} & \frac{U_{2n}}{D_n} & \cdots & \frac{U_{nn}}{D_n}\end{pmatrix}.)$$

[9]) Vgl. z. B. H. Weber, Lehrb. d. Algebra, Kl. Ausg., Braunschweig 1928, S. 26.

Dann besteht zwischen $G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v}; P)$ und einer „*reziproken*" Gaußschen Summe $G\left(-\frac{\mathfrak{U}^{-1}}{4}, -\frac{\mathfrak{U}^{-1}}{2}\mathfrak{v}; Q\right)$ die Beziehung

$$(11)\quad \frac{G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v}; P)}{P^n} = e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{U}} \left|\sqrt{2^n D_n}\right| e^{2\pi i \mathfrak{v}\cdot\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}\mathfrak{v}} \frac{G\left(\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}, \frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{2}\mathfrak{v}; Q\right)}{Q^n}.$$

Denn wählen wir eine natürliche Zahl R so, daß

1. $G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v}; R)$ den Bedingungen des Satzes 2 genügt,
2. R durch P teilbar ist,
3. jede der Zahlen $2R\frac{D_j}{D_{j-1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ durch Q teilbar ist,

dann ist

$$1.\quad G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v}; R) = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{U}}}{\left|\sqrt{2^n D_n}\right|} \sum_{y_1=0}^{2R\left|\frac{D_1}{D_0}\right|-1} \cdots \sum_{y_n=0}^{2R\left|\frac{D_n}{D_{n-1}}\right|-1} e^{-\frac{2\pi i}{4 D_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} U_{jk}(y_j+v_j)(y_k+v_k)}$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{U}}}{\left|\sqrt{2^n D_n}\right|} e^{2\pi i \mathfrak{v}\cdot\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}\mathfrak{v}} \sum_{y_1=0}^{2R\left|\frac{D_1}{D_0}\right|-1} \cdots \sum_{y_n=0}^{2R\left|\frac{D_n}{D_{n-1}}\right|-1} e^{2\pi i\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{-U_{jk}}{4 D_n} y_j y_k + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{-U_{jk}}{2 D_n} v_k\right) y_j\right)},$$

$$2.\quad G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v}; R) = \frac{R^n}{P^n} G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v}; P),$$

$$3.\quad \sum_{y_1=0}^{2R\left|\frac{D_1}{D_0}\right|-1} \cdots \sum_{y_n=1}^{2R\left|\frac{D_n}{D_{n-1}}\right|-1} e^{2\pi i\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{-U_{jk}}{4 D_n} y_j y_k + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{-U_{jk}}{2 D_n} v_k\right) y_j\right)}$$

$$= \frac{2^n R^n D_n}{Q^n} G\left(\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}, \frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{2}\mathfrak{v}; Q\right),$$

mithin

$$\frac{G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v}; P)}{P^n} = e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{U}} \left|\sqrt{2^n D_n}\right| e^{2\pi i \mathfrak{v}\cdot\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}\mathfrak{v}} \frac{G\left(\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}, \frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{2}\mathfrak{v}; Q\right)}{Q^n}.$$

Wir bezeichnen im folgenden die Determinante einer quadratischen Matrix $\mathfrak{M}$ mit $D(\mathfrak{M})$, die aus $\mathfrak{M}$ durch Transposition hervorgehende Matrix mit $\mathfrak{M}'$.

Hauptsatz 1. *Für reguläre n-fache Gaußsche Summen besteht die Reziprozitätsformel*

$$(11)\quad \frac{G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};P)}{P^n} = e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{U}} \left|\sqrt{2^n D(\mathfrak{U})}\right| e^{2\pi i \mathfrak{v}\cdot\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}\mathfrak{v}} \frac{G\left(\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}, \frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{2}\mathfrak{v}; Q\right)}{Q^n}.$$

Beweis. $\mathfrak{C}$ sei eine quadratische, n-reihige, ganzzahlige, unimodulare Matrix. Dann durchläuft mit $\mathfrak{x}$ auch $\mathfrak{C}\mathfrak{x}$ ein vollständiges Restsystem modulo P. Also ist

$$\begin{aligned} G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};P) &= \sum_{\mathfrak{x} \bmod P} e^{2\pi i \mathfrak{C}\mathfrak{x}\cdot(\mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{x}+\mathfrak{v})} \\ &= \sum_{\mathfrak{x} \bmod P} e^{2\pi i \mathfrak{x}\cdot(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{x}+\mathfrak{C}'\mathfrak{v})} \\ &= G(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'\mathfrak{v}; P). \end{aligned}$$

Bilden wir — mit $\mathfrak{C}^{-1'}$ statt mit $\mathfrak{C}$ — die entsprechende Gleichung für die Summe $G\left(\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}, \frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{2}\mathfrak{v}; Q\right)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} G\left(\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}, \frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{2}\mathfrak{v}; Q\right) &= G\left(\mathfrak{C}^{-1}\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}\mathfrak{C}^{-1'}, \mathfrak{C}^{-1}\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{2}\mathfrak{v}; Q\right) \\ &= G\left(\frac{-(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C})^{-1}}{4}, \frac{-(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C})^{-1}}{2}\mathfrak{C}'\mathfrak{v}; Q\right). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\mathfrak{v}\cdot\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}\mathfrak{v} = \mathfrak{C}'\mathfrak{v}\cdot\frac{-(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C})^{-1}}{4}\mathfrak{C}'\mathfrak{v}.$$

Schließlich haben die quadratischen Formen $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{U}\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}\cdot(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C})\mathfrak{x}$ dieselbe Signatur und dieselbe Diskriminante. Es folgt: Wenn $G(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'\mathfrak{v}; P)$ die Voraussetzung I. des Satzes 2 erfüllt, so daß auf Grund der Folgerung aus Satz 2

$$\frac{G(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'\mathfrak{v}; P)}{P^n} = e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C}} \left|\sqrt{2^n D(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C})}\right| e^{2\pi i \mathfrak{C}'\mathfrak{v}\cdot\frac{-(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C})^{-1}}{4}\mathfrak{C}'\mathfrak{v}} \cdot \frac{G\left(\frac{-(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C})^{-1}}{4}, \frac{-(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C})^{-1}}{2}\mathfrak{C}'\mathfrak{v}; Q\right)}{Q^n}$$

ist, dann ist auch

$$\frac{G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};P)}{P^n} = e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{U}} \left|\sqrt{2^n D(\mathfrak{U})}\right| e^{2\pi i \mathfrak{v}\cdot\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}\mathfrak{v}} \frac{G\left(\frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{4}, \frac{-\mathfrak{U}^{-1}}{2}\mathfrak{v}; Q\right)}{Q^n}.$$

Um nun zu beweisen, daß sich zu jeder regulären Gaußschen Summe $G(\mathfrak{U},\mathfrak{v};P)$ eine unimodulare ganzzahlige Matrix $\mathfrak{C}$ so wählen läßt, daß $G(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'\mathfrak{v}; P)$ die Voraussetzung I. des Satzes 2 erfüllt, genügt es,

folgendes zu zeigen: Wenn für die n-reihige symmetrische Matrix $\mathfrak{T} = (t_{rs})$ vom Range n das Produkt $\prod_{j=0}^{k-1} T_j$ ungleich Null ist, wobei

$$T_0 = 1, \quad T_j = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1j} \\ t_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ t_{j1} & t_{j2} & \dots & t_{jj} \end{vmatrix} \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

und k eine der Zahlen $1, 2, \dots, n-1$ ist, dann gibt es eine quadratische, n-reihige, ganzzahlige, unimodulare Matrix $\mathfrak{L}$, so daß für die Matrix $\mathfrak{W} = \mathfrak{L}'\mathfrak{T}\mathfrak{L} = (w_{rs})$ das Produkt $\prod_{j=1}^{k} W_j$ ungleich Null ist; dabei ist

$$W_0 = 1, \quad W_j = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1j} \\ w_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ w_{j1} & w_{j2} & \dots & w_{jj} \end{vmatrix} \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Denn hieraus folgt, daß es zu jeder regulären Gaußschen Summe $G(\mathfrak{U}, \mathfrak{v}; P)$ $(n-1)$ unimodulare ganzzahlige Matrizen $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \dots, \mathfrak{L}_{n-1}$ gibt, mithin eine unimodulare ganzzahlige Matrix $\mathfrak{C} = \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{L}_2 \dots \mathfrak{L}_{n-1}$ existiert, derart daß für

$$G(\mathfrak{C}'\mathfrak{U}\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'\mathfrak{v}; P) = G(\mathfrak{L}'_{n-1} \dots \mathfrak{L}'_1 \mathfrak{U} \mathfrak{L}_1 \dots \mathfrak{L}_{n-1}, \mathfrak{L}'_{n-1} \dots \mathfrak{L}'_1 \mathfrak{v}; P)$$

die Voraussetzung I. des Satzes 2 erfüllt ist.

Sei also $\mathfrak{T} = (t_{rs})$ eine n-reihige symmetrische Matrix, derart daß

$$T_n \neq 0, \quad \prod_{j=0}^{k-1} T_j \neq 0, \qquad (k = 1 \text{ oder } 2 \text{ oder } \dots \text{ oder } n-1).$$

Ist $T_k \neq 0$, so können wir für $\mathfrak{L}$ die Einheitsmatrix wählen, damit für die Matrix $\mathfrak{W} = \mathfrak{L}'\mathfrak{T}\mathfrak{L}$ das Produkt $\prod_{j=0}^{k} W_j$ ungleich Null wird.

Ist $T_k = 0$, so gibt es wegen $T_n \neq 0$, $T_{k-1} \neq 0$ ein ganzes rationales q, $k < q \leqq n$, so daß die k-reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} t_{11} & \dots & t_{1,k-1} & t_{1k} \\ \vdots & & & \\ t_{k-1,1} & \dots & t_{k-1,k-1} & t_{k-1,k} \\ t_{q1} & \dots & t_{q,k-1} & t_{qk} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Wir wählen nun $\mathfrak{L} = (l_{rs})$ so, daß

$$l_{rs} = \begin{cases} L \text{ (ganz rational)}, & \text{wenn } r = q, \ s = k, \\ 1, & \text{wenn } r = s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Matrix $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}' \mathfrak{T} \mathfrak{L}$ ist dann

$$W_j = T_j \neq 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, k-1),$$

$$W_k = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1,k-1} & t_{1k} + L t_{1q} \\ \vdots & & & & \\ t_{k-1,1} & t_{k-1,2} & \ldots & t_{k-1,k-1} & t_{k-1,k} + L t_{k-1,q} \\ t_{k1} + L t_{q1} & t_{k2} + L t_{q2} & \ldots & t_{k,k-1} + L t_{q,k-1} & t_{kk} + 2 L t_{qk} + L^2 t_{qq} \end{vmatrix}$$

$$= T_k + 2L \begin{vmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1,k-1} & t_{1k} \\ \vdots & & & \\ t_{k-1,1} & \ldots & t_{k-1,k-1} & t_{k-1,k} \\ t_{q1} & \ldots & t_{q,k-1} & t_{qk} \end{vmatrix}$$

$$+ L^2 \begin{vmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1,k-1} & t_{1q} \\ \vdots & & & \\ t_{k-1,1} & \ldots & t_{k-1,k-1} & t_{k-1,q} \\ t_{q1} & \ldots & t_{q,k-1} & t_{qq} \end{vmatrix}$$

$$\neq 0$$

bei geeigneter Wahl der ganzen rationalen Zahl L.

§ 3.

Die Reziprozitätsformel für Gaußsche Summen in algebraischen Zahlkörpern.

K sei ein algebraischer Körper vom Grade n (in bezug auf den rationalen Zahlkörper). Die Differente von K sei $\mathfrak{d}$. Die zu K konjugierten Körper bezeichnen wir mit $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ und demgemäß die in $K^{(p)}$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ liegende Konjugierte einer Zahl α aus K mit $\alpha^{(p)}$. Wir bezeichnen ferner die Spur einer Zahl α aus K mit $S(\alpha)$, die Norm von α mit $N(\alpha)$, die Norm eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus K mit $N(\mathfrak{a})$. Wir bezeichnen schließlich die aus endlich vielen Körperzahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ gebildete rechteckige Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \ldots & \alpha_k^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \ldots & \alpha_k^{(2)} \\ \vdots & & & \\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} & \ldots & \alpha_k^{(n)} \end{pmatrix}$$

mit $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

Es sei η irgendeine Zahl aus K, ω irgendeine von Null verschiedene Zahl aus K. Es gibt dann genau ein ganzes Ideal $\mathfrak{m}$ in K, derart daß

(12) $\qquad \mathfrak{m}\omega\mathfrak{d} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{m}\eta\mathfrak{d}$

ganz sind und

(13) $\qquad (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}\omega\mathfrak{d}, \mathfrak{m}\eta\mathfrak{d}) = 1$

ist. Sind die beiden ganzen Zahlen ϱ_1 und ϱ_2 kongruent modulo $\mathfrak{m}$, so ist $(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\omega + (\varrho_1 - \varrho_2)\eta$ eine Zahl des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{d}}$, folglich

$$S((\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\omega + (\varrho_1 - \varrho_2)\eta)$$

eine ganze rationale Zahl, mithin

$$e^{2\pi i S(\varrho_1^2\omega + \varrho_1\eta)} = e^{2\pi i S(\varrho_2^2\omega + \varrho_2\eta)}.$$

Die Summe $\sum_{\varrho \bmod \mathfrak{m}} e^{2\pi i S(\varrho^2\omega + \varrho\eta)}$, in der ϱ ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{m}$ in K durchläuft, ist also unabhängig von der besonderen Wahl dieses Restsystems. Wir nennen die in K durch ω und η eindeutig bestimmte Summe

$$C(\omega, \eta) = \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{m}} e^{2\pi i S(\varrho^2\omega + \varrho\eta)} \tag{14}$$

eine *allgemeine Gaußsche Summe in K*. Die Summen

$$C(\omega) = C(\omega, 0) \tag{15}$$

sind die von Herrn Hecke eingeführten Gaußschen Summen in K, sie sollen *reine Gaußsche Summen in K* heißen. Das in der Definition von $C(\omega, \eta)$ auftretende, durch (12) und (13) eindeutig bestimmte ganze Ideal $\mathfrak{m}$ bezeichnen wir als das *zu $C(\omega, \eta)$ gehörige Ideal.*

Hauptsatz 2. *Für Gaußsche Summen in K besteht die Reziprozitätsformel*

$$\frac{C(\omega, \eta)}{N(\mathfrak{m})} = e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{A}'\Omega\mathfrak{A}} \left|\sqrt{N(2\omega\mathfrak{d})}\right| e^{2\pi i S\left(\frac{-\eta^2}{4\omega}\right)} \frac{C\left(\frac{-\gamma^2}{4\omega}, \frac{-\eta\gamma}{2\omega}\right)}{N(\mathfrak{m}_1)}; \tag{16}$$

dabei ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, wo die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ein System von n in bezug auf den rationalen Körper linear unabhängigen Zahlen aus K bilden, Ω ist die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \omega^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \omega^{(2)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \omega^{(n)} \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{m}$ bedeutet das zu $C(\omega, \eta)$ gehörige Ideal, $\mathfrak{m}_1$ bedeutet das ganze Ideal, das dadurch bestimmt ist, daß

$$\mathfrak{m}_1 \frac{1}{4\omega\mathfrak{d}} \quad \textit{und} \quad \mathfrak{m}_1 \frac{\eta}{2\omega} \tag{17}$$

ganz sind und

$$\left(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1 \frac{1}{4\omega\mathfrak{d}}, \mathfrak{m}_1 \frac{\eta}{2\omega}\right) = 1 \tag{18}$$

ist, γ ist schließlich eine beliebige Zahl aus K, derart daß $\mathfrak{d}\gamma$ ganz und zu $\mathfrak{m}_1$ teilerfremd ist (so daß zu $C\left(\frac{-\gamma^2}{4\omega}, \frac{-\eta\gamma}{2\omega}\right)$ das Ideal $\mathfrak{m}_1$ gehört).

Hauptsatz 3. *Unter den zu K konjugierten Körpern $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ seien die Körper $K^{(1)}, \ldots, K^{(r_1)}$ reell, die übrigen nicht reell. Dann besteht für Gaußsche Summen in K die Reziprozitätsformel*

$$(19)\quad \frac{C(\omega,\eta)}{N(\mathfrak{m})} = e^{\frac{\pi i}{4}(\operatorname{sgn}\omega^{(1)} + \ldots + \operatorname{sgn}\omega^{(r_1)})} \left|\sqrt{N(2\omega\mathfrak{d})}\right| e^{2\pi i S\left(\frac{-\eta^2}{4\omega}\right)} \frac{C\left(\frac{-\gamma^2}{4\omega}, \frac{-\eta\gamma}{2\omega}\right)}{N(\mathfrak{m}_1)};$$

hierbei bedeutet $\mathfrak{m}$ das zu $C(\omega,\eta)$ gehörige Ideal, $\mathfrak{m}_1$ das ganze Ideal, das dadurch bestimmt ist, daß

$$(17)\qquad \mathfrak{m}_1 \frac{1}{4\omega\mathfrak{d}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{m}_1 \frac{\eta}{2\omega}$$

ganz sind und

$$(18)\qquad \left(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1 \frac{1}{4\omega\mathfrak{d}}, \mathfrak{m}_1 \frac{\eta}{2\omega}\right) = 1$$

ist, und γ ist eine beliebige Zahl aus K, derart daß $\mathfrak{d}\gamma$ ganz und zu $\mathfrak{m}_1$ teilerfremd ist (so daß zu $C\left(\frac{-\gamma^2}{4\omega}, \frac{-\eta\gamma}{2\omega}\right)$ das Ideal $\mathfrak{m}_1$ gehört).

Beweis. Bilden die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ eine Basis des Körpers K, so ist offenbar

$$(20)\qquad \begin{aligned} &N(\mathfrak{m})^{n-1} C(\omega,\eta) \\ &= \sum_{x_1=1}^{N(\mathfrak{m})} \sum_{x_2=1}^{N(\mathfrak{m})} \cdots \sum_{x_n=1}^{N(\mathfrak{m})} e^{2\pi i S\left((\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n)^2 \omega + (\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n)\eta\right)}\ [10]). \end{aligned}$$

---

[10]) Denn $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$ durchläuft $N(\mathfrak{m})^{n-1}$ vollständige Restsysteme modulo $\mathfrak{m}$, wenn die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig voneinander die Zahlen $1, 2, \ldots, N(\mathfrak{m})$ durchlaufen. Das gilt nicht nur in dem Falle, daß $\beta_1, \ldots, \beta_n$ eine Basis des Einheitsideals ist, sondern allgemein, wenn $\beta_1, \ldots, \beta_n$ Basis eines beliebigen ganzen zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Ideals $\mathfrak{b}$ ist. (Von dieser allgemeineren Tatsache werden wir später Gebrauch machen.)

Beweis. Wegen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{m}) = 1$ gibt es in $\mathfrak{b}$ ein β, so daß $(\beta, \mathfrak{m}) = 1$. Die Kongruenz $\beta\xi \equiv \varkappa \pmod{\mathfrak{m}}$ ist dann für jedes ganze $\varkappa$ lösbar, $\mathfrak{b}$ enthält also Zahlen aus jeder Restklasse mod $\mathfrak{m}$; und da die Zugehörigkeit einer Zahl $\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n$ zu einer gewissen Restklasse mod $\mathfrak{m}$ die Zugehörigkeit von

$$\beta_1 (x_1 + y_1 N(\mathfrak{m})) + \ldots + \beta_n (x_n + y_n N(\mathfrak{m})),$$
$$y_1, \ldots, y_n \text{ ganz rational},$$

zu derselben Restklasse nach sich zieht, befinden sich unter den $N(\mathfrak{m})^n$ Zahlen der Menge $\mathfrak{M}$:

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \begin{cases} x_1 = 1, \ \ldots, \ N(\mathfrak{m}) \\ x_2 = 1, \ \ldots, \ N(\mathfrak{m}) \\ \vdots \\ x_n = 1, \ \ldots, \ N(\mathfrak{m}) \end{cases}$$

Setzen wir

$$\mathfrak{M}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \mathfrak{B},$$
$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \mathfrak{x},$$
$$\{\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)}\} = \mathfrak{e},$$

dann können wir die Gleichung (20) folgendermaßen schreiben:

$$N(\mathfrak{m})^{n-1} C(\omega, \eta) = \sum_{\mathfrak{x} \bmod N(\mathfrak{m})} e^{2\pi i \mathfrak{B}\mathfrak{x} \cdot (\Omega \mathfrak{B}\mathfrak{x} + \mathfrak{e})}$$

oder

$$N(\mathfrak{m})^{n-1} C(\omega, \eta) = \sum_{\mathfrak{x} \bmod N(\mathfrak{m})} e^{2\pi i \mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{B}' \Omega \mathfrak{B}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}'\mathfrak{e})}. \tag{21}$$

Aus (12) folgt, daß

$$N(\mathfrak{m})\, S(\alpha\omega) \qquad \text{und} \qquad N(\mathfrak{m})\, S(\alpha\eta)$$

ganz sind für jede ganze Körperzahl α. Mithin sind die Elemente der symmetrischen Matrix $N(\mathfrak{m})\,\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B}$ und die Komponenten des Vektors $N(\mathfrak{m})\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{e}$ ganze rationale Zahlen, so daß die Gleichung (21) folgende Darstellung gestattet:

$$N(\mathfrak{m})^{n-1} C(\omega, \eta) = G(\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'\,\mathfrak{e}; N(\mathfrak{m})). \tag{22}$$

Da

$$|D(\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B})| = N(\omega\mathfrak{d}) \neq 0,$$

$G(\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'\,\mathfrak{e}; N(\mathfrak{m}))$ also regulär ist, ist gemäß Gleichung (11)

$$\frac{G(\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'\,\mathfrak{e}; N(\mathfrak{m}))}{N(\mathfrak{m})^n} = e^{\frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn} \mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B}} \left| \sqrt{N(2\omega\mathfrak{d})} \right| e^{2\pi i \mathfrak{B}'\mathfrak{e} \frac{-(\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B})^{-1}}{4} \mathfrak{B}'\mathfrak{e}} \frac{G\left(\frac{-(\mathfrak{B}'\Omega\mathfrak{B})^{-1}}{4}, \frac{-(\mathfrak{B}'\Omega\mathfrak{B})^{-1}}{2}\mathfrak{B}'\mathfrak{e}; Q\right)}{Q^n}, \tag{23}$$

wo Q eine natürliche Zahl ist, derart daß die Matrix $\frac{Q}{4}(\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B})^{-1}$ und der Vektor $\frac{Q}{2}(\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B})^{-1}\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{e}$ ganzzahlig sind.

Nun ist

$$\mathfrak{B}'\,\mathfrak{e} \cdot \frac{-(\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B})^{-1}}{4} \mathfrak{B}'\,\mathfrak{e} = -\mathfrak{e} \cdot \frac{\Omega^{-1}}{4} \mathfrak{e} = S\left(-\frac{\eta^2}{4\omega}\right). \tag{24}$$

Ferner ist bekanntlich

$$\mathfrak{B}^{-1\prime} = \mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n),$$

Vertreter einer jeden Restklasse mod $\mathfrak{m}$. K bezeichne eine der Restklassen, die unter den Zahlen der Menge $\mathfrak{M}$ eine maximale Anzahl von Repräsentanten hat. Diese Repräsentanten seien $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_q$. Der Restklasse Λ mod $\mathfrak{m}$ entnehmen wir eine Zahl λ, derart daß $\mathfrak{d}/\lambda$. Aus den Zahlen $\varkappa_1 + \lambda, \ldots, \varkappa_q + \lambda$, die sich sämtlich in der Form $\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n$ darstellen lassen, erhalten wir nun, indem wir die $x_1, \ldots, x_n$ modulo $N(\mathfrak{m})$ passend abändern, q verschiedene zu $\mathfrak{M}$ und zur Restklasse $\mathsf{K} + \Lambda$ gehörende Zahlen. Da Λ beliebig war, folgt, daß jede der $N(\mathfrak{m})$ Restklassen mod $\mathfrak{m}$ in der Menge $\mathfrak{M}$ gleich oft vertreten ist.

wobei die Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ eine Basis des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ bilden, so daß

$$(25)\quad G\Big(\frac{-(\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B})^{-1}}{4}, \frac{-(\mathfrak{B}'\,\Omega\,\mathfrak{B})^{-1}}{2}\mathfrak{B}'\mathfrak{e}; Q\Big)$$
$$= G\Big(\frac{-\mathfrak{B}^{-1}\,\Omega^{-1}\,\mathfrak{B}^{-1\prime}}{4}, \frac{-\mathfrak{B}^{-1}\,\Omega^{-1}}{2}\mathfrak{e}; Q\Big)$$
$$= \sum_{x_1=1}^{Q} \cdots \sum_{x_n=1}^{Q} e^{2\pi i S\left(-(\nu_1 x_1+\nu_2 x_2+\ldots+\nu_n x_n)^2 \frac{1}{4\omega} - (\nu_1 x_1+\ldots+\nu_n x_n)\frac{\eta}{2\omega}\right)}$$

wird. Wie man sofort sieht, sind auf Grund von (17) die Elemente der Matrix $\frac{N(\mathfrak{m}_1)}{4}\mathfrak{B}^{-1}\,\Omega^{-1}\,\mathfrak{B}^{-1\prime}$ und die Komponenten des Vektors $\frac{N(\mathfrak{m}_1)}{2}\mathfrak{B}^{-1}\,\Omega^{-1}\,\mathfrak{e}$ ganze rationale Zahlen. Daher können wir in Gleichung (23) $Q = N(\mathfrak{m}_1)$ setzen. Die Reziprozitätsformel (23) nimmt dann mit Rücksicht auf die Gleichungen (22), (24), (25) folgende Gestalt an:

$$(26)\quad \frac{C(\omega,\eta)}{N(\mathfrak{m})} = e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{B}'\Omega\mathfrak{B}}\left|\sqrt{N(2\omega\mathfrak{d})}\right| e^{2\pi i S\left(\frac{-\eta^2}{4\omega}\right)}\frac{1}{N(\mathfrak{m}_1)^n}\sum_{x_1=1}^{N(\mathfrak{m}_1)}\cdots$$
$$\cdots\sum_{x_n=1}^{N(\mathfrak{m}_1)} e^{2\pi i S\left(-(\nu_1 x_1+\ldots+\nu_n x_n)^2\frac{1}{4\omega}-(\nu_1 x_1+\ldots+\nu_n x_n)\frac{\eta}{2\omega}\right)}.$$

Es sei jetzt $\mathfrak{c}$ ein ganzes Ideal, derart daß

$$(27)\qquad (\mathfrak{c}, \mathfrak{m}_1) = 1$$

und

$$\mathfrak{c}\,\mathfrak{d} = \delta,$$

also gleich einem Hauptideal ist. Dann bilden die n Zahlen $\gamma_1 = \delta\,\nu_1$, $\gamma_2 = \delta\,\nu_2, \ldots, \gamma_n = \delta\,\nu_n$ eine Basis von $\mathfrak{c}$, und $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_n x_n$ durchläuft $N(\mathfrak{m}_1)^{n-1}$ vollständige Restsysteme modulo $\mathfrak{m}_1$, wenn die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig voneinander die Werte $1, 2, \ldots, N(\mathfrak{m}_1)$ durchlaufen[11]), und aus (27) und (17) folgt, daß für zwei modulo $\mathfrak{m}_1$ kongruente Zahlen σ_1 und σ_2 aus $\mathfrak{c}$ die Differenz

$$S\Big(\frac{\sigma_1^2}{4\omega\delta^2}+\frac{\eta\sigma_1}{2\omega\delta}\Big) - S\Big(\frac{\sigma_2^2}{4\omega\delta^2}+\frac{\eta\sigma_2}{2\omega\delta}\Big)$$

eine ganze rationale Zahl ist. Mithin ist

$$\sum_{x_1=1}^{N(\mathfrak{m}_1)}\sum_{x_2=1}^{N(\mathfrak{m}_1)}\cdots\sum_{x_n=1}^{N(\mathfrak{m}_1)} e^{2\pi i S\left((\nu_1 x_1+\ldots+\nu_n x_n)^2\frac{-1}{4\omega}+(\nu_1 x_1+\ldots+\nu_n x_n)\frac{-\eta}{2\omega}\right)}$$
$$= \sum_{x_1=1}^{N(\mathfrak{m}_1)}\cdots\sum_{x_n=1}^{N(\mathfrak{m}_1)} e^{2\pi i S\left((\gamma_1 x_1+\ldots+\gamma_n x_n)^2\frac{-1}{4\omega\delta^2}+(\gamma_1 x_1+\ldots+\gamma_n x_n)\frac{-\eta}{2\omega\delta}\right)}$$
$$(28)\qquad = N(\mathfrak{m}_1)^{n-1}\sum_{\substack{\sigma \bmod \mathfrak{m}_1\\ \sigma\equiv 0 \bmod \mathfrak{c}}} e^{2\pi i S\left(\frac{-\sigma^2}{4\omega\delta^2}+\frac{-\sigma\eta}{2\omega\delta}\right)},$$

[11]) Vgl. S. 342, Anm. [10]).

wo die Summationsvorschrift „$\sigma \bmod \mathfrak{m}_1$, $\sigma \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}$“ besagt, daß σ ein durch $\mathfrak{c}$ teilbares vollständiges Restsystem modulo $\mathfrak{m}_1$ durchläuft.

Ist nun $\zeta = \mathfrak{c}\,\mathfrak{z}$ eine zu $\mathfrak{m}_1$ teilerfremde Zahl aus $\mathfrak{c}$, dann wird

$$\sum_{\substack{\sigma \bmod \mathfrak{m}_1 \\ \sigma \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}}} e^{2\pi i S\left(-\frac{\sigma^2}{4\omega\delta^2} - \frac{\eta\sigma}{2\omega\delta}\right)} = \sum_{\sigma \bmod \mathfrak{m}_1} e^{2\pi i S\left(-\frac{\zeta^2\sigma^2}{4\omega\delta^2} - \frac{\eta\zeta\sigma}{2\omega\delta}\right)}$$

$$= C\left(-\frac{\zeta^2}{4\omega\delta^2}, -\frac{\eta\zeta}{2\omega\delta}\right). \tag{29}$$

Denn auf Grund von (17) sind die Ideale

$$\mathfrak{m}_1 \frac{\zeta^2}{4\omega\delta^2}\mathfrak{d} = \mathfrak{m}_1 \frac{\mathfrak{z}^2}{4\omega\mathfrak{d}}$$

und

$$\mathfrak{m}_1 \frac{\eta\zeta}{2\omega\delta}\mathfrak{d} = \mathfrak{m}_1 \frac{\eta\mathfrak{z}}{2\omega}$$

ganze Ideale, und aus (18) folgt mit Rücksicht auf die Teilerfremdheit von $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{z}$, daß

$$\left(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1 \frac{\mathfrak{z}^2}{4\omega\mathfrak{d}}, \mathfrak{m}_1 \frac{\eta\mathfrak{z}}{2\omega}\right) = 1$$

ist.

Aus den Gleichungen (26), (28) und (29) ergibt sich jetzt:

$$\frac{C(\omega, \eta)}{N(\mathfrak{m})} = e^{\frac{\pi i}{4}\operatorname{sgn}\mathfrak{B}'\Omega\mathfrak{B}} \left|\sqrt{N(2\omega\mathfrak{d})}\right| e^{2\pi i S\left(-\frac{\eta^2}{4\omega}\right)} \cdot \frac{C\left(-\frac{\gamma^2}{4\omega}, -\frac{\eta\gamma}{2\omega}\right)}{N(\mathfrak{m}_1)}, \tag{30}$$

wo $\gamma = \frac{\zeta}{\delta}$ eine beliebige Körperzahl ist, derart daß $\mathfrak{d}\gamma$ ganz und zu $\mathfrak{m}_1$ teilerfremd ist.

Gleichung (30) geht über in Gleichung (16), wenn wir $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$ ersetzen. Daß dies erlaubt ist, ist sofort zu sehen: Es ist ja $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{F}$, wobei die rationalzahlige Matrix $\mathfrak{F}$ den Rang n hat, folglich

$$\operatorname{sgn}\mathfrak{A}'\Omega\mathfrak{A} = \operatorname{sgn}\mathfrak{F}'\mathfrak{B}'\Omega\mathfrak{B}\mathfrak{F} = \operatorname{sgn}\mathfrak{B}'\Omega\mathfrak{B}.$$

Damit ist der Hauptsatz 2 bewiesen.

Um den Hauptsatz 3 zu beweisen, haben wir nur noch zu zeigen, daß

$$\operatorname{sgn}\mathfrak{A}'\Omega\mathfrak{A} = \operatorname{sgn}\omega^{(1)} + \operatorname{sgn}\omega^{(2)} + \ldots + \operatorname{sgn}\omega^{(r_1)}$$

ist, wenn unter den konjugierten Körpern $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ die Körper $K^{(1)}, \ldots, K^{(r_1)}$ reell und die übrigen $2r_2$ Körper nicht reell sind.

Wir denken uns die konjugierten Körper so numeriert, daß unter den nichtreellen Körpern jeweils die Körper $K^{(p)}$ und $K^{(p+r_2)}$ konjugiert komplex sind, und setzen

$$\Re(\omega^{(p)}) = \varphi_p, \quad \Im(\omega^{(p)}) = \psi_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Die reelle lineare Substitution

$$\begin{aligned} X_p &= \alpha_1^{(p)} x_1 + \ldots + \alpha_n^{(p)} x_n && (p = 1, 2, \ldots, r_1), \\ Y_p &= \Re(\alpha_1^{(p)}) x_1 + \ldots + \Re(\alpha_n^{(p)}) x_n && (p = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2), \\ Z_p &= \Im(\alpha_1^{(p)}) x_1 + \ldots + \Im(\alpha_n^{(p)}) x_n && (p = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2), \end{aligned}$$

deren Determinante gleich $(-2i)^{-r_2} D(\mathfrak{A})$, also verschieden von Null ist, führt die quadratische Form

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{A}' \Omega \mathfrak{A} \mathfrak{x} = S((\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)^2 \omega)$$

über in

$$\sum_{p=1}^{r_1} \omega^{(p)} X_p^2 + 2 \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} (\varphi_p (Y_p^2 - Z_p^2) - 2 \psi_p Y_p Z_p).$$

Nun ist

$$\varphi_p (Y_p^2 - Z_p^2) - 2 \psi_p Y_p Z_p$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\varphi_p}((\varphi_p Y_p - \psi_p Z_p)^2 - (\varphi_p^2 + \psi_p^2) Z_p^2), & \text{wenn} \quad \varphi_p \neq 0 \\ -\frac{1}{2} \psi_p (Y_p + Z_p)^2 + \frac{1}{2} \psi_p (Y_p - Z_p)^2, & \text{wenn} \quad \varphi_p = 0. \end{cases}$$

Es folgt:

$$\operatorname{sgn} \mathfrak{A}' \Omega \mathfrak{A} = \operatorname{sgn} \omega^{(1)} + \ldots + \operatorname{sgn} \omega^{(r_1)}.$$

Bemerkungen.

1. In ihrer ersten Gestalt (Gleichung (16)) ist die Reziprozitätsformel für Gaußsche Summen in K zwar weniger durchsichtig als in der zweiten Fassung, der der Heckeschen Formel (2) entsprechenden Gleichung (19). Diesem Nachteil stehen jedoch zwei Vorzüge gegenüber: Zunächst bedeutet die Ersetzung des Ausdrucks $\operatorname{sgn} \omega^{(1)} + \ldots + \operatorname{sgn} \omega^{(r_1)}$ durch die Signatur der rationalzahligen quadratischen Form

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} S(\alpha_j \alpha_k \omega) x_j x_k$$

die „Rationalisierung" des Heckeschen Exponenten

$$\operatorname{sgn} \omega^{(1)} + \ldots + \operatorname{sgn} \omega^{(r_1)}.$$

Außerdem benötigt die Gleichung (16) nicht die Unterscheidung reeller und komplexer Körper, und es ist in der Theorie algebraischer Körper ein Fortschritt, wenn Ergebnisse, die nicht auf dieser Unterscheidung beruhen, auch ohne diese Unterscheidung formuliert und bewiesen werden können.

2. Gegeben sei eine rationalzahlige irreduzible Gleichung

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

als definierende Gleichung des Körpers $K : K$ entstehe also aus dem rationalen Körper durch Adjunktion einer Wurzel ϑ des Polynoms $f(x)$. Die Zahl ω werde demgemäß angenommen in der Form

$$\omega = a_0 + a_1 \vartheta + \ldots + a_{n-1} \vartheta^{n-1}$$

($a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ rational). Wählen wir jetzt $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}(1, \vartheta, \ldots, \vartheta^{n-1})$, so können wir $\operatorname{sgn} \mathfrak{A}' \Omega \mathfrak{A}$ sofort aus den Zahlen $c_1, \ldots, c_n, a_0, \ldots, a_{n-1}$ ermitteln; es ist ja $\operatorname{sgn} \mathfrak{A}' \Omega \mathfrak{A} =$ Signatur $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=0}^{n-1} a_q s_{j+k-2+q} x_j x_k$, wo s_p ($p = 0, 1, 2, \ldots$) die p-te Potenzsumme der Wurzeln von $f(x)$ bedeutet. Und die Gleichung

$$\operatorname{sgn} \omega^{(1)} + \ldots + \operatorname{sgn} \omega^{(r_1)} = \operatorname{sgn} \mathfrak{A}' \Omega \mathfrak{A}$$

leistet jetzt nicht nur dies, daß sie eine Summe von Vorzeichen algebraischer Größen durch einen Ausdruck ersetzt, der durch die Signa rationaler Zahlen bestimmt ist und die Unterscheidung reeller und komplexer algebraischer Körper nicht voraussetzt, sie gibt uns zugleich ein Verfahren an die Hand, $\operatorname{sgn} \omega^{(1)} + \ldots + \operatorname{sgn} \omega^{(r_1)}$ wirklich zu berechnen.

(Eingegangen am 17. Februar 1935.)

Note on Hypothesis K of Hardy and Littlewood.

By

S. Chowla (Waltair, India) and S. Sastry (Benares, India).

Let $r_{s,k}(n)$ denote the number of distinct representations of n as a sum of s positive kth. powers (permutation of the bases not allowed) e. g. $r_{2,5}(33) = 1$, $r_{5,5}(33) = 0$. Hardy and Littlewood have conjectured that[1])

(1) $$r_{k,k}(n) = 0(n^{\varepsilon})$$

for every positive ε. On the other hand it is not even known[2]) whether for any positive integer $k > 8$,

(2) *there exist integers n for which $r_{k,k}(n) \geqq 2$.*

We here show that when $k = 10$, (2) holds for infinitely many n.

Proof. Calculation shows that

$$1^{10} + 31^{10} + 55^{10} + 61^{10} + 63^{10} + 85^{10} + 87^{10} + 93^{10} + 101^{10}$$
$$= 17^{10} + 25^{10} + 49^{10} + 67^{10} + 69^{10} + 75^{10} + 89^{10} + 97^{10} + 99^{10}.$$

Adding an arbitrary x^{10} to both sides we have the desired result.

[1]) (1) is their „Hypothesis K". See Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 1—37 (4).

[2]) The cases $k = 5, 6, 8$ of (2) have been proved in papers by Rao and Sastry see Journ. London Math. Soc. **9** (1934), S. 170—171, 172—173, 242—246.

(Eingegangen am 17. Februar 1935.)

Über die Konvergenzbedingungen der komplexen Form des Fourierschen Integrals.

Von

Pedro Pi Calleja aus Barcelona.

I. Einleitung.

§ 1.

Unter gewissen Bedingungen, die wir später betrachten, gilt die Darstellung einer willkürlichen Funktion mittels des Fourierschen Integrals:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u (t - x)\, dt. \tag{1}$$

Für viele Anwendungen ist es zweckmäßig, sie in die komplexe Form zu setzen:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t)\, e^{-iu(t-x)}\, dt. \tag{2}$$

Dabei wird die Konvergenz folgenden Integrals benutzt:

$$0 = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin u (t - x)\, dt. \tag{3}$$

Wenn die Fouriersche Integralformel (1) gilt, existiert immer der Cauchysche Hauptwert (3), aber wir wollen von ihm absehen und die Konvergenzbedingungen des Integrals

$$I = \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin u (t - x)\, dt \tag{4}$$

studieren.

Courant-Hilbert [8, S. 67] bemerken schon, daß die Konvergenzbedingungen des Integrals (1) für das Integral (4) nicht gelten, denn dieses divergiert für die Funktion

$$f(x) = 1 \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1; \quad f(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| > 1$$

an den Unstetigkeitsstellen $|x| = 1$.

Unter gewissen Bedingungen, die von Dini [1], Pringsheim [30] und Young-Hahn [31—36] stammen, kann man beweisen, daß die Konvergenz oder Divergenz des Fourierschen Integrals (1) nur von der Konvergenz oder Divergenz des Dirichletschen singulären Integrals

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(t+x)\,\frac{\sin \lambda t}{t}\,dt \qquad \text{für} \quad \lambda \to \infty$$

abhängt.

Auch läßt sich die Konvergenz des Integrals (4) auf diejenige des Integrals

$$(5)\quad J_\lambda = \int_{-\delta}^{\delta} f(t+x)\,\frac{1-\cos \lambda t}{t}\,dt = 2\int_{-\delta/2}^{\delta/2} f(x+2t)\,\frac{\sin^2 \lambda t}{t}\,dt \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty$$

zurückführen, jedoch nicht unter den gleichen Bedingungen wie für (1), denn das uneigentliche Integral

$$(6)\qquad \int_0^B du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\sin u(t-x)\,dt$$

kann dann noch für $u = 0$ unter Umständen divergieren.

Unsere erste Untersuchung beruht auf der Möglichkeit dieser Zurückführung, d. h. wir wollen sehen, wann das (etwa) uneigentliche Integral (6) existiert. Ist dies der Fall, dann hängt die Konvergenz oder Divergenz des Integrals (6) für $B \to \infty$ nur von der Konvergenz oder Divergenz des Integrals (5) für $\lambda \to \infty$ ab.

Aber die Feststellung der Konvergenz des Integrals (5) ist wesentlich verschieden von derjenigen des Dirichletschen Integrals, denn das Integral (5) darf nicht einmal als singuläres Integral im Sinne von Lebesgue [28] oder Hobson [4—27] betrachtet werden, deren Untersuchungen, besonders die Lebesguesche Arbeit [28] „Sur les intégrales singulières", die klassischen Ergebnisse von Dini [1], Du Bois Reymond [21] und Pringsheim [30] ergänzen und systematisieren.

In der Tat erfüllt der Kern des Integrals (5) keine der notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die der Kern eines singulären Integrals erfüllen muß, um die Konvergenz in bezug auf jede der in der Lebesgueschen Arbeit [28] betrachteten Funktionenklassen sicherzustellen, auch nicht an der Stetigkeitsstelle. Nämlich der Dirichletsche [17] Kern erfüllt die Bedingungen

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\delta'}^{\delta}\frac{\sin \lambda t}{t}\,dt = 0; \quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\delta'}^{\delta}\frac{\sin \lambda t}{\pi t}\,dt = 1; \quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\delta}\frac{2\sin \lambda t}{\pi t}\,dt = 1$$

für beliebige positive Zahlen δ und δ', während wir beweisen werden, daß der Kern unseres Integrals (5) die Bedingungen

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\delta} \frac{1 - \cos \lambda t}{t} \, dt = \infty, \tag{7}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\delta'}^{\delta} \frac{1 - \cos \lambda t}{t} \, dt = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{\delta'}^{\delta} \frac{1 - \cos \lambda t}{t} \, dt = \lg \delta - \lg \delta' \neq 0 \tag{8}$$

für beliebige $\delta > \delta' > 0$ erfüllt. Also sind die klassischen Methoden von Dini [1], Du Bois Reymond [21], Lebesgue [28] usw. auf unseren Fall nicht anwendbar.

Mit dem ersten Mittelwertsatz beweisen wir, daß das Integral (5) (und damit auch (4)) in jedem Punkt x, wo $f(x)$ eine Sprungstelle hat, divergieren muß. Dafür geben Courant-Hilbert [8] nur das zitierte Beispiel.

Da wir höhere Unstetigkeiten nicht studieren wollen, werden wir die Konvergenz des Integrals (5) nur für eine Stetigkeitsstelle der Funktion $f(x)$ beweisen.

Indessen sind die Konvergenzbedingungen des Dirichletschen Integrals an der Stetigkeitsstelle auch nicht gleichwertig denen des Integrals (5). Wir untersuchen die Gültigkeit dieser Bedingungen und beweisen z. B., daß die Dirichletsche [17] Bedingung (oder die Jordansche [22]) nicht hinreichend ist, um die Konvergenz des Integrals (5) sicherzustellen, worin diejenige von (4), entgegen der nicht zutreffenden Behauptung von Webster-Szegö [7] in ihrem Werk „Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik“ (S. 185 und 172) enthalten ist.

Andererseits sind die erste Dinische [1] Bedingung (S. 45, nicht die logarithmische S. 47) und ihre Folgerung hinreichend, um die Konvergenz von (5) zu sichern; daraus folgt die Bemerkung, die Courant-Hilbert [8, S. 67] über die Gültigkeit der Formel (2) für Stetigkeitsstellen der von ihnen betrachteten Funktionenklasse ohne Beweis machen.

Dies beleuchtet auch den verschiedenen Charakter der Dinischen und Jordanschen Bedingungen, worauf schon Whittaker [5, S. 179] und Hobson [4] (2, S. 572, dieser mit Beispielen) hinweisen.

Wir zeigen schließlich, daß sowohl die logarithmische Bedingung von Dini [1, S. 47] als auch diejenigen von de la Vallée Poussin [33] und Lebesgue [26] nicht hinreichen, um die Konvergenz des Integrals (5) zu behaupten.

§ 2.

Zu der uns bekannten Literatur ist zu sagen, daß Burkhardt [12] in der Enzyklopädie bei Betrachtung der komplexen Form des Fourier-

schen Integrals nur Cauchy [14] zitiert, dessen Beweise nur auf die Summierbarkeit (Φ) der betrachteten Integrale im modernen Sinne führen (vgl. Hobson [4] 2, S. 387). Andere Verf. wie Carslaw [3], Hobson [4] und Tonelli [6] betrachten nicht die komplexe Form des Fourierschen Integrals.

Whittaker [5] bemerkt in seiner Modern Analysis (S. 189), daß, wenn auch der $\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\lambda}$ vorhanden ist, nicht das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{0}^{\infty} \sin(t-x)\, u\, du \right\} f(t)\, dt$$

zu existieren braucht, und diese Bemerkung, die im Falle des cosinus zutrifft, ist für den sinus nicht immer richtig, denn mitunter existiert der erste Grenzwert auch nicht, wie das zitierte Beispiel von Courant-Hilbert [8] beweist, welches die von Whittaker geforderten Bedingungen erfüllt. Andere Verf., wie Kronecker [2] und Webster (letzterer in der englischen Aufl. S. 158), erklären, wenn sie es auch nicht ausdrücklich sagen, nur die Konvergenz als Cauchyschen Hauptwert des Integrals (3). Die klassischen Arbeiten von Dini [1], Du Bois Reymond [21] und Pringsheim [30] enthalten nicht unseren Fall, und die moderneren von Hahn [34] und anderen mehr gehen von anderen Gesichtspunkten der Untersuchung der singulären Integrale aus, wie sie systematisch von Hobson [27] (vgl. auch Hobson [4, 2, Kap. VII]) und vor allem von Lebesgue [28] vorgenommen worden sind.

Über die Verallgemeinerung des Fourierschen Integrals gibt es außer den Arbeiten von Plancherel [29], Weyl [32], Titchmarsh [35], Riesz [37] und Zygmund [38] eine systematische und vollständige von H. Hahn [36] in den Acta matematica. Es wird die Gültigkeit des Stieltjesschen Integrals betrachtet:

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\cos \mu x_0 \cdot d\Phi(\mu) + \sin \mu x_0 \cdot d\,\psi(\mu) \right),$$

wo

$$\Phi(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \frac{\sin \mu x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\, \frac{\sin \mu x}{x}\, dx,$$

$$\psi(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \frac{1-\cos \mu x}{x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\, \frac{1-\cos \mu x}{x}\, dx.$$

Obwohl der Ausdruck $\psi(\mu)$, dessen Grenzwert wir für $\mu \to \infty$ suchen, vorkommt, wird er von Hahn nicht betrachtet, denn er braucht ihn

nicht weiter $\left(\text{es ist } \frac{d\,\varphi_n(\mu)}{d\,\mu} = \int_{-n}^{n} f(x) \sin \mu x\, dx\right)$, da er nur die reelle Form dieser Verallgemeinerung studiert.

Im Repertorium von Pascal [13] wird die komplexe Form des Fourierschen Integrals nicht behandelt.

Die Ergebnisse bei verwandten Aufgaben, wie der Untersuchung der Konvergenz oder Schwankung von Integralfolgen oder der Integrale mit einem Parameter, die in dem Hobsonschen Werk [4] enthalten sind (2, S. 312, 318, 323 usw.), sind auf unseren Fall nicht direkt anwendbar. Es [4] bringt Angaben über die wesentliche Literatur.

In neuester Zeit sind die Werke von Campbell-Forster [9], Bochner [10] und Wiener [11] über das Fouriersche Integral erschienen, von denen das Bochnersche das grundlegendste ist.

Das Buch von Campbell-Forster [9] stellt überhaupt ein Verzeichnis Fourierscher Integrale (über 1000) dar zur Anwendung bei den zahlreichen Aufgaben, wo sie gebraucht werden, aber die besonderen Konvergenzbedingungen der komplexen Form des Fourierschen Integrals werden nicht betrachtet, trotz der sorgfältigen Angabe der Grenzen der Anwendbarkeit.

Bei aller Genauigkeit, mit der die Bedingungen, unter denen die Darstellung in der komplexen Form gilt, formuliert werden, untersucht Bochner [10] nicht — abgesehen vom Cauchyschen Hauptwert (S. 42) —, welches die Konvergenzbedingungen sind. Auf S. 51 studiert er den Fall, wo die Funktion $E(\alpha)$ stetig ist, hat aber vorausgesetzt, daß das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} E(\alpha)\, e^{i x \alpha}\, d\alpha$ als Funktion von x absolut integrierbar ist. Wann dies gilt, werden wir erörtern. Selbstverständlich ist die Zurückführung der Konvergenz des Integrals (4) auf die von (5) nicht eingeschlossen. In diesem Werk kann man auch finden, daß die Wienersche Formel (S. 30) in unserem Fall nicht anwendbar ist; man braucht nur den Grenzwert (7) zu betrachten.

Wiener [11] behandelt in seiner Arbeit die Theorie des Fourierschen Integrals von einem anderen Standpunkt; er wendet auf die Reziprozitätsformeln die Sätze von Plancherel [29], Tauber [24] und ihre Verallgemeinerungen an, an denen er selbst reichen Anteil hat. Ferner beschäftigt er sich mit den Anwendungen auf die Zahlentheorie, die verallgemeinerte harmonische Analyse und auf die fastperiodischen Funktionen. Über unsere Aufgabe findet sich jedoch nichts.

II. Zurückführung auf ein verallgemeinertes singuläres Integral.

§ 3.

Um die Zurückführung der Konvergenz des Integrals (4) auf diejenige des Integrals (5) zu untersuchen, brauchen wir das folgende Lemma über die Konvergenz eines Integrals mit einem Parameter, dessen Beweis sich bei Hobson [4, 2, S. 323] findet. Hierzu und im folgenden verwenden wir den Begriff „integrierbar" im Sinne von Lebesgue.

Lemma I. Wenn E eine meßbare Punktmenge von endlichem oder unendlichem Maß ist, und $f(x, y)$ in E für die Punkte y eines gewissen Intervalls $y_0 < y \leqq y_0 + \alpha$ (oder $y \geqq \alpha$) integrierbar ist, und der Grenzwert $f(x, y_0 + 0)$ (oder $f(x, \infty)$) für jeden Wert x (oder fast jedes x, d. h. mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maß Null) existiert, so ist hinreichend dafür, daß $\int\limits_{(E)} f(x, y_0 + 0)\, dx$ (oder $\int\limits_{(E)} f(x, \infty)\, dx$) existiert und gleich dem $\lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_{(E)} f(x, y)\, dx$ (oder $\lim\limits_{y \to \infty} \int\limits_{(E)} f(x, y)\, dx$) ist, das Vorhandensein einer nicht negativen in E integrierbaren Funktion $\Phi(x)$, für die $|f(x, y)| < \Phi(x)$ ist, für jedes x in E und für jedes y in dem Intervall $y_0 < y \leqq y_0 + \alpha$ (oder $y \geqq \alpha$).

Wir untersuchen in den § 3, 4 und 5, wie sich die Bedingungen von Dini [1] und Pringsheim [30], und in § 6, wie sich die verallgemeinerte von Pringsheim [30] und die von Young-Hahn [31—36] auf unseren Fall anwenden lassen.

Satz I. *Ist $f(t)$ absolut integrierbar in $(-\infty, \infty)$ (d. h. die Integrale $\int\limits_a^\infty |f(t)|\, dt$; $\int\limits_{-\infty}^a |f(t)|\, dt$ existieren für jedes a), so hängt die Konvergenz oder Divergenz von*

$$I = \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin u(t - x)\, dt \tag{4}$$

nur ab von der Konvergenz oder Divergenz von

$$J_\lambda = \int_{-\delta}^{\delta} f(t + x) \frac{1 - \cos \lambda t}{t}\, dt \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty, \tag{5}$$

wobei δ eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl bezeichnet.

Der Beweis der Zurückführung von (4) auf (5) ist hier schwerer, als der ähnliche Beweis für das Fouriersche Integral, weil wir hier den Grenzwert, gegen den (4) strebt, nicht kennen und auch nicht wissen, ob $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t - x)\, dt$ als Funktion von u integrierbar ist.

Zunächst untersuchen wir die Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{A}^{B} f(t) \sin u(t-x)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \frac{\cos At - \cos Bt}{t}\, dt$$

für $B > A$ und schätzen es ab. Für feste δ und für jedes $|t| > \delta > 0$ ist

$$\left| \frac{f(t+x)}{t} \cos At \right| < \frac{1}{\delta} |f(t+x)|.$$

Dabei existiert $\int_{\delta}^{\infty} f(t+x) \frac{\cos At}{t}\, dt$ und nach Wahl von ε läßt sich eine nur von ε, aber nicht von A abhängige Zahl b so angeben, daß

$$\left| \int_{b}^{\infty} f(t+x) \frac{\cos At}{t}\, dt \right| < \varepsilon.$$

Nach dem bekannten Riemann-Lebesgueschen Lemma [25] gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein U, so daß

$$\left| \int_{\delta}^{b} \frac{f(t+x)}{t} \cos At\, dt \right| < \varepsilon$$

für jedes $A > U$, da $\left| \frac{f(t+x)}{t} \right|$ integrierbar in (δ, b) ist. Die gleiche Überlegung können wir für B anstellen, und dies zieht nach sich, daß zu gegebenem δ und ε sich eine Zahl U so finden läßt, daß für jedes $B > A > U$ gilt:

$$\left| \int_{\delta}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\delta} \left\{ f(t+x) \frac{\cos At - \cos Bt}{t} \right\} dt \right| < 8\varepsilon. \tag{9}$$

Aus der Existenz von $\int_{-\delta}^{\delta} f(t+x) \frac{\cos At - \cos Bt}{t}\, dt$ folgt die Existenz für jedes B und A von

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{A}^{B} f(t) \sin u(t-x)\, du.$$

Da die Funktion $\sin u(t-x)$ beschränkt und integrierbar und die Funktion $f(t)$ integrierbar ist, folgt, daß $\Phi(t, u) = f(t) \sin u(t-x)$ integrierbar in bezug auf t und u ist (wie z. B. Lebesgue [28, S. 35] beweist) und die Integrale

$$\int_{0}^{u} dt \int_{A}^{B} \Phi(t, u)\, du \quad \text{und} \quad \int_{A}^{B} du \int_{0}^{\mu} \Phi(t, u)\, dt$$

existieren und gleich sind (vgl. Hobson [4, 1, S. 630]).

Betrachten wir die Funktionen:

$$\begin{cases} \psi(u) = \int_0^{\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt, \\ \psi(u, \alpha) = \int_0^{\alpha} f(t) \sin u(t-x)\, dt. \end{cases}$$

Aus $|\psi(u, \alpha)| < \int_0^{\infty} |f(t)|\, dt$ folgt, daß $\psi(u)$ integrierbar und

$$\int_A^B \psi(u)\, du = \lim_{\alpha \to \infty} \int_A^B \psi(u, \alpha)\, du$$

ist (Lemma I). Es sei $B > A > 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es ein $\mu > 0$, so daß

$$\int_{\mu}^{\infty} |f(t)|\, dt < \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{B}$$

ist; dann wird:

$$\int_0^{\infty} dt \int_A^B \Phi(t, u)\, du - \int_A^B du \int_0^{\infty} \Phi(t, u)\, dt \Big|$$

$$= \Big| \int_0^{\mu}\int_A^B + \int_{\mu}^{\infty}\int_A^B - \int_A^B\int_0^{\mu} - \int_A^B\int_{\mu}^{\infty} \Big| = \Big| \int_{\mu}^{\infty}\int_A^B - \int_A^B\int_{\mu}^{\infty} \Big|$$

$$< \int_{\mu}^{\infty} dt \int_A^B |\Phi(t, u)|\, du + \int_A^B du \int_{\mu}^{\infty} |\Phi(t, u)|\, dt < 2B \int_{\mu}^{\infty} |f(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Da ε beliebig ist, können wir für jedes A und B schreiben:

$$(10) \qquad \int_A^B du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_A^B f(t) \sin u(t-x)\, du.$$

Für die Konvergenz von (4) ist notwendig und hinreichend, daß nach Wahl eines $\varepsilon > 0$ sich eine Zahl U so angeben läßt, daß für jedes $B > A > U$

$$\Big| \int_A^B du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt \Big| < 9\varepsilon$$

ausfällt.

Aus (9) und (10) folgt, daß diese notwendige und hinreichende Bedingung mit der folgenden äquivalent ist:

$$\Big| \int_{-\delta+x}^{\delta+x} dt \int_A^B f(t) \sin u(t-x)\, du \Big| < \varepsilon \quad (\text{oder} < 17\varepsilon),$$

d. h. mit der Konvergenz von

$$(5) \qquad \int_{-\delta+x}^{\delta+x} dt \int_{0}^{\lambda} f(t) \sin u(t-x)\, du = \int_{-\delta}^{\delta} f(t+x) \frac{1-\cos \lambda t}{t}\, dt$$

für $\lambda \to \infty$ und jedes einmal festgewählte $\delta > 0$, w. z. b. w. Unsere Voraussetzungen sind geringer als diejenigen, die für die Vertauschung der Integralzeichen in den allgemeinen Sätzen von de la Vallée Poussin [23] und Pringsheim [30] verlangt werden.

§ 4.

Satz II. *Wenn $f(x)$ in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar ist und für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gegen Null strebt, und eine Zahl T_0 existiert, so daß $f(x)$ in (T_0, ∞) und in $(-\infty, -T_0)$ von beschränkter Variation ist (d. h. die Gesamtschwankung von $f(x)$ in (T_0, T_2) oder in $(-T_2, -T_0)$ bleibt für $T_2 \to \infty$ beschränkt*[1]*), dann hängt die Konvergenz oder Divergenz von*

$$(4\,a) \qquad I_a = \int_{a}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt,$$

wo $a > 0$, nur von der Konvergenz oder Divergenz von

$$(5) \qquad \int_{-\delta}^{\delta} f(t+x) \frac{1-\cos \lambda t}{t}\, dt \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty$$

ab, wobei δ eine beliebig kleine, aber feste Zahl ist.

Für (T_0, T_2) oder $(-T_2, -T_0)$ kann man

$$f(x) = \chi_1(x) - \chi_2(x)$$

setzen, wo die χ monotone, nicht zunehmende Funktionen sind und für $x \to \infty$ einen gemeinsamen Grenzwert l_1 und für $x \to -\infty$ einen anderen l_2 haben. Dies ist möglich wegen der Beschränkung der Gesamtschwankung von $f(x)$ für $T_2 \to \infty$, und weil $f(x)$ mit $\frac{1}{x}$ gegen Null strebt.

Also können wir

$$f(x) = [\chi_1(x) - l_1] - [\chi_2(x) - l_1] \quad \text{für} \quad T_0 \leqq x < \infty,$$
$$f(x) = [l_2 - \chi_2(x)] - [l_2 - \chi_1(x)] \quad \text{für} \quad -\infty < x \leqq T_0$$

definieren, womit $f(x)$ die Differenz von zwei nicht zunehmenden (oder nicht abnehmenden) Funktionen sein wird, die für $x \to \infty$ (oder $x \to -\infty$) gegen Null streben.

---

[1]) Dies ist etwas anderes, als vorauszusetzen, daß $f(x)$ von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall von (T_0, ∞) oder von $(-\infty, -T_0)$ ist.

Da die Formeln (4a) und (5) additiv sind, können wir annehmen, daß $f(x)$ mit einer der eben angegebenen monotonen Funktionen übereinstimmt. Wir setzen zur Abkürzung

$$\Phi(t, u) = f(t) \sin u(t - x).$$

Aus dem zweiten Mittelwertsatz folgt

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} \Phi(t, u)\, dt \right| = \left| f(T_1) \int_{T_1}^{T_2'} \sin u(t - x)\, dt \right| < \frac{2}{u} f(T_1)$$

für $T_2 \geqq T_2' \geqq T_1 > T_0$.

Für $u > 0$ wird dieser Ausdruck beliebig klein, wenn T_1 genügend groß genommen wird. Also existiert

$$\int_{T_0}^{\infty} \Phi(t, u)\, dt = f(T_0) \int_{T_0}^{\alpha} \sin u(t - x)\, dt,$$

wobei wegen der Konvergenz des ersten Integrals $\alpha = \lim_{T_2 \to \infty} T_2' \neq \infty$ ist (das ist nur das Chartiersche Kriterium [19]). Daher ist

$$\left| \int_{T_0}^{\infty} \Phi(t, u)\, dt \right| < \frac{2 f(T_0)}{u}.$$

Aus

$$\left| \int_{T_0}^{T_2} f(t) \sin u(t - x)\, dt \right| < \frac{2 f(T_0)}{u}$$

für jedes $T_2 > T_0$, und wo $\frac{2 f(T_0)}{u}$ als Funktion von u in $B > u > A > 0$ integrierbar ist, folgt

$$\int_A^B du \int_{T_0}^{\infty} \Phi(t, u)\, dt = \lim_{T_2 \to \infty} \int_A^B du \int_{T_0}^{T_2} \Phi(t, u)\, dt,$$

denn der $\lim_{T_2 \to \infty} \int_{T_0}^{T_2} \Phi(t, u)\, dt$ existiert (Lemma I).

Für zwei positive Zahlen T_0' und T_0'' größer als T_0 weichen die Integrale

$$\int_A^B du \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, u)\, dt \quad \text{und} \quad \int_A^B du \int_{-T_0'}^{T_0''} \Phi(t, u)\, dt$$

weniger als $\varepsilon \int_A^B \frac{du}{u}$ voneinander ab, wenn nur T_0 genügend groß ist. ε ist dabei willkürlich. Darum gilt für jedes positive B und A:

$$\int_A^B du \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t,u)\,dt = \lim_{\substack{T_0' \to \infty \\ T_0'' \to \infty}} \int_A^B du \int_{-T_0'}^{T_0''} \Phi(t,u)\,dt$$

$$= \lim_{\substack{T_0' \to \infty \\ T_0'' \to \infty}} \int_{-T_0'}^{T_0''} dt \int_A^B \Phi(t,u)\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_A^B \Phi(t,u)\,du,$$

denn die Reihenfolge der Integrationen ist für endliche Grenzen vertauschbar, weil $\sin u(t-x)$ integrierbar und beschränkt und $f(x)$ in jedem endlichen Intervall integrierbar ist.

Also für jedes $B > A > 0$ ist

$$(10') \qquad \int_A^B du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_A^B f(t) \sin u(t-x)\,du.$$

Wenn wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_A^B f(t) \sin u(t-x)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+x) \frac{\cos At - \cos Bt}{t}\,dt$$

einführen, so folgt für jedes $B > A > U$ und genügend großes T_0 aus

$$\left| \int_{T_0}^{T_2} f(t+x) \frac{\cos At}{t}\,dt \right| < \frac{2f(T_0+x)}{A\,T_0} < \frac{2f(T_0+x)}{U \cdot T_0}$$

$$\left| \int_{T_0}^{\infty} f(t+x) \frac{\cos At - \cos Bt}{t}\,dt \right| < \varepsilon.$$

Nach dem Riemann-Lebesgueschen Lemma [25] läßt sich zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$, U so finden, daß für jedes $B > A > U$

$$\left| \int_{\delta}^{T_0} f(t+x) \frac{\cos At - \cos Bt}{t}\,dt \right| < \varepsilon$$

ausfällt.

Durch eine analoge Überlegung findet man, daß nach Wahl von ε und δ sich eine Zahl U angeben läßt, so daß für jedes $B > A > U$ stets

$$(9') \qquad \left| \int_{\delta}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\delta} \left\{ f(t+x) \frac{\cos A t - \cos B t}{t} \right\} d t \right| < 4 \varepsilon.$$

ist.

Für die Konvergenz von (4a) ist notwendig und hinreichend, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ sich eine Zahl U so angeben läßt, daß für jedes $B > A > U$ immer gilt:

$$\left| \int_{A}^{B} d u \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u (t - x) d t \right| < 5 \varepsilon.$$

Aus (9') und (10') folgt, daß diese Bedingung mit

$$\left| \int_{-\delta+x}^{\delta+x} d t \int_{A}^{B} f(t) \sin u (t - x) d u \right| < \varepsilon \qquad \text{(oder } < 9 \varepsilon\text{)}$$

äquivalent ist, d. h. also, mit der für die Konvergenz des Integrals (5) notwendigen und hinreichenden Voraussetzung. *Aber während das für das Fouriersche Integral* (1) *genügt, ist es hier nicht hinreichend, um die Konvergenz des uneigentlichen Integrals*

$$\int_{0}^{B} d u \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u (t - x) d t$$

sicherzustellen, d. h. also, für die Existenz von

$$\lim_{A \to 0} \int_{A}^{B} \psi(u) d u,$$

wobei

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u (t - x) d t$$

ist.

Daß außerdem die klassischen Überlegungen für das Integral (1) hier nicht anwendbar sind[2]), zeigt das folgende Beispiel:

Es sei eine in jedem endlichen Intervall integrierbare Funktion gegeben, die von einer gewissen Stelle T_0 an mit $\frac{1}{\lg t}$ übereinstimmt. Für

[2]) Vgl. Tonelli [6, S. 416]: Die Überlegung von Hobson [4, 2, S. 727] ist nicht korrekt, denn er benutzt, daß $f(x)$ in einem unendlichen Intervall absolut integrierbar ist, was viel mehr ist, als er voraussetzt.

diese existiert nicht $\lim_{A \to 0} \int_A^B du \int_{T_0}^{\infty} \frac{\sin ut}{\lg t} dt$, dagegen aber $\int_0^B du \int_{T_0}^{\infty} \frac{\cos ut}{\lg t} dt$, denn es ist

$$\int_A^B du \int_{T_0}^{\infty} \frac{\cos ut}{\lg t} dt = \int_{T_0}^{\infty} \frac{\sin Bt}{t \lg t} dt - \int_{T_0}^{\infty} \frac{\sin At}{t \lg t} dt,$$

und man kann mit einer ähnlichen Überlegung wie die von Tonelli [6 in S. 417] angestellte setzen:

$$\lim_{A \to 0} \int_{T_0}^{\infty} \frac{\sin At}{t \lg t} dt = 0.$$

In unserem Fall ist

$$\int_A^B du \int_{T_0}^{\infty} \frac{\sin ut}{\lg t} dt = \int_{T_0}^{\infty} \frac{\cos At}{t \lg t} dt - \int_{T_0}^{\infty} \frac{\cos Bt}{t \lg t} dt$$

(wobei die unendlichen Integrale nach dem Chartierschen Kriterium [19] für jedes positive B und A existieren) und wir werden zeigen, daß

$$\lim_{A \to 0} \int_{T_0}^{\infty} \frac{\cos At}{t \lg t} dt = \infty \tag{11}$$

ist. Hierfür genügt es,

$$\lim_{A \to 0} \int_2^{\infty} \frac{\cos At}{t \lg t} dt = \infty$$

zu beweisen, denn man kann auf $\int_2^{T_0} \frac{\cos At}{t \lg t} dt$ das Lemma I anwenden.

Für $0 < A < \frac{\pi}{8} < 1$ ist

$$\int_2^{\pi/2A} \frac{\cos At}{t \lg t} dt = \int_{2A}^{\pi/2} \frac{\cos t}{t \lg \frac{t}{A}} dt > \int_{2A}^{\pi/4} \frac{\cos t}{t \lg \frac{t}{A}} dt > \frac{1}{2} \int_{2A}^{\pi/4} \frac{dt}{t \lg \frac{t}{A}} = \frac{1}{2} \int_2^{\pi/4A} \frac{dt}{t \lg t}$$

und auch

$$-\int_{\pi/2A}^{3\pi/2A} \frac{\cos At}{t \lg t} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{(t+\pi) \lg \frac{t+\pi}{A}} dt < \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{(t+\pi) \lg (t+\pi)} dt = K,$$

wobei K unabhängig von A ist.

Aus

$$\left| \int_{(2n+1)\frac{\pi}{2A}}^{(2n+3)\frac{\pi}{2A}} \frac{\cos A t}{t \lg t} d t \right| < \left| \int_{(2n-1)\frac{\pi}{2A}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2A}} \frac{\cos A t}{t \lg t} d t \right|$$

folgt

$$\int_{\blacksquare}^{\infty} \frac{\cos A t}{t \lg t} d t > \int_{2}^{3\pi/2A} \frac{\cos A t}{t \lg t} d t > \frac{1}{2} \int_{2}^{\pi/4A} \frac{d t}{t \lg t} - K$$

auf Grund der gleichen für alternierende Reihen gebrauchten Überlegung. Für genügend kleine A wächst das letzte Integral über alle Grenzen, denn auf Grund des Mac Laurin-Cauchyschen [15] Kriteriums divergiert $\int_{2}^{\infty} \frac{d t}{t \lg t}$, da $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg n}$ divergiert, wie schon Abel [16] zeigte.

Damit ist die Gleichung (11) bewiesen, d. h. das uneigentliche Integral

$$\int_{0}^{B} d u \int_{T_0}^{\infty} \frac{\sin u t}{\lg t} d t$$

divergiert.

Aus

$$\lim_{T_2 \to \infty} \int_{T_0}^{T_2} d t \int_{0}^{B} \frac{\sin u t}{\lg t} d t = \lim_{T_2 \to \infty} \int_{T_0}^{T_2} \frac{d t}{t \lg t} - \int_{T_0}^{\infty} \frac{\cos B t}{t \lg t} d t = \infty$$

folgt nicht die Divergenz, weil die Vertauschung der Integralzeichen hier nicht zulässig ist.

$$\int_{0}^{B} d u \int_{T_0}^{\infty} \frac{\sin u t}{\lg t} d t = \lim_{T_2 \to \infty} \int_{0}^{B} d u \int_{T_0}^{T_2} \frac{\sin u t}{\lg t} d t$$

ist auch nicht zulässig, denn die Voraussetzungen des Lemma I sind hier nicht erfüllt. Mit Hilfe der partiellen Integration kann man zeigen, daß

$$\lim_{u \to 0} \left[u \int_{T_0}^{\infty} \frac{\sin u t}{\lg t} d t \right] = 0$$

ist; das liefert aber auch keine Entscheidung für die Konvergenz oder Divergenz unseres uneigentlichen Integrals.

Die in dem Werk von Hobson [4, 2, S. 325—326] entwickelten Sätze über unendliche Integrale sind hier nicht anwendbar, weil die Voraussetzungen nicht erfüllt werden.

Satz III. *Wenn man zu den Voraussetzungen des Satzes* II *noch hinzufügt, daß* $\frac{f(t)}{t}$ *in* (a, ∞) *für* $a > 0$ *absolut integrierbar ist, dann existiert*

$$\lim_{A \to 0} \int_A^B du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt$$

und die Konvergenz oder Divergenz des Integrals (4) *hängt nur von der Konvergenz oder Divergenz des Integrals* (5) *ab.*

In der Tat, wenn wir setzen

$$\Phi(t, u) = f(t) \sin u(t-x),$$

ist

$$\left| \int_A^B \Phi(t, u)\, du \right| < 2 \left| \frac{f(t)}{t-x} \right|$$

für $A > 0$ integrierbar in $(x+\delta, \infty)$.

Wegen der Existenz des $\int_0^B \Phi(t, u)\, du$ ist das Lemma I anwendbar und wegen (10′) ist

$$\int_{x+\delta}^{\infty} dt \int_0^B \Phi(t, u)\, du = \lim_{A \to 0} \int_{x+\delta}^{\infty} dt \int_A^B \Phi(t, u)\, du$$

$$= \lim_{A \to 0} \int_A^B du \int_{x+\delta}^{\infty} \Phi(t, u)\, dt = \int_0^B du \int_{x+\delta}^{\infty} \Phi(t, u)\, dt.$$

In derselben Weise folgert man, daß

$$\int_{-\infty}^{x-\delta} dt \int_0^B \Phi(t, u)\, du = \int_0^B du \int_{-\infty}^{x-\delta} \Phi(t, u)\, dt$$

existiert. Sofern $\int_{x-\delta}^{x+\delta} \Phi(t, u)\, dt$ in $(0, B)$ als Funktion von u integrierbar ist, kann man die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^B du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt$$

behaupten, dessen Konvergenz oder Divergenz als unendlichen Integrals für $B \to \infty$ von der des Integrals (5) abhängen wird.

§ 5.

Satz IV. *Wenn* $f(x)$ *in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar ist und für* $x \to \infty$ *und* $x \to -\infty$ *gegen Null geht, wenn sich ferner eine positive Zahl* T_0 *so angeben läßt, daß für jedes* $T_2 > T_0$ *stets* $f(x)$ *in* (T_0, T_2) *absolut stetig ist (oder, was hiermit äquivalent, ein unbestimmtes*

Integral ist, vgl. Hobson [4, 1, S. 592]), *und wenn schließlich die Ableitung* $f'(x)$ *in* (T_0, ∞) *und in* $(-\infty, -T_0)$ *absolut integrierbar ist, dann führt die Konvergenz oder Divergenz des Fourierschen Integrals* (1) *auf diejenige des singulären Dirichletschen Integrals* (vgl. Tonelli [6, S. 413] oder Hobson [4, 2, S. 727]) *und in der gleichen Weise kann man als unmittelbares Korollar des Satzes* II *zeigen, daß die Konvergenz des Integrals* (4a) *auf diejenige des Integrals* (5) *zurückführbar ist. Aber im Gegensatz hierzu sind unsere Voraussetzungen nicht hinreichend, um von* (4) *auf* (5) *überzugehen, denn das uneigentliche Integral*

$$\int_0^B du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt$$

ist mitunter in $u = 0$ *nicht konvergent.*

Es genügt, eine Funktion zu betrachten, für die für $|t| > T_0$ stets $f(t) = \frac{1}{\lg |t|}$ ist. Diese hat in (T_0, ∞) die Ableitung $f'(t) = -\frac{1}{t \lg^2 t}$, welche in (T_0, ∞) absolut integrierbar ist; dennoch ist

$$\lim_{A \to 0} \int_A^B du \int_{T_0}^{\infty} \frac{\sin u t}{\lg t}\, dt = \infty,$$

wie wir schon in § 4 bewiesen haben. Hier läßt sich auch ein dem Satz III ähnlicher Satz aussprechen.

§ 6.

Die verallgemeinerte Bedingung von Pringsheim [30] ist hier hinreichend für die Zurückführung des Integrals (4) auf das Integral (5). Das heißt:

Satz V. *Es sei* $f(x)$ *in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar, und es lasse sich eine Zahl* T_0 *derart angeben, daß in* (T_0, ∞) *und in* $(-\infty, -T_0)$ *stets* $f(x) = \psi(x) g(x) = \psi(x) \sum_{r=1}^{\infty} c_r \cos(\lambda_r x + \mu_r)$ *ist; hierbei sei die Reihe* $\sum_{r=1}^{\infty} |c_r|$ *konvergent, die Punkte* $|\lambda_r|$ *mögen sich im Endlichen nicht häufen,* $\psi(x)$ *strebe für* $x \to \infty$ *und für* $x \to -\infty$ *gegen Null und sei in* (T_0, ∞) *und in* $(-\infty, -T_0)$ *von beschränkter Variation und* $\frac{\psi(x)}{x}$ *in diesen unendlichen Intervallen absolut integrierbar; dann hängt die Konvergenz oder Divergenz von* (4) *nur von der Konvergenz oder Divergenz von* (5) *ab, wenn man das Integral* (4) *als Cauchyschen Hauptwert in den Punkten* $|\lambda_r|$ *auffaßt.*

Der Beweis stimmt mit dem von Tonelli [6] gegebenen überein (S. 418). Man hat nur dabei

$$2\cos(\lambda_r t + \mu_r)\sin u t = \sin[(\lambda_r + u)t + \mu_r] - \sin[(\lambda_r - u)t + \mu_r]$$

statt

$$2\cos(\lambda_r t + \mu_r)\cos u t = \cos[(\lambda_r + u)t + \mu_r] + \cos[(\lambda_r - u)t + \mu_r]$$

zu setzen; dabei ergibt sich auch

$$\left|\int_{T_0}^{T_2} g(t)\sin u t\, dt\right| < \frac{2}{\delta}\sum_{r=1}^{\infty}|c_r|$$

für $l < u < l'$, wenn das Intervall (l, l') keinen Punkt $|\lambda_r|$ enthält und δ deren Minimalabstand von (l, l') bezeichnet. Mithin folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\int_{T_0}^{\infty} f(t)\sin u t\, dt$ für jedes u in (l, l'), und daher ist die in (10′) vorgenommene Vertauschung der Integralzeichen zulässig, wenn wir von dem erwähnten Cauchyschen Hauptwert Gebrauch machen.

Aus der absoluten Integrierbarkeit von $\frac{\psi(x)}{x}$ folgt die absolute Integrierbarkeit von $\frac{f(x)}{x}$ in den angegebenen unendlichen Intervallen, wobei man die Ungleichung (9′) und auch die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^B du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u t\, dt$ in $u = 0$ wie vorher ableitet; damit ist der Satz bewiesen.

Falls $g(x) = \cos\lambda x$ *ist, ist die Bedingung, daß* $\frac{\psi(x)}{x}$ *absolut in* (T_0, ∞) *integrierbar sei, überflüssig für die Zurückführung des Integrals* (1) *auf das singuläre Dirichletsche Integral* (vgl. Tonelli [6, S. 421]). *Aber diese Bedingung ist in unserem Fall notwendig*, wie das vorige Beispiel zeigt.

Auch die Bedingung von Young-Hahn [31—36] ist auf unseren Fall anwendbar; das führt zu

Satz VI: *Es sei* $f(x)$ *in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar, und es lasse sich eine Zahl* T_0 *so angeben, daß in* (T_0, ∞) *und in* $(-\infty, -T_0)$ *stets*

$$f(x) = \psi(x)\, g(x)$$

ist, wobei $g(x)$ *eine periodische Funktion und in jedem endlichen Intervall integrierbar ist, und* $\psi(x)$ *gegen Null für* $x \to \infty$ *und* $x \to -\infty$ *strebt und von beschränkter Variation in* (T_0, ∞) *und in* $(-\infty, -T_0)$ *ist; weiter seien* $\frac{\psi(x)}{x}$ *und* $\frac{f(x)}{x}$ *in diesen unendlichen Intervallen absolut integrierbar; dann hängt die Konvergenz oder Divergenz von* (4) *nur von der Konvergenz*

oder Divergenz von (5) *ab, wenn man das Integral* (4) *in bezug auf u als Cauchyschen Hauptwert in den Punkten* 0, $\frac{\pi}{p}$, $\frac{2\pi}{p}$, ... *(wobei* $2p$ *die Periode von* $g(x)$ *bezeichnet) auffaßt.*

Es genügt wieder, die Überlegung von Tonelli [6, S. 422] anzuwenden, wenn man

$$\left|\sum_{r=0}^{k-1} \sin u\,(2\pi r + t)\right| = \left|\frac{\sin[u\,t + (k-1)\,\pi\,u]\sin\pi\,k\,u}{\sin\pi\,u}\right| \leqq \frac{1}{|\sin\pi\,u|}$$

setzt, statt

$$\left|\sum_{r=0}^{k-1} \cos u\,(2\pi r + t)\right| = \left|\frac{\cos[u\,t + (k-1)\,\pi\,u]\sin\pi\,k\,u}{\sin\pi\,u}\right| \leqq \frac{1}{|\sin\pi\,u|}.$$

III. Konvergenz des verallgemeinerten singulären Integrals J_λ.

§ 7.

Vor allem werden wir sehen, daß die Untersuchung der Konvergenz des Integrals

$$J_\lambda = \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty \tag{5}$$

nicht unter die der singulären Integrale im Sinne von Hobson [27] oder Lebesgue [28] fällt, denn der Kern des vorstehenden Integrals erfüllt nicht im mindesten die Bedingungen des Kerns eines singulären Integrals.

Es genügt allein, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz VII. *Für beliebige* $\delta > \delta' > 0$ *bestehen die Grenzwerte:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{0}^{\delta} \frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt = \infty, \tag{7}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\delta'}^{\delta} \frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\delta'}^{\delta} \frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt = \lg\delta - \lg\delta' \neq 0. \tag{8}$$

In der Tat ist

$$\int_{\delta}^{\delta} \frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt = \int_{0}^{\delta} dt \int_{0}^{\lambda} \sin u\,t\,du = \int_{0}^{\lambda} du \int_{0}^{\delta} \sin u\,t\,dt = \int_{0}^{\lambda} \frac{1-\cos\delta u}{u}\,du,$$

und aus der Konvergenz von $\int_{a}^{\infty} \frac{\cos\delta u}{u}\,du$ und der Divergenz von $\int_{a}^{\infty} \frac{du}{u}$ gegen ∞ folgt der Grenzwert (7).

Sehr leicht ist es auch, (8) zu beweisen. Man braucht auf das letzte Integral in

$$\int_{-\delta'}^{\delta} \frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt = \int_{\delta'}^{\delta} \frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt = \lg\delta - \lg\delta' - \int_{\delta'}^{\delta} \frac{\cos\lambda t}{t}\,dt,$$

welches mit $\frac{1}{\lambda}$ gegen Null konvergiert, nur das Riemann-Lebesguesche Lemma [25] anzuwenden.

So ergibt sich der folgende

Satz VIII: *An jeder Sprungstelle von $f(x)$ (d. h. die von rechts und links genommenen Grenzwerte seien an dieser Stelle vorhanden und verschieden) divergiert das Integral* (5), was für das Dirichletsche Integral nicht eintritt, z. B., wenn die Funktion von beschränkter Variation um x ist.

Denn da $\frac{1-\cos\lambda t}{t} \geqq 0$ in $0 \leqq t \leqq \delta$ ist, folgt aus dem ersten Mittelwertsatz

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\,\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt\right|$$

$$= \left|\int_{0}^{\delta} f(x+t)\,\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt - \int_{0}^{\delta} f(x-t)\,\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt\right|$$

$$= |f(x+\xi_1) - f(x-\xi_2)| \cdot \int_{0}^{\delta} \frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt,$$

wo ξ_1 und ξ_2 passende Punkte aus $(0, \delta)$ sind. Wenn stets $|f(x+\xi_1) - f(x-\xi_2)| > S$ ist, wobei S eine feste, von δ unabhängige Zahl ist, so folgt für jedes δ zwischen 0 und einem genügend kleinen $\delta_1 > 0$ aus der Divergenz von (7) die Divergenz von (5). An Stelle dieses allgemeinen Satzes geben Courant-Hilbert [8, S. 67] nur das zitierte Beispiel (§ 1).

Für eine Funktion, die zu der Klasse gehört, die Lebesgue [28] als „simplement discontinues" oder Courant-Hilbert [8] als „stückweise stetig" bezeichnen (d. h. sie hat höchstens Sprungstellen), werden wir unsere Untersuchung der Konvergenz des Integrals (5) auf Stetigkeitsstellen beschränken. Übrigens sind die Funktionen dann im Riemannschen Sinne integrierbar, da die Menge der Unstetigkeitsstellen abzählbar und vom Maß Null ist (vgl. z. B. Lebesgue [28, S. 59]).

§ 8.

Zur Erleichterung der Aufgabe betrachten wir zunächst das Verhalten des Integrals (5) unter einfachen Annahmen.

Ist $f(x+t)=1$ für $-\delta \leqq t \leqq \delta$, dann verschwindet das Integral (5) für jedes λ, und der gesuchte Grenzwert ist Null.

Wenn $f(x+t)=t^p$ für $-\delta \leqq t \leqq \delta$, wobei p positiv ist, wird

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\delta}^{+\delta} t^p \frac{1-\cos \lambda t}{t}\, dt = \frac{\delta^p - (-\delta)^p}{p}.$$

Hieraus folgt weiter:

Stimmt $f(x+t)$ in $-\delta \leqq t \leqq \delta$ mit einem Polynom $P_n(t)$ überein, so existiert das Integral (5) für $\lambda \to \infty$. Und dann konvergiert auch das Integral (4), falls die Funktion im übrigen außerhalb des Intervalls $-\delta \leqq t \leqq \delta$ die im vorigen Abschnitt betrachteten Bedingungen erfüllt.

Trotzdem und trotz des Weierstraßschen Approximationssatzes gibt es stetige Funktionen, für die das Integral (5) nicht konvergiert, sogar wenn die Jordansche [22] Bedingung erfüllt ist (§ 9). Die sogenannte Dinische [1] Bedingung, unserem Falle angepaßt, genügt aber, um die Konvergenz des Integrals (5) sicherzustellen. Das liefert den

Satz IX: *Wenn für alle positiven* δ' $(<\delta)$ *das Integral* $\int_{\delta'}^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t}\, dt$ *unterhalb einer festen Schranke bleibt (d. h. wenn das Integral* $\int_{0}^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t}\, dt$ *existiert), wobei* $\varphi(t) = f(x+t) - f(x-t)$ *ist, dann konvergiert*

$$J_\lambda = \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{1-\cos \lambda t}{t}\, dt \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty, \tag{5}$$

und es ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} J_\lambda = \int_{0}^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt.$$

(Unsere Voraussetzung hat hier die Stetigkeit von $f(x)$ in x zur Folge; man muß nur das Bertrandsche [18] Kriterium anwenden.)

Es genügt auf

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) \frac{1-\cos \lambda t}{t}\, dt = \int_{0}^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t} (1-\cos \lambda t)\, dt$$

das Riemann-Lebesguesche [25] Lemma anzuwenden.

Hieraus folgt die Lipschitzsche [20] Regel:

Satz X. *Wenn zwei positive Zahlen* C *und* α *existieren, so daß in* $0 < |t| \leqq \delta$ *stets*

$$|f(x+t) - f(x)| < C|t|^\alpha$$

ist, dann konvergiert das Integral (5) *für* $\lambda \to \infty$. (Unsere Voraussetzung hat auch zur Folge, daß die Funktion $f(t)$ in x stetig ist.)

Denn aus $|\varphi(t)| < 2Ct^\alpha$ für $0 < t \leqq \delta$ folgt

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt < 2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt = 2C\frac{\delta^\alpha}{\alpha}.$$

Insbesondere gilt

Satz XI: *Wenn die beiderseitigen Ableitungen* $f'_+(x)$ *und* $f'_-(x)$ *(von rechts und von links) existieren (Courant-Hilbert* [8] *nennen die Funktion dann „stückweise glatt"), und wenn* $f(t)$ *in* x *stetig ist, dann ist das Integral* (5) *konvergent* und das Integral (4) existiert unter den im vorigen Abschnitt für die Zurückführung von (4) auf (5) aufgestellten Bedingungen.

Dies ist die Behauptung, die Courant-Hilbert [8, S. 67] ohne Beweis aufstellen.

§ 9.

Wir werden jetzt beweisen, daß weder die Dirichletsche [17] *noch die Jordansche* [22] *Bedingung (d. h. die Funktion ist um* x *von beschränkter Variation) hinreichend sind, auch nicht an den Stetigkeitsstellen, um die Konvergenz von* (5) *zu sichern.*

Es genügt, das folgende Beispiel zu betrachten: Es sei

$$\begin{cases} f(x+t) = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{\lg t}} & \text{für} \quad 0 < t \leqq \delta < 1, \\ f(x+t) = 0 & \text{für} \quad t \leqq 0 \end{cases}$$

(diese Funktion hat in $t = 0$ eine unendlich groß werdende rechtsseitige Ableitung), dann ist

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\,\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt = \int_0^\delta \frac{1-\cos\lambda t}{-t\sqrt[3]{\lg t}}\,dt.$$

Für $0 < \delta' \leqq \xi \leqq \delta < 1$ ist

$$I(\delta',\lambda) = \int_{\delta'}^{\delta} \frac{1-\cos\lambda t}{-t\sqrt[3]{\lg t}}\,dt = \frac{-1}{\sqrt[3]{\lg\xi}}\int_{\delta'}^{\delta}\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt < \int_0^\delta \frac{1-\cos\lambda t}{-t\sqrt[3]{\lg t}}\,dt = I(0,\lambda)$$

wegen des positiven Verhaltens der integrierten Funktion.

Aus dem Grenzwert (8) folgt

$$\lim_{\lambda\to\infty} I(\delta',\lambda) \geqq \frac{\lg\delta}{-\sqrt[3]{\lg\delta'}} + (\sqrt[3]{\lg\delta'})^2.$$

Für jedes λ und beliebiges δ' ist stets $I(\delta', \lambda) < I(0, \lambda)$, also wäre $I(0, \lambda)$ konvergent, und es würde sein:

$$\lim_{\lambda \to \infty} I(0, \lambda) \geqq \lim_{\lambda \to \infty} I(\delta', \lambda) \geqq \frac{\lg \delta}{-\sqrt[3]{\lg \delta'}} + (\sqrt[3]{\lg \delta'})^2.$$

Dies wird für genügend kleines δ' beliebig groß, und darum ist das Integral (5) divergent, und auch (4), wenn wir die Funktion in passender Weise ergänzen, entgegen der Behauptung von Webster-Szegö [7, S. 185 und 172].

Dieses Beispiel beweist, daß *die Bedingung von de la Vallée Poussin* [33] *in unserem Fall auch nicht hinreichend ist*, denn die Jordansche Bedingung ist ein Sonderfall von ihr (vgl. Hobson [4, 2, S. 531]); aus dem gleichen Grunde *ist auch die Lebesguesche* [26] *Bedingung nicht hinreichend.*

In dieser Arbeit von Lebesgue [26] wird als Dini-Lipschitzsche Bedingung eine andere von Dini [1, S. 47] zitiert; entsprechend auf unseren Fall angewandt, können wir sagen:

Die integrierbare Funktion $f(x)$ erfüllt die logarithmische Dinische Bedingung, wenn man für

$$J_\lambda = \int_{-\delta}^{\delta} f(t+x) \frac{1-\cos \lambda t}{t} dt = \int_{0}^{\delta} \varphi(t) \frac{1-\cos \lambda t}{t} dt, \tag{5}$$

mit

$$\varphi(t) = f(x+t) - f(x-t)$$

jedem willkürlichen σ ein (von t unabhängiges) τ_1 so zuordnen kann, daß für jedes $0 < \tau < \tau_1$ stets

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| \cdot |\lg \tau| < \sigma \tag{12}$$

gleichmäßig in bezug auf t in $(0, \delta)$ ausfällt.

Die Untersuchung dieser Bedingung (welche die Stetigkeit der Funktion $f(t)$ in x zur Folge hat), ist schwieriger als die vorige, und es ist leicht, zu sehen, daß das vorige Beispiel für $t = 0$ nicht die Bedingung erfüllt.

Übrigens ist die logarithmische Dinische Bedingung auch nicht hinreichend für die Konvergenz des Integrals (5); dies möge das folgende Beispiel zeigen:

Für genügend kleines δ sei eine Funktion folgendermaßen definiert:

$$\begin{cases} f(x+t) = \dfrac{1}{|\lg t| \cdot \lg |\lg t|} & \text{für } 0 < t \leqq \delta, \\ f(x+t) = 0 & \text{für } t \leqq 0. \end{cases}$$

Dafür ist in $0 < t \leqq \delta$

$$\varphi(t) = \frac{1}{|\lg t| \cdot \lg |\lg t|}.$$

Die Ableitung $\varphi'(t)$ ist stets positiv, abnehmend und strebt mit $\frac{1}{t}$ gegen ∞. Daher wird die Bedingung (12) in bezug auf t gleichmäßig erfüllt, wenn sie für $t = 0$ erfüllt wird, d. h., wenn

$$\lim_{t \to 0} \varphi(t) \cdot |\lg t| = 0,$$

wie es der Fall ist.

Trotzdem werden wir zeigen, daß

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\delta} \frac{1 - \cos \lambda t}{t |\lg t| \cdot \lg |\lg t|} \, dt = \infty \tag{13}$$

ist. Die Funktion $\frac{1}{t \cdot |\lg t| \cdot \lg |\lg t|}$ strebt monoton gegen ∞ für $t \to 0$ in $0 < t \leqq \delta$, wenn δ genügend klein ist.

Wegen

$$\int_a^{\delta} \frac{dt}{t \cdot |\lg t| \cdot \lg |\lg t|} = \lg(\lg |\lg a|) - \lg(\lg |\lg \delta|)$$

ist

$$\lim_{a \to 0} \int_a^{\delta} \frac{dt}{t \cdot |\lg t| \cdot \lg |\lg t|} = \infty.$$

Folglich wird die Gleichung (13) bewiesen sein, wenn wir den folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Satz XII. *$\varphi(t) \geqq 0$ sei integrierbar in $(0, \delta)$ und erfülle folgende Bedingungen:*

1. $\varphi(t) \to 0$ *für* $t \to 0$.
2. $\frac{\varphi(t)}{t} \to \infty$ *monoton in* $(0, \delta)$ *für* $t \to 0$.
3. $\lim_{a \to 0} \int_a^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t} \, dt = \infty$.

Dann ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\delta} \varphi(t) \, \frac{1 - \cos \lambda t}{t} \, dt = \infty.$$

Zum Beweis dieses Satzes genügt es zu zeigen, daß

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t} \sin^2 \lambda t \, dt = \infty. \tag{14}$$

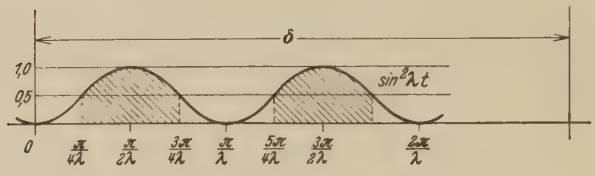
Da $\frac{\sin^2 \lambda t}{t}$ in $\left(0, \frac{\pi}{4\lambda}\right)$ zunimmt, kann man schreiben

$$\int_0^{\pi/4\lambda} \varphi(t) \frac{\sin^2 \lambda t}{t} dt = \frac{2\lambda}{\pi} \int_{\xi}^{\pi/4\lambda} \varphi(t) dt < \varepsilon,$$

wenn $0 \leqq \varphi(t) < 2\varepsilon$ für $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4\lambda}$ ist.

Außerdem ist

$$\sin^2 \lambda t > \frac{1}{2} \text{ in } \frac{(4n+1)\pi}{4\lambda} < t < \frac{(4n+3)\pi}{4\lambda},$$



und wegen der Bedingung 2. ist

$$\int_{\frac{(4n+1)\pi}{4\lambda}}^{\frac{(4n+3)\pi}{4\lambda}} \frac{\varphi(t)}{t} dt > \int_{\frac{(4n+3)\pi}{4\lambda}}^{\frac{(4n+5)\pi}{4\lambda}} \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

Mithin folgt:

$$\int_{\frac{(4n+1)\pi}{4\lambda}}^{\frac{(4n+5)\pi}{4\lambda}} \frac{\varphi(t)}{t} \sin^2 \lambda t \, dt > \int_{\frac{(4n+1)\pi}{4\lambda}}^{\frac{(4n+3)\pi}{4\lambda}} \frac{\varphi(t)}{t} \sin^2 \lambda t \, dt$$

$$> \frac{1}{2} \int_{\frac{(4n+1)\pi}{4\lambda}}^{\frac{(4n+3)\pi}{4\lambda}} \frac{\varphi(t)}{t} dt > \frac{1}{4} \int_{\frac{(4n+1)\pi}{4\lambda}}^{\frac{(4n+5)\pi}{4\lambda}} \frac{\varphi(t)}{t} dt,$$

wobei

$$\int_{\pi/4\lambda}^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t} \sin^2 \lambda t \, dt > \frac{1}{4} \int_{\pi/4\lambda}^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t} dt \to \infty \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty.$$

Daher ist die Gleichung (14) bewiesen und somit gezeigt, daß die logarithmische Dinische Bedingung nicht hinreichend für die Konvergenz unseres verallgemeinerten singulären Integrals (5) ist.

Dagegen ist eine etwas schärfere logarithmische Bedingung hinreichend:

Satz XIII. *Lassen sich für die Funktion* $f(x)$ *drei positive Zahlen* δ, σ *und* $\varepsilon > 0$ *derart bestimmen, daß*

$$|\varphi(t)| \cdot |\lg t|^{1+\varepsilon} < \sigma \quad \text{für} \quad 0 < t \leqq \delta,$$

wobei

$$\varphi(t) = f(x+t) - f(x-t)$$

ist, dann ist das Integral (5) *konvergent.*

Denn nach dem Bertrandschen [18] Kriterium konvergiert das Integral $\int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t}\, dt$, was nach Satz IX hinreichend ist, um die Konvergenz des Integrals (5) zu behaupten.

Zitierte Literatur.

Lehrbücher.

[1] U. Dini, Serie di Fourier, Pisa 1880.
[2] L. Kronecker, Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, S. 83, Leipzig 1894.
[3] H. S. Carslaw, Introduction te the theorie of Fourier's series and integrals, 2. Aufl., London 1921.
[4] E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's Series, Bd. I, 3. Aufl. (1927); Bd. 2. 2. Aufl. (1926), Cambridge.
[5] E. T. Whittaker, G. N. Watson, A Course of modern Analysis, 4. Aufl., Cambridge 1927.
[6] L. Tonelli, Serie trigonometrische, Bologna 1928.
[7] A. G. Webster, Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, (Bearb. von G. Szegö), Leipzig 1930.
[8] R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, 2. Aufl., Berlin 1931.
[9] G. A. Campbell, R. M. Foster, Fourier integrals for practical applications, New York, Bell Telph. Lab. 1931.
[10] S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leigzig 1932.
[11] N. Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge 1933.

Abhandlungen.

[12] H. (F. K. L.) Burkhardt, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaft, Bd. 2, A. 12, V, S. 1088.
[13] E. Pascal, Repertorium der höheren Analysis, Bd. 1—3, 2. Aufl., Leipzig 1929.
[14] A. L. Cauchy, Oeuvres Compl. (2), 1, S. 275.
[15] A. L. Cauchy, Oeuvres Compl. (2), 7, S. 269.
[16] N. H. Abel, Oeuvres, 2, S. 200.
[17] P. G. Lejeune Dirichlet, Sur la convergence des series trigonométriques, Journ. reine u. angew. Math. 4 (1829), S. 157.
[18] J. L. F. Bertrand, Journ. de Math. 7 (1842), S. 38.
[19] J. Chartier, Journ. de Math. 18 (1853), S. 201.
[20] R. (O. S.) Lipschitz, Journ. reine u. angew. Math. 63 (1864), S. 296.

[21] P. (D. G.) Du Bois Reymond, Journ. reine u. angew. Math. 69 (1868), S. 65; ebenda 79 (1875), S. 38.
[22] (M. E.) C. Jordan, Comptes Rendus 92 (1881), S. 228.
[23] Ch. J. de la Vallée Poussin, Ann. de la Soc. Scientifique de Bruxelles 16 (1892), S. 150; Journ. de Math. (4) 8 (1891), S. 421.
[24] A. Tauber, Monatshefte f. Math. 8 (1897), S. 273.
[25] (G. F.) B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer willkürlichen Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Werke, 2. Aufl. (1892), S. 253; H. Lebesgue, Leçons sur les series trigonométriques, Paris (1906), S. 61.
[26] H. Lebesgue, Math. Annalen 61 (1905), S. 251.
[27] E. W. Hobson, Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1908), S. 349; ebenda (2) 12 (1912), S. 166.
[28] H. Lebesgue, Sur les intégrales singulières, Ann. de la Fac. des Scienc. de Toulouse (3) 1 (1909), S. 25.
[29] M. Plancherel, Rend. Circ. Matem. di Palermo 30 (1910), S. 289.
[30] A. Pringsheim, Math. Annalen 68 (1910), S. 367; ebenda 71 (1912), S. 289.
[31] W. H. Young, Proc. Roy. Soc. Edinb. 31 (1911), S. 559.
[32] H. Weyl, Jahr. D. Math. Ver. 20 (1911).
[33] Ch. J. de la Vallée Poussin, Rend. Circ. Matem. di Palermo 31 (1911), S. 296.
[34] H. Hahn, Denkschr. d. Wiener Akad. 93 (1916), S. 585, 657; Wiener Ber. 127 (1918), S. 1763; Monatsh. Math. Phys. 32 (1922).
[35] E. C. Titchmarsh, Proc. Camb. Phil. Soc. 21 (1923), S. 463; Proc. London Math. Soc. (2) 24 (1926), S. 109.
[36] H. Hahn, Acta matematica 49 (1926), S. 301.
[37] F. Riesz, Acta Sc. Szeged 3 (1928).
[38] A. Zygmund, Math. Annalen 98 (1928), S. 562.

(Eingegangen am 10. März 1935.)

Über das verallgemeinerte gemeinsame Maß von zwei Differentialpolynomen.

Von

Franz Rádl in Prag.

§ 1.

Problemstellung.

Die linke Seite der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung von der m-ten Ordnung (Exponenten geben die Ordnung der Ableitungen an)

$$a(y) = a = a_{(0)}\, y^m + a_{(1)}\, y^{m-1} + \ldots + a_{(m)}\, y = 0$$

werden wir im folgenden das Differentialpolynom a oder kurz das Polynom a nennen. Die Benennung „die Lösungen α_i der Gleichung a" soll im folgenden das Fundamentalsystem der partikularen Integrale der Gleichung a bedeuten. Wir setzen voraus, daß die Koeffizienten $a_{(k)}$ Funktionen einer reellen Veränderlichen x sind, sonst einem beliebigen Funktionenkörper angehören und daß der höchste Koeffizient $a_{(0)}$ keine Nullstelle hat.

Zum Polynom a sei das Polynom b

$$b(y) = b = b_{(0)}\, y^n + b_{(1)}\, y^{n-1} + \ldots + b_{(n)}\, y$$

von der n-ten Ordnung gegeben, von dessen Koeffizienten dieselben Voraussetzungen wie beim Polynom a gelten sollen; die Lösungen der Gleichung b werden mit β_j bezeichnet.

Der Verfasser hat schon früher auseinandergesetzt[1]), daß zwei Polynome a, b *wechselseitig transformiert* werden können auf die Polynome a_1, b_1 von deren Lösungen $(\alpha_i)_1$, $(\beta_j)_1$ Relationen

$$(1) \qquad (\alpha_i)_1 = b(\alpha_i), \quad (\beta_j)_1 = a(\beta_j), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

gelten; Bedingung für diese Transformation ist, daß die Resultante $R(a, b)$ beider Polynome a, b nicht verschwindet. Die Koeffizienten der Polynome a_1, b_1 können wir aus den Koeffizienten der Polynome a, b finden, ohne die Lösungen α_i, β_j zu kennen.

Es seien c_{-1}, d_{-1} zwei Polynome (Schema (3)), die zu a_1, b_1 adjungiert sind; wenn wir zu den Polynomen c_{-1}, d_{-1} die wechselseitig transformierten Polynome c, d bilden, so sind diese Polynome c, d dem kontragredienten Theorem gemäß[2]) den Polynomen a, b adjungiert. Die Resultante der

---

[1]) Rádl, Über die verallgemeinerte Division der Differentialpolynome, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 441—456.

[2]) Abh. sub [1]), S. 446.

Polynome a, b und die Resultante der Polynome c_{-1}, d_{-1} haben eine Invarianteneigenschaft [3])

$$R(a,b) = R(c_{-1}, d_{-1}). \tag{2}$$

Zu den gegebenen Polynomen a, b können wir danach eine beiderseitige Folge von Polynomen bilden

$$\begin{cases} a_{-q}, b_{-q} \to \ldots \to a_{-1}, b_{-1} \to a, b \to a_1, b_1 \quad \to \ldots \to a_p, b_p, \\ c_q, d_q \leftarrow \ldots \leftarrow c_1, d_1 \quad \leftarrow c, d \leftarrow c_{-1}, d_{-1} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-p}, d_{-p}. \end{cases} \tag{3}$$

Diese Operation nannte der Verfasser [1]) die *verallgemeinerte Division der Polynome* a, b, und zwar *rechtsseitige* oder *linksseitige* Division, wenn wir zu den positiven Indizes p oder zu den negativen Indizes $-q$ fortschreiten.

Wenn auf der rechten Seite $R(a_p, b_p) = 0$ ist, bricht die Folge rechts mit dem Index p ab und ähnlich schreitet, wenn $R(c_q, d_q) = 0$, die Folge nach links nicht über den Index q fort.

Es handelt sich darum, diese Methode zur Integration der gegebenen Gleichung a auszunutzen; im folgenden sind zu diesem Zweck gewisse Aussagen über das gemeinsame Maß der Polynome a, b entwickelt (§ 2 bis 6). Im § 7 ist die darausfolgende Erniedrigung der Ordnung der gegebenen Gleichung a durch ein Beispiel erläutert.

§ 2.

Zerlegung der Resultante in ein Produkt von zwei Faktoren.

Wir erwähnen zuerst die bekannten Formeln für die Resultante. Die Resultante der Polynome a, b kann durch eine Determinante [4]) ausgedrückt werden, in welcher als Elemente die Koeffizienten der Polynome a, b und ihre Ableitungen auftreten; man definiert sie auch durch eine Wrónskische Determinante, deren Elemente Lösungen α_i, β_j und ihre Ableitungen sind.

Endlich können wir der Resultante die Form (Exponent bedeutet hier die Potenz)

$$R(a,b) = a_{(0)}^{n} \cdot \frac{|b(\alpha_i)|}{|\alpha_i|} \tag{4}$$

geben, wobei wir die Bezeichnung benutzen

$$|b(\alpha_i)| = |b(\alpha_1), b(\alpha_2), \ldots, b(\alpha_m)|, \qquad |\alpha_i| = |\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m|;$$

[3]) Abh. sub [1]), S. 447.

[4]) Escherich, Über die Gemeinsamkeit partikularer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen, Wien. Akad. 46 (1883).

auf der rechten Seite dieser Relationen stehen die Wrónskischen Determinanten, von welchen nur die erste Zeile ausgeschrieben ist. Wenn wir b mit a vertauschen, erhalten wir [5])

$$(5) \qquad R(b,a) = (-1)^{mn} R(a,b) = b_{(0)}^{m} \cdot \frac{|a(\beta_j)|}{|\beta_j|}.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß wir das Polynom b in ein Produkt (Differentialprodukt) von zwei Faktoren zerlegen können

$$(6) \qquad b = b(y) = b^{(2)}[b^{(1)}(y)] = b^{(2)} \times b^{(1)},$$

wo der Faktor $b^{(1)}$ von der r-ten, der Faktor $b^{(2)}$ von der $n-r$-ten Ordnung ist. Wir transformieren zuerst das Polynom a auf das Polynom $a^{1)}$ mittels der Relation

$$\alpha_i^{1)} = b^{(1)}(\alpha_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

unter der Voraussetzung, daß die Resultante der Polynome a, $b^{(1)}$ nicht verschwindet. Der Formel (4) gemäß ist diese Resultante

$$R(a, b^{(1)}) = a_{(0)}^{r} \cdot \frac{|b^{(1)}(\alpha_i)|}{|\alpha_i|}.$$

Dann transformieren wir das so erhaltene Polynom $a^{1)}$ auf das Polynom $a^{2)} \equiv a_1$ mittels der Relation

$$(\alpha_i)_1 = b^{(2)}(\alpha_i^{1)}) = b^{(2)} \times b^{(1)}(\alpha_i) = b(\alpha_i);$$

wir setzen dabei voraus, daß die Resultante der Polynome $a^{1)}$, $b^{(2)}$ nicht Null ist. Diese Resultante lautet wieder nach der Formel (4)

$$R(a^{1)}, b^{(2)}) = a_{(0)}^{n-r} \cdot \frac{|b^{(2)}(\alpha_i^{1)})|}{|\alpha_i^{1)}|}.$$

Das (algebraische) Produkt der beiden Resultanten gibt

$$R(a, b^{(1)}) \cdot R(a^{1)}, b^{(2)}) = a_{(0)}^{n} \cdot \frac{|b(\alpha_i)|}{|\alpha_i|} = R(a,b).$$

Wir haben dadurch die Formel bewiesen

$$(7) \qquad R(a,b) = R(a, b^{(1)}) \cdot R(a^{1)}, b^{(2)}),$$

welche nach dem Obigen nur dann einen Sinn hat, wenn $R(a, b^{(1)}) \neq 0$. Wollen wir diese Formel im Falle $R(a, b^{(1)}) = 0$ verwenden, so müssen wir die Folge der Faktoren $b^{(1)}, b^{(2)}$ vertauschen und damit auch ihre Koeffizienten verändern, weil das Differentialprodukt nicht kommutativ ist. Wir erhalten dann

$$b = b^{(2)} \times b^{(1)} = \bar{b}^{(1)} \times \bar{b}^{(2)}, \quad R(a, \bar{b}^{(1)} \times \bar{b}^{(2)}) = R(a, \bar{b}^{(2)}) \cdot R(\bar{a}^{1)}, \bar{b}^{(1)}),$$
$$R(a, \bar{b}^{(2)}) \neq 0.$$

---

[5]) Rádl, Vlastnosti resultantu při dělení mnohočl. dif., Věst. kr. sp. n. (1927) (tschechisch).

§ 3.

Invarianteneigenschaften der vorigen Zerlegung.

Wir werden zuerst beweisen, daß die Polynome $a, b^{(1)}$ durch wechselseitige Transformation die Polynome $a^{1)}, b_1^{(1)}$ geben und daß wir, wenn wir die Polynome $a^{1)}, b^{(2)}$ wechselseitig transformieren, die Polynome $a_1, b_1^{(2)}$ bekommen, wie es das Schema veranschaulicht

$$a, b^{(1)} \to a^{1)}, b_1^{(1)}, \qquad a^{1)}, b^{(2)} \to a_1, b_1^{(2)}; \tag{8}$$

die Polynome $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}$ sind die Faktoren des Polynoms b_1 gemäß der Relation

$$b_1 = b_1^{(2)} \times b_1^{(1)}. \tag{9}$$

Die Lösungen $\beta_j^{(1)}, (\beta_j^{(1)})_1$ der Polynome $b^{(1)}, b_1^{(1)}$ genügen auch den Polynomen bzw. b, b_1, so daß die Relation gilt

$$(\beta_j^{(1)})_1 = a(\beta_j^{(1)}), \qquad j = 1, 2, \ldots, r,$$

womit der erste Teil der Behauptung (8) bewiesen ist.

Die Gleichung $b^{(2)} \times b^{(1)} = 0$ können wir auch schreiben

$$b^{(2)}(Y) = 0, \qquad Y = b^{(1)}(y),$$

woraus wir die Relation zwischen den Lösungen $\beta_j^{(2)} (j = r+1, r+2, \ldots, n)$ des Polynoms $b^{(2)}$ und den Lösungen β_j $(j = r+1, r+2, \ldots, n)$ des Polynoms b

$$\beta_j^{(2)} = b^{(1)}(\beta_j)$$

erhalten. Eine ähnliche Relation gilt zwischen den Lösungen $(\beta_j^{(2)})_1$ des Polynoms $b_1^{(2)}$ und den Lösungen $(\beta_j)_1$ des Polynoms b_1

$$(\beta_j^{(2)})_1 = b_1^{(1)}(\beta_j)_1 = b_1^{(1)}[a(\beta_j)] = b_1^{(1)} \times a(\beta_j).$$

Aber wenn wir das Polynom $b^{(2)}$ mittels des Polynoms $a^{1)}$ transformieren, so hat das so entstehende Polynom die Lösungen

$$a^{1)}(\beta_j^{(2)}) = a^{1)}[b^{(1)}(\beta_j)] = a^{1)} \times b^{(1)}(\beta_j),$$

welche mit den Lösungen $(\beta_j^{(2)})_1$ identisch sind, weil die Polynome $b_1^{(1)} \times a$, $a^{1)} \times b^{(1)}$ identisch sind [6]). Das Schema (8) ist dadurch begründet.

Wir bilden das zu b_1 adjungierte Polynom d_{-1} mit seinen Faktoren

$$d_{-1} = d_{-1}^{(2)} \times d_{-1}^{(1)}, \tag{10}$$

wo der Faktor $d_{-1}^{(1)}$ zu $b_1^{(2)}$, der Faktor $d_{-1}^{(2)}$ zu $b_1^{(1)}$ adjungiert ist. Das Schema (8) können wir durch ein kontragredientes Schema ergänzen

$$\begin{aligned} &a, b^{(1)} \to a^{1)}, b_1^{(1)}, \qquad a^{1)}, b^{(2)} \to a_1, b_1^{(2)}, \\ &c, d^{(2)} \leftarrow c^{1)}, d_{-1}^{(2)}, \qquad c^{1)}, d^{(1)} \leftarrow c_{-1}, d_{-1}^{(1)}, \end{aligned} \tag{11}$$

---

[6]) Abh. wie unter [1]), S. 443.

wo die Polynome $c_{-1}, d_{-1}^{(1)}$ zu den Polynomen bez. $a_1, b_1^{(2)}$ adjungiert sind; in Übereinstimmung mit dem kontragradienten Theorem (§ 1) erhalten wir aus ihnen durch wechselseitige Transformation die zu $a^{1)}, b^{(2)}$ adjungierten Polynome $c^{1)}, d^{(1)}$. Ähnlich entstehen aus den Polynomen $c^{1)}, d_{-1}^{(2)}$ die Polynome $c, d^{(2)}$.

Die Invarianteneigenschaft (2) können wir jetzt aus dem Schema (11) in den Relationen

$$(12) \qquad R(a, b^{(1)}) = R(c^{1)}, d_{-1}^{(2)}), \qquad R(a^{1)}, b^{(2)}) = R(c_{-1}, d_{-1}^{(1)})$$

darstellen.

§ 4.

Verallgemeinerung der vorigen Untersuchung.

Wenn wir in der Formel (7) den Faktor $b^{(2)}$ von neuem in zwei Faktoren zerlegen, können wir die Resultante $R(a^{1)}, b^{(2)})$ durch das Produkt von zwei neuen Resultanten ersetzen, so daß wir allgemein sagen können: Wenn wir das Polynom b in ein Produkt von k Faktoren zerlegen

$$b = b^{(k)} \times b^{(k-1)} \times \ldots \times b^{(1)},$$

so bekommen wir für die Resultante der Polynome a, b

$$(13) \qquad R(a, b) = R(a, b^{(1)}) \cdot R(a^{1)}, b^{(2)}) \ldots R(a^{k-1)}, b^{(k)});$$

die Polynome $a^{1)}, a^{2)} \ldots a_1$ entstehen aus den Polynomen bez. $a, a^{1)} \ldots a^{k-1)}$ durch die Transformation mittels der Polynome $b^{(1)}, b^{(2)} \ldots b^{(k)}$ unter der Voraussetzung, daß die Resultanten $R(a, b^{(1)}) \ldots R(a^{k-2)}, b^{(k-1)})$ nicht verschwinden.

Für das zu b_1 adjungierte Polynom d_{-1} gilt

$$d_{-1} = d_{-1}^{(k)} \times d_{-1}^{(k-1)} \times \ldots \times d_{-1}^{(1)},$$

wo die Faktoren $d_{-1}^{(1)}, d_{-1}^{(2)} \ldots d_{-1}^{(k)}$ zu den Faktoren bez. $b_1^{(k)}, b_1^{(k-1)} \ldots b_1^{(1)}$ adjungiert sind. Das zu b_1 adjungierte Polynom sei wie in (3) mit c_{-1} bezeichnet; wenn nun die Polynome $c_{-1}^{1)}, c_{-1}^{2)} \ldots c$ aus den Polynomen $c_{-1}, c_{-1}^{1)} \ldots c_{-1}^{k-1)}$ durch die Transformation mittels der Polynome $d_{-1}^{(1)}, d_{-1}^{(2)} \ldots d_{-1}^{(k)}$ entstehen, so gilt

$$(14) \qquad R(c_{-1}, d_{-1}) = R(c_{-1}, d_{-1}^{(1)}) \cdot R(c_{-1}^{1)}, d_{-1}^{(2)}) \ldots R(c_{-1}^{k-1)}, d_{-1}^{(k)}).$$

Die Invarianteneigenschaften (12) werden hier so verallgemeinert, daß ein beliebiger Faktor in der Formel (13) dem ebensovielten von der entgegengesetzten Richtung genommenen Faktor in (14) gleich ist.

Es sei $k = n$ und die Faktoren $b^{(1)}, b^{(2)} \ldots b^{(k)}$ seien von der ersten Ordnung; ihre Lösungen seien bez. $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} \ldots \beta^{(n)}$. Weil die

Lösung $\beta^{(1)}$ auch der Gleichung b genügt, können wir $\beta^{(1)}$ auch mit β bezeichnen. Der Formel (5) gemäß gilt

$$R(a, b^{(1)}) = (-1)^m \frac{a(\beta)}{\beta}, \quad R(a^1, b^{(2)}) = (-1)^m \frac{a^1(\beta^{(2)})}{\beta^{(2)}} \dots R(a^{n-1}, b^{(n)})$$

$$= (-1)^m b_{(0)}^m \frac{a^{n-1}(\beta^{(n)})}{\beta^{(n)}},$$

so daß wir *eine neue Formel für die Resultante der Polynome* a, b erhalten

$$R(a, b) = (-1)^{mn} b_{(0)}^m \frac{a(\beta)}{\beta} \cdot \frac{a^1(\beta^{(2)})}{\beta^{(2)}} \dots \frac{a^{n-1}(\beta^{(n)})}{\beta^{(n)}}, \tag{15}$$

wobei wir voraussetzen, daß alle Faktoren höchstens mit Ausnahme des letzten nicht verschwinden. Wenn einer von diesen Faktoren, z. B. jener mit dem Polynom a^k, verschwindet, können wir den folgenden Faktor mit dem Polynom a^{k+1} nicht mehr schreiben, weil das Polynom a^{k+1} dann nicht existiert, es sei denn, daß wir die Stelle des Faktors $b^{(k+1)}$ im Produkt $b^{(n)} \times b^{(n-1)} \times \dots \times b^{(1)}$ weiter nach vorwärts verschieben können, wobei wir die Koeffizienten der Faktoren allgemein nicht unverändert lassen dürfen, weil das Produkt nicht kommutativ ist.

Eine ähnliche Formel bekommen wir durch die Zerlegung des Polynoms a in m Faktoren erster Ordnung

$$R(a, b) = a_{(0)}^n \frac{b(\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{b^1(\alpha^{(2)})}{\alpha^{(2)}} \dots \frac{b^{m-1}(\alpha^{(m)})}{\alpha^{(m)}}. \tag{16}$$

§ 5.

Das rechts- und linksseitige gemeinsame Maß von zwei Polynomen.

Schreiben wir jedes von den Polynomen a, b in der Form eines Produktes von zwei Faktoren wenigstens erster Ordnung

$$a = a^{(2)} \times a^{(1)}, \qquad b = b^{(2)} \times b^{(1)} \tag{17}$$

und sind dann die rechtsseitigen Faktoren $a^{(1)}, b^{(1)}$ identisch, so sagen wir, daß die Polynome a, b ein gemeinsames *rechtsseitiges Maß* haben; die Polynome a, b haben ein gemeinsames *linksseitiges Maß*, wenn die linksseitigen Faktoren $a^{(2)}, b^{(2)}$ identisch sind.

Um bei den Polynomen a, b ihr *größtes* gemeinsames rechtsseitiges Maß zu finden, drücken wir die rechtsseitige Division des Polynoms a durch das Polynom b in der Form aus [1])

$$a = p \times b + r, \tag{18}$$

wo die Polynome a, b, p, r Dividend, Divisor, Quotient und Rest sind. Bei gegebenen Polynomen a, b können wir die Koeffizienten der Polynome p, r einfach durch Differenzieren (wenn wir die einfachen alge-

braischen Operationen nicht beachten) eindeutig bestimmen. Wenn $r \neq 0$, so schreiben wir die Relation von der Form (18) noch einmal an, wobei aber jetzt der Divisor b an die Stelle des Dividenden und der Rest r an die Stelle des Divisors tritt und diese Operation wiederholen wir bis der Rest verschwindet. Dann ist der letzte Divisor das größte gemeinsame rechtsseitige Maß der Polynome a, b; wir finden auf diese Art auch die gemeinsamen rechtsseitigen Faktoren $a^{(1)}, b^{(1)}$.

Dieses Verfahren ist bekannt[7]) und es wird hier nur deswegen erwähnt, um bemerken zu können, daß es gerade so für die linksseitige Division der Polynome a, b[1])

$$a = b \times q + s \tag{19}$$

Gültigkeit hat, wo die Polynome a, b, q, s Dividend, Divisor, Quotient und Rest sind. Bei gegebenen Polynomen a, b können wir die Koeffizienten der Polynome q, r einfach durch Differenzieren eindeutig berechnen. Ist $s \neq 0$, so schreiben wir die Relation von der Form (19) noch einmal an, wobei nun der Divisor Dividend und der Rest Divisor wird und dieses Verfahren wiederholen wir bis der Rest gleich Null ist. Der letzte Divisor ist nachher das größte gemeinsame linksseitige Maß der Polynome a, b. Wir finden auf diese Art auch die gemeinsamen linksseitigen Faktoren $a^{(2)}, b^{(2)}$ dieser Polynome.

Wir ersetzen nun in der Relation (19) beide Seiten durch adjungierte Polynome; dann erhalten wir, wenn die Polynome $q), s)$ bez. zu q, s adjungiert sind,

$$c = q) \times d + s);$$

diese Relation definiert die rechtsseitige Division des Polynoms c durch das Polynom d.

Wenn wir ähnlich in den Relationen, welche oben aus der Relation (19) durch das dem Verfahren von Euklid analoge Verfahren entstanden sind, beide Seiten durch ihre adjungierten Polynome ersetzen, so erhalten wir anstatt des größten linksseitigen Maßes der Polynome a, b das diesem adjungierte rechtsseitige Maß der Polynome c, d.

Haben die Polynome a, b die Faktoren $a^{(1)}, b^{(1)}$ gemeinsam, so genügen beiden Gleichungen a, b auch die Lösungen der identischen Gleichungen $a^{(1)}, b^{(1)}$ und, wie bekannt, verschwindet die Resultante der Polynome a, b.

Wenn die Polynome a, b ein rechtsseitiges gemeinsames Maß haben, verschwindet ihre Resultante $R(a, b)$; wenn dieselben Polynome ein linksseitiges gemeinsames Maß haben, verschwindet die Resultante $R(c, d)$ ihrer adjungierten Polynome c, d.

---

[7]) Schlesinger, Handb. d. lin. Diff.-Gl. I, S. 42.

§ 6.

Rechtsseitiges p-indiziertes und linksseitiges $-q$-indiziertes gemeinsames Maß von zwei Polynomen.

Wenn in der Folge der Polynome (3) die Resultante $R(a_p, b_p)$ der Polynome a_p, b_p verschwindet, so daß die Polynome a_p, b_p einen rechtsseitigen gemeinsamen Faktor haben, sagen wir, daß die Polynome a, b *ein rechtsseitiges p-indiziertes gemeinsames Maß* haben. Verschwindet dagegen die Resultante $R(c_q, d_q)$ der Polynome c_q, d_q oder, mit anderen Worten, haben die Polynome a_{-q}, b_{-q} einen gemeinsamen linksseitigen Faktor, so sagen wir, daß die Polynome a, b ein *linksseitiges $-q$-indiziertes gemeinsames Maß* haben.

Wir werden jetzt ein Theorem beweisen, dessen erster Teil lautet:

Wenn zwei Polynome a, b ein rechtsseitiges p-indiziertes gemeinsames Maß haben, so können wir jedes von den Polynomen a, b einfach durch Differenzieren ihrer Koeffizienten in das Produkt von zwei Faktoren zerlegen. Die rechtsseitigen Faktoren in beiden Produkten sind von derselben Ordnung wie die gemeinsamen rechtsseitigen Faktoren der Polynome a_p, b_p.

Diesem Theorem gemäß können wir unter der Bedingung $R(a_p, b_p) = 0$ die Polynome a, b in der Form (17) schreiben, wo die Polynome $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ von derselben z. B. von der r-ten Ordnung sind. Mit anderen Worten, wir können die Integration der Gleichung a von der m-ten Ordnung ersetzen durch die Integration der Gleichungen $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ von bez. r-ter und $m - r$-ter Ordnung. Ähnlich wird die Integration der Gleichung b von der n-ten Ordnung auf die Integration der Gleichungen $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ von bez. r-ter und $n - r$-ter Ordnung zurückgeführt.

Der zweite Teil des Theorems lautet:

Wenn zwei Polynome a, b ein linksseitiges $-q$-indiziertes gemeinsames Maß haben, können wir jedes von den Polynomen a, b einfach durch Differenzieren ihrer Koeffizienten in das Produkt von zwei Faktoren zerlegen. Die linksseitigen Faktoren in beiden Produkten sind von derselben Ordnung wie die gemeinsamen linksseitigen Faktoren der Polynome a_{-q}, b_{-q}.

Die Bedeutung dieses zweiten Teiles für die Lösung der Gleichung a ist nach dem Obigen klar.

Das Theorem können wir sofort beweisen, wenn wir die Formel (13) benutzen. In Übereinstimmung mit dieser Formel gilt

$$R(a, b) \cdot R(a_1, b_1) \ldots R(a_p, b_p) = R(a, b_p \times b_{p-1} \times \ldots \times b)$$
$$= R(a_p \times a_{p-1} \times \ldots \times a, b);$$

die Polynome a, $b^{(1)}$; $a^{(1)}$, $b^{(2)} \ldots a^{p-1)} b^{(p)}$ aus der Formel (13) gehören hier dem Schema (3) an und können deswegen mit entsprechenden Indizes versehen werden. Alle Faktoren auf der linken Seite bis höchstens

auf den letzten sind von Null verschieden. Wenn dieser letzte Faktor verschwindet, verschwinden auch die beiden rechten Seiten, darum haben einerseits die Polynome a, $b_p \times b_{p-1} \times \ldots \times b$, andererseits die Polynome $a_p \times a_{p-1} \times \ldots \times a$, b die gemeinsamen rechtsseitigen Faktoren, und zwar von derselben r. B. r-ten Ordnung, welche die gemeinsamen rechtsseitigen Faktoren der Polynome a_p, b_p haben. Wir können deswegen die Faktoren $a^{(1)}$, $a^{(2)}$; $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ der Polynome a, b in der Formel (17) einfach durch Differenzieren finden.

Wir schließen ebenso, daß unter der Bedingung $R(c_q, d_q) = 0$ die Polynome c, $d_q \times d_{q-1} \times \ldots \times d$ einen gemeinsamen rechtsseitigen, oder die Polynome a, $b \times b_{-1} \times \ldots \times b_{-q}$ einen gemeinsamen linksseitigen Faktor z. B. s-ter Ordnung haben. Ähnliches gilt von den Polynomen $c_q \times c_{q-1} \times \ldots \times c$, d und von ihren adjungierten Polynomen

$$a \times a_{-1} \times \ldots \times a_{-q},\ b.$$

Die beiden Teile des Theorems sind so bewiesen. Wir können jetzt auch auf eine andere Art kontrollieren, daß die vorigen Polynome z. B. a, $b_p \times b_{p-1} \times \ldots \times b$ gemeinsame Lösungen haben.

Denn die Polynome a_p, b_p haben unter der Bedingung $R(a_p, b_p) = 0$ z. B. r gemeinsame Lösungen

$$(\alpha_i)_p = (\beta_i)_p, \qquad i = 1, 2 \ldots r.$$

Wir können dann der Relation (1) gemäß schreiben

$$(\alpha_i)_{p+1} = b_p[(\alpha_i)_p] = b_p[(\beta_i)_p] = 0;$$

in diese Beziehung können wir einsetzen

$$(\alpha_i)_p = b_{p-1}[(\alpha_i)_{p-1}], \quad (\alpha_i)_{p-1} = b_{p-2}[(\alpha_i)_{p-2}] \ldots (\alpha_i)_1 = b(\alpha_i),$$

woraus folgt

$$(\alpha_i)_{p+1} = b_p \times b_{p-1} \times \ldots \times b(\alpha_i) = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots r,$$

so daß die Polynome a, $b_p \times b_{p-1} \times \ldots \times b$ in der Tat gemeinsame Lösungen α_i $(i = 1, 2 \ldots r)$ haben.

Dem Polynom $b_p \times b_{p-1}$ genügen r Lösungen $(\alpha_i)_{p-1}$ der Gleichung a_{p-1}; die Ordnung des Polynoms $b_p \times b_{p-1}$ können wir deswegen, wenn sie nicht kleiner als m ist, mit Hilfe des Polynoms a_{p-1} auf die $m-1$-te Ordnung erniedrigen. Ebenso kann die Ordnung des Polynoms $b_p \times b_{p-1} \times \ldots \times b$ mittels des Polynoms a auf die $m-1$-te Ordnung erniedrigt werden.

Daß wir bei den Polynomen a, b unter der Bedingung $R(a_p, b_p) = 0$ ihre Faktoren $a^{(1)}$, $a^{(2)}$; $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ kennen, ersehen wir sofort aus dem Schema (3). Weil wir die Faktoren $a_p^{(1)}$, $a_p^{(2)}$; $b_p^{(1)}$, $b_p^{(2)}$ der Polynome a_p, b_p kennen, kann man die entsprechenden Faktoren bei ihren adjungierten Polynomen c_{-p}, d_{-p}, dann bei den transformierten Polynomen c_{-p+1},

d_{-p+1}; c_{-p+2}, $d_{-p+2} \ldots c$, d berechnen. Wir können schließlich die entsprechenden Faktoren bei den adjungierten Polynomen a, b finden. Aber die Berechnung wäre nach dieser Methode weitläufig.

§ 7.

Ein Beispiel.

In der Folge der Polynomenpaare (3) können wir die Polynome a_p, b_p so wählen, daß ihre Resultante verschwindet; wir bilden zu diesen Polynomen adjungierte Polynome c_{-p}, d_{-p}, dann die wechselseitig transformierten Polynome c_{-p+1}, $d_{-p+1} \ldots c_{-1}$, d_{-1}; c, d, zuletzt die adjungierten Polynome a, b. Geradeso können wir die Polynome c_q, d_q so wählen, daß ihre Resultante Null ist und dann bilden wir die Polynome a_{-q}, $b_{-q} \ldots a_{-1}$, b_{-1}; a, b.

In beiden Fällen können wir auf diese Art eine unbeschränkte Anzahl von Gleichungen a von der m-ten Ordnung bilden, deren Lösung auf die Lösung von zwei Gleichungen r-ter und $m - r$-ter Ordnung übergeführt werden kann.

Wenn wir den Funktionenkörper der Koeffizienten der Polynome a, b auf den Körper der rationalen Funktionen beschränken, muß die Gleichung a in diesem Körper reduzibel sein[8]). Wenn die Gleichung a in diesem Körper irreduzibel ist, müssen wir die Koeffizienten des Polynoms b in einem solchen Funktionenkörper wählen, damit in ihm die Gleichung a reduzibel sei.

Um ein Beispiel anzugeben, transformieren wir die Polynome (p ist eine ganze positive Zahl)

$$a = y'' - x y' - (p+1) y, \qquad b = y' - x y$$

wechselseitig, so daß wir die Polynome erhalten

$$a_1 = y'' - x y' - p y, \qquad b_1 = b = y' - x y.$$

Es folgt daraus, daß wir durch eine p-mal wiederholte wechselseitige Transformation die Polynome

$$a_p = y'' - x y' - y, \qquad b_p = b = y' - x y$$

bekommen; weil das Polynom a_p in der Form

$$y_1' = 0, \quad y_1 = y' - x y \quad \text{oder} \quad y' \times (y' - x y)$$

geschrieben werden kann, verschwindet die Resultante $R(a_p, b_p)$, darum kann das Polynom a in zwei Faktoren zerlegt werden und die Gleichung a ist durch Quadraturen integrierbar.

---

[8]) Fuchs, Berl. Sitzungsber. 1888, S. 1274.

Für $m = 3$ haben wir

$a = y'' - xy' - 3y$, $b = y' - xy$; $a_1 = y'' - xy' - 2y$, $b_1 = y' - xy$

$a_2 = y'' - xy' - y = y' \times (y' - xy)$, $b_2 = b = y' - xy$.

Dem Theorem im § 6 gemäß hat das Polynom

$$b \times b \times b = y''' - 3xy'' + 3(x^2 - 1)y' + (3x - x^3)y$$

mit dem gegebenen Polynom a denselben rechtsseitigen Faktor. Um ihn zu finden, setzen wir in das Polynom $b \times b \times b$ den Wert y'' aus der Gleichung a, wir bekommen den gesuchten Faktor

$$(x^2 + 1)y' - (x^3 + 3x)y \quad \text{oder} \quad y' - \left(x + \frac{2x}{x^2 + 1}\right)y.$$

Wenn wir aus den Relationen (die Bezeichnung p hängt nicht mit p in (3) zusammen)

$$y_1' + py_1 = 0, \quad y_1 = y' - \left(x + \frac{2x}{x^2 + 1}\right)y$$

den Wert y_1 eliminieren, das Resultat mit der Gleichung a vergleichen und den Koeffizienten p berechnen, erhalten wir

$$y'' - xy' - 3y = \left(y' + \frac{2x}{x^2 + 1}y\right) \times \left(y' - \left(x + \frac{2x}{x^2 + 1}\right)y\right).$$

§ 8.

Gruppeneigenschaften des Differentialproduktes bei der verallgemeinerten Division.

Das Differentialprodukt ist distributiv aber nicht kommutativ; sonst hat es dieselben Gruppeneigenschaften wie das algebraische Produkt.

Zuerst gilt der Formel (1) gemäß

$$(\alpha_i)_2 = b_1[(\alpha_i)_1] = b_1 \times b\,(\alpha_i),$$

wo die Ordnung des Polynoms $b_1 \times b$ mittels des Polynoms a auf die $m - 1$-te Ordnung erniedrigt werden kann. Die Folge dreier aufeinanderfolgender Faktoren hat die Eigenschaft

$$b_2 \times (b_1 \times b) = (b_2 \times b_1) \times b.$$

Wenn wir das Polynom b nicht verändern, haben wir es mit dem Einheitsfaktor e multipliziert, so daß

$$e \times b = b \times e = b.$$

Wenn wir die Einheitstransformation bei beiden Polynomen a, b gleichzeitig durchführen, können wir für das Einheitselement e ein Polynom 0-ter Ordnung mit dem Koeffizienten λ setzen, wo λ eine beliebige Funktion von x ist. Denn die Polynome $a \times e$, $b \times e$ geben dann durch wechselseitige Transformation wieder die Polynome a_1, b_1; die Polynome

$e \times a$, $e \times b$ geben nach der Transformation die Polynome $a_1\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$, $b_1\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)$, welche durch weitere wechselseitige Transformation die Polynome a_2, b_2 geben. Die Paare der Polynome a, b; $a \times e$, $b \times e$; $e \times a$, $e \times b$ können für gleichwertig gehalten werden.

Wenn endlich die Transformation (1) zulässig ist (das heißt wenn $R(a, b) \neq 0$), gilt auch [9])

$$\alpha_i = b^{-1}[(\alpha_i)_1],$$

wo b^{-1} ein Polynom $m-1$-ter Ordnung ist, so daß zur Transformation b auch die inverse Transformation b^{-1} existiert, für welche die Relation besteht

$$b \times b^{-1} = b^{-1} \times b = e.$$

Wenn die Resultante $R(a_p, b_p)$ verschwindet, können wir die Polynome a, b durch bloßes Differenzieren in die Form des Produktes (17) bringen. Wenn wir eine Lösung β_i des Faktors $b^{(1)}$ kennen, so können wir die entsprechende Lösung α_i des Faktors $a^{(1)}$ durch bloßes Differenzieren berechnen.

Zu diesem Zwecke schreiben wir

$$\alpha_i = b^{-1}[(\alpha_i)_1], \quad (\alpha_i)_1 = b_1^{-1}[(\alpha_i)_2] \ldots (\alpha_i)_{p-1} = b_{p-1}^{-1}[(\alpha_i)_p]$$

oder in einer anderen Symbolik

$$\alpha_i = b^{-1} \times b_1^{-1} \times \ldots \times b_{p-1}^{-1}[(\alpha_i)_p].$$

Weil nun die Relationen bestehen

$$(\alpha_i)_p = (\beta_i)_p, \quad (\beta_i)_p = a_{p-1} \times a_{p-2} \times \ldots \times a(\beta_i),$$

so ist die Lösung α_i durch die Formel gegeben

$$\alpha_i = b^{-1} \times b_1^{-1} \times \ldots \times b_{p-1}^{-1} \times a_{p-1} \times a_{p-2} \times \ldots \times a(\beta_i),$$

in welcher wir das Polynom auf der rechten Seite auf die $n-1$-te Ordnung erniedrigen können.

Es gilt augenscheinlich auch die inverse Relation

$$\beta_i = a^{-1} \times a_1^{-1} \times \ldots \times a_{p-1}^{-1} \times b_{p-1} \times b_{p-2} \times \ldots \times b(\alpha_i),$$

wo die Ordnung des Polynoms auf der rechten Seite auf die $m-1$-te Ordnung erniedrigt werden kann.

---

[9]) Fuchs, Berl. Sitzungsber. 1888, S. 1273.

(Eingegangen am 22. März 1935.)

Integralgeometrie 3.

Croftons Formeln für den Raum.

Von

O. Varga in Hamburg.

Zwischen den Dichten (s. § 1) von Punkt, Ebene und Gerade des gewöhnlichen Euklidischen Raumes bestehen gewisse Relationen, die man entsprechend den Betrachtungen von Crofton[1]) für analoge Aufgaben in der Ebene als Croftonsche Formeln ansprechen kann. Croftonsche Formeln für den dreidimensionalen Raum wurden schon behandelt, scheinbar geschah dies aber nur für Fälle, wo man von dem Produkt der Dichten zweier Punkte bzw. zweier Ebenen ausging[2]). Hier sollen außer diesen beiden Croftonschen Formeln auch diejenigen betrachtet werden, die man erhält, wenn man von dem Produkt der Dichten von: Punkt und Ebene. Gerade und Ebene, Gerade und Punkt, zweier Geraden, von drei Ebenen und von drei Punkten ausgeht.

In § 1 werden die bekannten Ausdrücke für die Dichten der Elemente, Punkt, Gerade und Ebene, zusammengestellt und neue Darstellungsformen dafür gegeben. In § 2 sollen dann die Croftonschen Formeln ermittelt werden, während im § 3 einige Anwendungen dieser Formeln auf gewisse Integrale gebracht werden, die mit ihnen in unmittelbarem Zusammenhang stehen.

§ 1.

Die Dichte für Punkt, Gerade und Ebene im R_3.

Ich erinnere zunächst an den Begriff des Maßes und der Dichte irgendeiner linearen ν-dimensionalen Mannigfaltigkeit E_ν des Euklidischen R_n[3]). Hängen die E_ν im R_n von $q = (n - \nu)(\nu + 1)$ wesentlichen Parametern ab, dann ist das Maß derselben das q-fache Integral

$$\text{(I)} \qquad M = \int F(u_1, \ldots, u_q)\, du_1\, du_2 \ldots du_q,$$

[1]) H. W. Crofton, On the theory of local probability ..., Philosophical Transactions of the Royal Society 158 (1868), S. 181—199. Ferner in der Encyclopaedia Brittanica, 9th edition 19 (1885) unter „Probability", S. 768—788.

[2]) Siehe darüber Vorlesungen über geometrische Wahrscheinlichkeiten, abgehalten von G. Herglotz im S. S. 1933 in Göttingen, im folgenden kurz als Herglotz Vorlesungen zitiert, oder R. Deltheils „Probabilites geometriques", II. Bd. von Borels Wahrscheinlichkeitsrechnungen, im folgenden zitiert als R. Deltheil a. a. O.

[3]) Siehe darüber R. Deltheil a. a. O., S. 18 und 32, oder Herglotz Vorlesungen.

welches invariant gegenüber der Euklidischen Bewegungsgruppe ist und erstreckt wird über einen gewissen q-dimensionalen Bereich dieser E_r. Wegen der Transitivität der E_r bei Bewegungen ist (I) bis auf einen konstanten Faktor das einzig mögliche Maß. Als Dichte bezeichnet man dann die Differentialform

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_q)\, du_1 \ldots du_q. \tag{II}$$

Die Dichte dP eines Punktes P des dreidimensionalen Raumes ist natürlich

$$dP = dx\, dy\, dz. \tag{1}$$

Wird eine Gerade G durch ihren Durchstoßpunkt x, y mit der (x, y)-Ebene und ihre Richtung ξ, η, ζ $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1)$ festgehalten, so ist das Geradenmaß dG angegeben durch die Form

$$dG = dx\, dy\, d\xi\, d\eta. \tag{2}$$

Das Ebenenmaß ist festgelegt durch die Form

$$dE = d\omega \cdot dp, \tag{3}$$

wo $d\omega$ das Flächenelement der Einheitskugel ist, das zur gegebenen Ebenenstellung gehört, und p der Abstand der Ebene E vom Koordinatenursprung ist. Bei Verwendung von Polarkoordinaten hat man dafür auch

$$dE = |\sin\vartheta|\, d\vartheta\, d\varphi\, dp^4). \tag{3'}$$

Wir wollen für das Geradenmaß (2) noch weitere Darstellungen geben.

Auf die Gerade G werde vom Koordinatenursprung das Lot, dessen Länge p sei, gefällt und in seinem Fußpunkt Q die Normalebene E errichtet. Wir bestimmen ferner die Verbindungsgerade des Schnittpunktes P der z-Achse mit Q. Sie bilde mit G den Winkel α. Durch α und E ist dann die Gerade eindeutig bestimmt. Der Normalenvektor n von E habe die Komponenten

$$\xi_n = \sin\vartheta\cos\varphi; \quad \eta_n = \sin\vartheta\sin\varphi; \quad \zeta_n = \cos\vartheta.$$

Es treten dann an Stelle der in (2) verwendeten Variablen von G die Variablen $p, \vartheta, \varphi, \alpha$. Wir geben die Transformationsformeln an, die sie ineinander überführen. Der Einheitsvektor $\mathfrak{e}_1$ der Geraden $\overrightarrow{QP}$, die so orientiert sei, wie es der Pfeil angibt, hat die Komponenten

$$\mathfrak{e}_1 = (\cos\vartheta\cos\varphi; \quad \cos\vartheta\sin\varphi; \quad -\sin\vartheta). \tag{a}$$

---

4) Wegen dieser Maße siehe R. Deltheil a. a. O., oder Herglotz Vorlesungen, wo die Maße auch für beliebig dimensionale lineare Mannigfaltigkeiten des R_n gegeben sind. In einer neuen Arbeit von W. Blaschke „Integralgeometrie I", „Actualités scientifiques ..." Hermann & Cie, Paris, 1935, werden die Maße von beliebig dimensionalen Mannigfaltigkeiten auch für die elliptische n-dimensionale Geometrie gegeben, sowie auch für die sphärische Geometrie.

Der Vektor $\mathfrak{e}_2$, der dadurch festgelegt ist, daß $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{n}$ ein orthogonales rechtsorientiertes genormtes Dreibein bilden soll, hat die Komponenten

(b) $$\mathfrak{e}_2 = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0).$$

Bezeichnet man die Spurpunkte der Geraden PQ und G mit der (x, y)-Ebene bzw. mit M und D, so hat man für die Längen r, s, d der Strecken $\overline{QM}$, $\overline{MD}$ und $\overline{QD}$

$$r = p\operatorname{cotg}\vartheta, \quad s = p\operatorname{cotg}\vartheta\operatorname{tg}\alpha, \quad d = p\,\frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{\cos\alpha}.$$

Ist $\mathfrak{v}$ der Ortsvektor von D und wird der Einheitsvektor der Geraden G, der ja die Komponenten ξ, η, ζ hat, mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet, so ergeben sich aus

$$\mathfrak{v} = p\,\mathfrak{n} + r\,\mathfrak{e}_1 + s\,\mathfrak{e}_2, \quad -d\,\mathfrak{g} = \mathfrak{v} - p\,\mathfrak{n}$$

die gesuchten Transformationsformeln in der Gestalt:

$$x = \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\,p - \operatorname{cotg}\vartheta\sin\varphi\operatorname{tg}\alpha\,p, \quad \xi = -\cos\vartheta\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha,$$

$$y = \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\,p + \operatorname{cotg}\vartheta\cos\varphi\operatorname{tg}\alpha\,p, \quad \eta = -\cos\vartheta\sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha.$$

Wegen (I) und (II) wird die gesuchte Dichte dargestellt durch

$$\frac{\partial(x, y, \xi, \eta)}{\partial(p, \vartheta, \varphi, \alpha)}\,dp\,d\vartheta\,d\varphi\,d\alpha.$$

Für die Funktionaldeterminante hat man

$$\frac{\partial(x, y, \xi, \eta)}{\partial(p, \vartheta, \varphi, \alpha)} = p\sin\vartheta.$$

Die Dichte der Geraden G wird dann unter Beachtung von (3′) sein:

(4) $$dG = p\,|\sin\vartheta|\,dp\,d\vartheta\,d\varphi\,d\alpha = p\,d\alpha\,dE,$$

d. h. die Dichte der Geraden G ist gleich der Dichte der Ebene E mal der Dichte der Geraden G in dieser Ebene *um den Punkt* Q multipliziert mit dem Abstand p des Koordinatenursprungs von E.

Eine weitere Darstellung der Geradendichte erhält man, wenn die Gerade G fixiert wird durch ihre Normalebene E_n durch den Ursprung und den Spurpunkt von G in E_n. Stellt man die Komponenten ξ, η, ζ des Einheitsvektors $\mathfrak{g}$ von G durch

$$\mathfrak{g} = (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta),$$

dar, so kann man (2) auch in der folgenden Form

(2′) $$dG = |\sin\vartheta|\,|\cos\varphi|\,d\vartheta\,d\varphi\,dx\,dy$$

angeben, wo x, y, wie bei (2), die Koordinaten des Spurpunktes von G auf der (x, y)-Ebene sind. Wir wählen nun in E_n zwei Vektoren $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ mit den Komponenten

(c) $$\mathfrak{e}_1 = (e_{11}, e_{12}, e_{13}), \quad \mathfrak{e}_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23})$$

derartig, daß $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{g}$ ein rechtsorientiertes normiertes Dreibein bilden, $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ aber einen beliebigen Winkel α einschließen. Die Vektoren $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ seien im Ursprung des Koordinatensystems angesetzt und es habe der Spurpunkt P von G mit E_n in bezug auf dieselben die Komponenten t und t^*. Die Transformationsformeln, durch die man von der Darstellung (2′) der Geradendichte zur neuen Darstellung übergehen muß, sind dann

$$\vartheta = \vartheta,$$

$$\varphi = \varphi,$$

$$x = \left(e_{11} - e_{13}\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{\cos\vartheta}\right)t^* + \left(e_{21} - e_{23}\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{\cos\vartheta}\right)t,$$

$$y = \left(e_{12} - e_{13}\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\cos\vartheta}\right)t^* + \left(e_{22} - e_{23}\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\cos\vartheta}\right)t.$$

Für die Funktionaldeterminante kommt

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, t^*)} = \frac{1}{\cos\vartheta}(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{g}) = \frac{\sin\alpha}{\cos\vartheta}.$$

Die Form der Geradendichte ist somit in diesen Koordinaten

$$dG = |\sin\vartheta\sin\alpha|\, d\vartheta\, d\varphi\, dt\, dt^*. \tag{5′}$$

Im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$dG = |\sin\vartheta|\, d\vartheta\, d\varphi\, dt\, dt^*. \tag{5″}$$

Nun ist $|\sin\vartheta|\, d\vartheta\, d\varphi$ das Maß $d\omega$ der Stellung E_n, und der zweite Faktor ist in beiden Fällen das Punktmaß dP_0 von P *in der Ebene* E_n. Man kann also auch so schreiben:

$$dG = d\omega\, dP_0. \tag{5}$$

§ 2.

Crofton-Formeln.

Croftonsche Formel für zwei Punkte.

Wir gehen von dem Produkt der Dichten zweier Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ aus. Die Punkte P_1 und P_2 können auch dadurch erhalten werden, daß man die Abstände angibt, die auf der Verbindungsgeraden G von P_1 und P_2 liegen und von dem Spurpunkt von G mit der (x, y)-Ebene an gerechnet werden. Hat dieser Spurpunkt die Koordinaten x, y, 0 und sind ξ, η, ζ die Komponenten des Einheitsvektors $\mathfrak{g}$ von G, so ist der Zusammenhang zwischen den alten und neuen Koordinaten hergestellt durch

$$x_1 = x + t_1\xi, \qquad x_2 = x + t_2\xi,$$
$$y_1 = y + t_1\eta, \qquad y_2 = y + t_2\eta,$$
$$z_1 = \quad t_1\zeta, \qquad z_2 = \quad t_2\zeta.$$

Für die Funktionaldeterminante findet man

$$\frac{\partial(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)}{\partial(x, y, \xi, \eta, t_1, t_2)} = (t_2 - t_1)^2.$$

Die Croftonsche Formel wird also, wenn wir die Dichte $dx_1\, dy_1\, dz_1$ des Punktes P_1 mit dP_1 bezeichnen und entsprechend dP_2 die Dichte von P_2 bedeutet[5]),

$$dP_1\, dP_2 = (t_2 - t_1)^2\, dt_1\, dt_2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta. \tag{6'}$$

Nach § 1 (2) ist $dx\, dy\, d\xi\, d\eta$ gleich der Dichte der Verbindungsgeraden G von P_1 und P_2 und dt_1 bzw. dt_2 sind die Dichten der Punkte P_1 bzw. P_2 *in der Geraden* G, die wir kurz mit dP_{100} und dP_{200} bezeichnen und daher (6') so darstellen können:

$$dP_1\, dP_2 = (t_2 - t_1)^2\, dP_{100}\, dP_{200}\, dG. \tag{6}$$

Die Relation (6) besagt: Das Produkt der Dichten zweier Punkte ist gleich dem Quadrat ihres Abstandes, multipliziert mit der Dichte ihrer Verbindungsgeraden und der Dichte der beiden Punkte *in dieser Geraden.*

Croftonsche Formel für zwei Ebenen.

Wir gehen von dem Produkt der Dichten zweier Ebenen E_1 und E_2 aus. Durch Angabe der Schnittgeraden G von E_1 und E_2 und der Winkel α_1 und α_2 dieser Ebenen mit einer festen Stellung durch G sind E_1 und E_2 eindeutig bestimmt. Hat der Normalenvektor $\mathfrak{n}_1$ von E_1 die Komponenten ξ_1, η_1, ζ_1 und ist p_1 sein Abstand vom Ursprung und sind ξ_2, η_2, ζ_2, p_2 die entsprechenden Größen für E_2, so handelt es sich wieder darum, die Substitutionsformeln dieser Größen auf die oben angegebenen Bestimmungsstücke anzugeben.

Die Gerade G werde wie bei der Darstellung (5) durch die Normalebene E_n durch den Ursprung und den Spurpunkt P von G in E_n festgelegt. Die Komponenten des Einheitsvektors $\mathfrak{g}$ der Geraden G seien

$$\mathfrak{g} = (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta).$$

Für die oben vorkommenden Vektoren (c) treffen wir eine spezielle Wahl. Es sei $\mathfrak{e}_1$ der Einheitsvektor der Schnittgeraden von E_n mit der (x, y)-Ebene, dann ist nach dem Obigen auch $\mathfrak{e}_2$ festgelegt, wenn wir $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nehmen[6]). Die Komponenten der Vektoren sind dann

$$\text{(d)} \quad \mathfrak{e}_1 = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0),\ \mathfrak{e}_2 = (-\cos\vartheta\cos\varphi,\ -\sin\vartheta\sin\varphi,\ \sin\vartheta).$$

---

[5]) Diese Formel wurde schon behandelt, wie einleitend erwähnt ist, siehe G. Herglotz Vorlesungen.

[6]) Es sollen ja $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{g}$ ein orthogonales rechtsorientiertes und normiertes Dreibein bilden.

Sind t und t^* die Komponenten des Spurpunktes P von G bezüglich der Vektoren $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$, dann hat man für die Koordinaten x, y, z von P

$$x = -t\sin\varphi - t^*\cos\vartheta\cos\varphi, \quad y = t\cos\varphi - t^*\cos\vartheta\sin\varphi, \quad z = t^*\sin\vartheta.$$

Sei α_1 der Winkel, den E_1 mit der durch $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{e}_1$ bestimmten Stellung bildet, dann ist dies gleichzeitig der Winkel, den der Einheitsvektor $\mathfrak{a}_1$ der Schnittgeraden von E_1 und E_n mit der $\mathfrak{e}_1$-Achse bildet. Wegen

$$\mathfrak{a}_1 = \cos\alpha_1\,\mathfrak{e}_1 + \sin\alpha_1\,\mathfrak{e}_2$$

hat $\mathfrak{a}_1$ die Komponenten

(e) $\mathfrak{a}_1$: $a_{11} = -\sin\varphi\cos\alpha_1 - \cos\vartheta\cos\varphi\sin\alpha_1$,

$a_{12} = \cos\varphi\cos\alpha_1 - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\alpha_1$,

$a_{13} = \sin\vartheta\sin\alpha_1$.

Der Normalenvektor $\mathfrak{n}_1$ von E_1 ist dann das äußere Produkt von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}$ und der Abstand p_1 dieser Ebene vom Ursprung das innere Produkt von $\mathfrak{n}_1$ mit dem Vektor, der von dem Ursprung nach $P(x, y, z)$ führt. Daraus ergeben sich die Transformationsformeln für die erste Ebene E_1:

(f) $\xi_1 = \cos\vartheta\cos\varphi\cos\alpha_1 - \sin\varphi\sin\alpha_1, \quad \zeta_1 = -\sin\vartheta\cos\alpha_1,$

$\eta_1 = \cos\vartheta\sin\varphi\cos\alpha_1 + \cos\varphi\sin\alpha_1, \quad p_1 = -t^*\cos\alpha_1 + t\sin\alpha_1.$

Für die zweite Ebene E_2 haben die Transformationsformeln dieselbe Gestalt:

(f′) $\xi_2 = \cos\vartheta\cos\varphi\cos\alpha_2 - \sin\varphi\sin\alpha_2, \quad \zeta_2 = -\sin\vartheta\cos\alpha_2,$

$\eta_2 = \cos\vartheta\sin\varphi\cos\alpha_2 + \cos\varphi\sin\alpha_2, \quad p_2 = -t^*\cos\alpha_2 + t\sin\alpha_2.$

Der Winkel α_2 wird dabei von der Ebene E_2 und der Stellung, die durch $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{g}$ bestimmt ist, eingeschlossen. Für die Funktionaldeterminante hat man

(g) $$\frac{\partial(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, p_1, p_2)}{\partial(\vartheta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, t, t^*)} = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)\sin^3\vartheta\cos\alpha_1\cos\alpha_2.$$

Nach (3) ist das Produkt der Ebenendichten

$$dE_1\,dE_2 = d\omega_1\,d\omega_2\,dp_1\,dp_2 = \frac{d\xi_1\,d\eta_1}{|\zeta_1|}\,\frac{d\xi_2\,d\eta_2}{|\zeta_2|}\,dp_1\,dp_2.$$

Wegen (f), (f′) und (g) hat man dann

(7′) $$dE_1\,dE_2 = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)\,|\sin\vartheta|\,d\vartheta\,d\varphi\,d\alpha_2\,d\alpha_1\,dt\,dt^*.$$

Wegen (5) kommt daraus

(7) $$dE_1\,dE_2 = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)\,d\alpha_2\,d\alpha_1\,dG,$$

wo dG die Dichte der Schnittgeraden G von E_1 und E_2 bedeutet. Die Relation (7) besagt: Das Produkt der Dichten zweier Ebenen ist gleich dem Quadrat des Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels, multipliziert mit der Dichte ihrer Schnittgeraden und den Dichten dieser Ebenen *um* dieselbe.

Wir wollen hier noch einen Satz ableiten, der später gebraucht wird. Die Stellung einer Ebene $\overline{E}_1$, die normal zu E_n und E_1 ist, hat einen Normalenvektor, der durch (e) gegeben ist. Ein entsprechender Vektor $\mathfrak{a}_2$[7]) gibt die Stellung einer Ebene $\overline{E}_2$ an, die normal zu E_n und E_2 ist. Aus

$$\left|\frac{\partial(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})}{\partial(\vartheta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2)}\right| = \left|\frac{\partial(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}{\partial(\vartheta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2)}\right| = |\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\cos\alpha_1\cos\alpha_2|$$

folgt dann, wenn $\overline{E}_1$ und $\overline{E}_2$ dieselben Abstände p_1 und p_2 vom Ursprung haben wie E_1 und E_2, der

Satz[8]): Das Produkt der Dichten der beiden Ebenen $\overline{E}_1$ und $\overline{E}_2$ ist gleich dem Produkt der Dichten von E_1 und E_2.

Croftonsche Formel für Punkt und Ebene.

Der Punkt P habe die Koordinaten (x, y, z), die Ebene E sei durch ihren Normalenvektor mit den Komponenten $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$, $\cos\vartheta$ dargestellt. Wegen (1) und (3′) wird dann

$$dP\,dE = |\sin\vartheta|\,d\vartheta\,d\varphi\,dx\,dy\,dz. \tag{8″}$$

Durch Angabe der Lotgeraden G von P auf E, ferner durch Angabe der Abstände von P und E von einem festen Punkt auf G sind P und E eindeutig festgelegt. Wir führen die Koordinaten dieser Größen als neue Variable ein. Der fest zu wählende Punkt auf P sei der Durchstoßpunkt D von G mit der (x, y)-Ebene, er habe die Koordinaten $x_0, y_0, 0$. Die Abstände dieses Punktes von P und E mögen mit t^* und t bezeichnet werden. Man findet dann unmittelbar die Substitutionsformeln

$$x = x_0 + t\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad z = t\cos\vartheta,$$
$$y = y_0 + t\sin\vartheta\sin\varphi, \quad p = x_0\sin\vartheta\cos\varphi + y_0\sin\vartheta\sin\varphi + t^*.$$

Für die Funktionaldeterminante kommt

$$\frac{\partial(x, y, z, p)}{\partial(x_0, y_0, t, t^*)} = \cos\vartheta.$$

Wegen (8″) kommt dann

$$dP\,dE = |\sin\vartheta\cos\vartheta|\,d\vartheta\,d\varphi\,dx_0\,dy_0\,dt\,dt^*, \tag{8′}$$

was wegen (2′) auch so dargestellt werden kann:

$$dP\,dE = dG\,dt\,dt^*. \tag{8}$$

---

[7]) Die Komponenten von $\mathfrak{a}_2$ sind dieselben wie die durch (e) gegebenen von $\mathfrak{a}_1$, nur tritt α_2 an Stelle von α_1, sie sind also von der Gestalt:

$$a_{21} = -\sin\varphi\cos\alpha_2 - \cos\vartheta\cos\varphi\sin\alpha_2; \qquad a_{22} = \cos\varphi\cos\alpha_2 - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\alpha_2;$$
$$a_{23} = \sin\vartheta\sin\alpha_2.$$

[8]) Man könnte dies natürlich auch für das Produkt von Stellungen formulieren die beiden Sätze wären völlig äquivalent.

Da dt die Dichte dP_{00} von P in G ist und dt^* diejenige dP'_{00} des Fußpunktes P' von G auf E in dieser Geraden, kann man (8) so zusammenfassen:

$$dP\,dE = dG\,dP_{00}\,dP'_{00}. \tag{8*}$$

(8*) besagt, daß das Produkt der Dichten eines Punktes und einer Ebene gleich der Dichte der von ihnen bestimmten Lotgeraden ist, multipliziert mit der Dichte des gegebenen Punktes und der Dichte des Fußpunktes *in dieser Geraden.*

Croftonsche Formel für Gerade und Ebene.

Bezeichnen dG und dE die Dichten der Geraden G und der Ebene E, so kommt für ihr Produkt wegen (2) und (3)

$$dE\,dG = \frac{d\xi\,d\eta}{|\xi|}\,dp\,dx_0\,dy_0\,d\xi_0\,d\eta_0, \tag{9''}$$

wobei ξ, η, ζ die Komponenten des Normalenvektors $\mathfrak{n}$ von E bedeuten, p der Abstand dieser Ebene vom Ursprung ist, ξ_0, η_0, ζ_0 die Komponenten des Einheitsvektors $\mathfrak{g}$ von G sind und $x_0, y_0, 0$ die Koordinaten des Spurpunktes von G in der (x, y)-Ebene sind. Gerade und Ebene können auch durch die Koordinaten $\xi, \eta, \xi_0, \eta_0, x, y, z$ festgelegt werden, wobei x, y, z die Koordinaten des Schnittpunktes P von G und E bedeuten. Die Transformationsformeln sind dann

$$x_0 = x - \frac{\xi_0}{\zeta_0}\,z, \quad p = x\xi + y\eta + z\zeta,$$

$$y_0 = y_0 - \frac{\eta_0}{\zeta_0}\,z.$$

Für die Funktionaldeterminante kommt

$$\frac{\partial(p, x_0, y_0)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\xi\,\xi_0 + \eta\,\eta_0 + \zeta\,\zeta_0}{\zeta_0} = \frac{\cos\psi}{\zeta_0},$$

wobei $\psi \mp \frac{\pi}{2}$ der Winkel zwischen Gerade G und Ebene E ist. Für (9'') kommt daher

$$dG\,dE = |\cos\psi|\,\frac{d\xi\,d\eta}{|\zeta|}\,\frac{d\xi_0\,d\eta_0}{|\zeta_0|}\,dx\,dy\,dz, \tag{9'}$$

was man auch so darstellen kann:

$$dG\,dE = |\cos\psi|\,d\omega\,d\omega_0\,dP. \tag{9}$$

In (9) bedeutet $d\omega$ die Dichte der Ebene *um den Punkt* P und $d\omega_0$ die Dichte der Geraden G *um diesen Punkt.* Das Produkt der Dichten von Gerade und Ebene ist gleich dem Kosinus des Winkels zwischen Gerade und Ebenennormale multipliziert mit der Dichte ihres Schnittpunktes und den Dichten von Gerade und Ebene *um diesen Punkt.*

Croftonsche Formel für Punkt und Gerade.

Nach (1) und (2) gilt für das Produkt der Dichten von P und G

$$dP\,dG = dx\,dy\,dz\,dx_0\,dy_0\,d\xi\,d\eta, \tag{10''}$$

wenn x, y, z die Koordinaten von P sind und G durch ihren Spurpunkt x_0, y_0, 0 — mit der (x, y)-Ebene — und den Einheitsvektor mit den Komponenten ξ, η, ζ festgehalten wird. Zur Herleitung der Croftonschen Formel wollen wir die Elemente P und G auf eine andere Weise festlegen. Zu diesem Zweck werden wir in der durch P und G aufgespannten Ebene E — die ja durch ihren Normalenvektor $\mathfrak{n}$ orientiert ist — ein zweckmäßig gewähltes Koordinatensystem einführen und G und P in demselben bestimmen. Als Koordinatenvektoren in E wählen wir die beiden Vektoren $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$, die durch (d) bestimmt sind, ändern aber ihre Reihenfolge, so daß jetzt $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{n}$ ein orthogonales rechtsorientiertes genormtes Dreibein bilden. was darauf hinauskommt, zu setzen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1\,(= -\mathfrak{e}_2) &= (\cos\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta), \\ \mathfrak{a}_2\,(= \mathfrak{e}_1) &= (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0). \end{aligned} \tag{h}$$

Setzen wir $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ in den Fußpunkt Q des Lotes vom Ursprung auf E an, so haben wir in E das gewünschte Koordinatensystem. Wir bestimmen in demselben zunächst G, dazu fällen wir von Q das Lot auf G, sein Fußpunkt sei R, der Winkel des Lotes mit dem Vektor $\mathfrak{a}_1$ sei α, dann ist also G durch die Polarkoordinaten $\varrho = \overline{QR}$ und α festgelegt. Der Einheitsvektor $\mathfrak{l}$ des Lotes ist dabei

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{a}_1\cos\alpha + \mathfrak{a}_2\sin\alpha, \tag{i}$$

so daß seine Komponenten wegen (h) bekannt sind. Entsprechend ist der Einheitsvektor $\mathfrak{g}$ von G

$$\mathfrak{g} = -\mathfrak{a}_1\sin\alpha + \mathfrak{a}_2\cos\alpha. \tag{j}$$

Wir legen jetzt P in dem Koordinatensystem in E fest. Trifft das Lot von dem gegebenen Punkt P die Gerade G in P' und ist $\overline{PP'} = t^*$ und $\overline{P'R} = t$, so ist P im Koordinatensystem (h) durch Angabe von t und t^* bestimmt. Wir haben jetzt an Stelle der Veränderlichen x, y, z, x_0, y_0, ξ, η, die neuen Variablen p, ϑ, φ, ϱ, α, t, t^* zur eindeutigen Bestimmung von P und G. Ist $\mathfrak{x}$ der Vektor vom Ursprung nach P, so gilt

$$\mathfrak{x} = p\,\mathfrak{n} + (\varrho + t^*)\,\mathfrak{l} + t\,\mathfrak{g}. \tag{k}$$

Aus (j) und (k) folgt dann die erste Gruppe der Substitutionsformeln:

$$
\begin{aligned}
x &= p \sin\vartheta \cos\varphi + (\varrho + t^*)(\cos\vartheta \cos\varphi \cos\alpha - \sin\varphi \sin\alpha) \\
&\qquad - t(\cos\vartheta \cos\varphi \sin\alpha + \sin\varphi \cos\alpha), \\
y &= p \sin\vartheta \sin\varphi + (\varrho + t^*)(\cos\vartheta \sin\varphi \cos\alpha + \cos\varphi \sin\alpha) \\
&\qquad - t(\cos\vartheta \sin\varphi \sin\alpha - \cos\varphi \cos\alpha), \\
z &= p \cos\vartheta - (\varrho + t^*) \sin\vartheta \cos\alpha + t \sin\alpha \sin\vartheta, \\
\xi &= -\cos\vartheta \cos\varphi \sin\alpha - \sin\varphi \cos\alpha, \\
\eta &= -\cos\vartheta \sin\varphi \sin\alpha + \cos\varphi \cos\alpha.
\end{aligned} \tag{l}
$$

Ist $\mathfrak{y}$ der Radiusvektor eines beliebigen Punktes von G, so gilt für denselben

$$\mathfrak{y} = p\,\mathfrak{n} + \varrho\,\mathfrak{l} + \tau\,\mathfrak{g},$$

wo τ ein beliebiger Parameter ist. Für den Spurpunkt auf der (x, y)-Ebene kommt dann

$$
\begin{aligned}
x_0 &= p \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} + p \sin\varphi \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\vartheta - \varrho \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}, \\
y_0 &= p \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta} - p \cos\varphi \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\vartheta + \varrho \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}.
\end{aligned} \tag{m}
$$

In (l) und (m) haben wir die gesuchten Substitutionsformeln. Für den Absolutwert der Funktionaldeterminante hat man

$$\left| \frac{\partial(x, y, z, \xi, \eta, x_0, y_0)}{\partial(p, \vartheta, \varphi, \alpha, \varrho, t, t^*)} \right| = t^* \,|\sin\vartheta|$$

wo, wie oben erwähnt, t^* der Abstand von Punkt und Gerade ist. Aus (10″) folgt dann

$$dP\,dG = t^* \,|\sin\vartheta|\, dp\, d\vartheta\, d\varphi\, d\alpha\, d\varrho\, dt\, dt^*, \tag{10′}$$

oder

$$dP\,dG = t^*\, dE\, dG_0\, dP_0. \tag{10}$$

(10) besagt, daß das Produkt der Dichten von Punkt und Gerade gleich dem Abstand des Punktes von der Geraden ist, multipliziert mit der Dichte dG_0 der Geraden G *in* E und der Dichte dP_0 des Punktes P *in* E.

Die Croftonsche Formel für zwei Gerade G_1 und G_2.

Die beiden Geraden mögen wie bei der Herleitung der Darstellung (5) mittels ihrer Normalebenen durch den Ursprung und den Spurpunkten in diesen Ebenen bestimmt sein. Entsprechend dem dort Gesagten muß in jeder der beiden Normalebenen ein Koordinatensystem (c) gewählt werden. Wir wählen die Koordinatenvektoren $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ senkrecht, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Als Vektor $\mathfrak{e}_2$ in der Normalebene von G_1 werde der Vektor gewählt, der in der Schnittgeraden der beiden Normalebenen liegt. Der Spurpunkt G_1' von G_1 habe in bezug auf $\mathfrak{e}_2$ die Komponente t_1, in bezug auf $\mathfrak{e}_1$ die Komponente t_1^*. In der Normalebene von G_2 sei der zweite Koor-

dinatenvektor mit $\mathfrak{e}_2$ identisch, der erste Koordinatenvektor — orthogonal zu $\mathfrak{e}_2$ — werde mit $\bar{\mathfrak{e}}_1$ bezeichnet und es seien t_2 und t_2^* die sich auf $\mathfrak{e}_2$ und $\bar{\mathfrak{e}}_1$ beziehenden Komponenten des Durchstoßpunktes G_2' von G_2 mit seiner Normalebene. Die Komponenten der Einheitsvektoren von G_1 und G_2 seien so dargestellt, wie dies bei (5) der Fall ist, und es beziehe sich der Index 1 auf Größen, die G_1 bestimmen, und entsprechend bedeute der Index 2 Variable in bezug auf G_2. Dann kommt

$$(11'') \qquad dG_1\, dG_2 = |\sin\vartheta_1|\, d\vartheta_1\, d\varphi_1\, dt_1\, dt_1^*\, |\sin\vartheta_2|\, d\vartheta_2\, d\varphi_2\, dt_2\, dt_2^*.$$

Der Vektor $\mathfrak{e}_2$ ist nach obigem gleichzeitig der Einheitsvektor im Gemeinlot N von G_1 und G_2, $\mathfrak{e}_1$ und $\bar{\mathfrak{e}}_1$ spannen die zu N normale Stellung auf. Der Winkel der beiden Normalebenen ist gleichzeitig der Winkel, den die beiden durch N und G_1 bzw. G_2 bestimmten Ebenen E_1 und E_2 bestimmen. Die Abstände der E_1 und E_2 vom Ursprung sind t_1^* bzw. t_2^*. Da $|\sin\vartheta_1|\, d\vartheta_1\, d\varphi_1\, dt_1^*$ die Dichte der zur Normalebene von G_1 parallelen Ebene $\bar{E}_1$ im Abstand t_1 darstellt und entsprechend $|\sin\vartheta_2|\, d\vartheta_2\, d\varphi_2\, dt_2^*$ die Dichte einer Ebene $\bar{E}_2$ im Abstand t_2^* vom Ursprung bedeutet, die parallel zur Normalebene von G_2 ist, so können wir den Satz von S. 393 anwenden, wonach

$$d\bar{E}_1\, d\bar{E}_2 = dE_1\, dE_2$$

ist. Auf $dE_1\, dE_2$ wenden wir nun die Croftonsche Formel (7) an und erhalten so

$$(11') \qquad dG_1\, dG_2 = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)\, d\alpha_2\, d\alpha_1\, dN\, dt_1\, dt_2,$$

oder

$$(11) \qquad dG_1\, dG_2 = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)\, d\alpha_2\, d\alpha_1\, dN\, dP_{100}\, dP_{200}.$$

Das Produkt der Dichten zweier Geraden G_1 und G_2 mit dem Gemeinlot N ist also gleich dem Produkt aus $\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)$ und den folgenden Faktoren: Dichte der Ebene $E_1 (= G_1 N)$ *um die Gerade* N, Dichte der Ebene $E_2 (= G_2 N)$ *um die Gerade* N, Dichte dP_{100} des Schnittpunktes P_1 von G_1 und N *in* N und Dichte dP_{200} des Schnittpunktes P_2 von G_2 und N *in* N.

Die Croftonsche Formel für drei Ebenen.

Die drei Ebenen E, E', E'' seien durch ihre Normalvektoren und die Abstände p, p' und p'' vom Ursprung festgelegt. Es habe der Schnittpunkt P von E, E' und E'' die Koordinaten x, y, z. Man kann dann die drei Ebenen auch durch P und ihre Normalvektoren mit den Komponenten

$$\begin{array}{lll} \sin\vartheta\cos\varphi, & \sin\vartheta\sin\varphi, & \cos\vartheta, \\ \sin\vartheta'\cos\varphi', & \sin\vartheta'\sin\varphi', & \cos\vartheta', \\ \sin\vartheta''\cos\varphi'', & \sin\vartheta''\sin\varphi'', & \cos\vartheta'', \end{array}$$

bestimmen. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} p &= x\sin\vartheta\cos\varphi + y\sin\vartheta\sin\varphi + z\cos\vartheta, \\ p' &= x\sin\vartheta'\cos\varphi' + y\sin\vartheta'\sin\varphi' + z\cos\vartheta', \\ p'' &= x\sin\vartheta''\cos\varphi'' + y\sin\vartheta''\sin\varphi'' + z\cos\vartheta''. \end{aligned}$$

und daher

$$\left|\frac{\partial(p, p', p'')}{\partial(x, y, z)}\right| = V,$$

wo V das Volumen des von den drei Einheitsvektoren aufgespannten Parallelepipedons bedeutet, oder als Eckensinus des von ihnen bestimmten sphärischen Dreiecks betrachtet werden kann. Es kommt sonach

$$dE\,dE'\,dE'' = V\,|\sin\vartheta|\,d\vartheta\,d\varphi\cdot|\sin\vartheta'|\,d\vartheta'\,d\varphi' \cdot|\sin\vartheta''|\,d\vartheta''\,d\varphi''\,dx\,dy\,dz, \tag{12'}$$

oder

$$dE\,dE'\,dE'' = V\,d\omega\,d\omega'\,d\omega''\,dP, \tag{12}$$

d. h. das Produkt der Dichten dreier Ebenen ist gleich ihrem Eckensinus multipliziert mit den Dichten von E, E', E'' *um ihren Schnittpunkt* P und der Dichte dieses Punktes.

Die Croftonsche Formel für drei Punkte[9]).

Die Punkte P_1, P_2, P_3 seien durch die Koordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 und x_3, y_3, z_3 gegeben. Sei $\mathfrak{n}$ der Normalenvektor der von ihnen bestimmten Ebene E mit den Komponenten

$$\mathfrak{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi,\quad \sin\vartheta\sin\varphi,\quad \cos\vartheta)$$

und p die Länge des Lotes vom Ursprung auf E. In dem Fußpunkt Q desselben bringen wir die durch (h) bestimmten Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ — die ja in E liegen — an. Seien u_1, v_1; u_2, v_2 und u_3, v_3 die Koordinaten von bzw. P_1, P_2 und P_3 bezüglich $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Die Punkte P_1, P_2 und P_3 können dann durch E, $P_{10}(u_1, v_1)$; $P_{20}(u_2, v_2)$; $P_{30}(u_3, v_3)$ bestimmt werden. Die entsprechenden Substitutionsformeln für den ersten Punkt P_1 sind dann unter Beachtung von (h)

$$\begin{aligned} x_1 &= p\sin\vartheta\cos\varphi + u_1\cos\vartheta\cos\varphi - v_1\sin\varphi, \\ y_1 &= p\sin\vartheta\sin\varphi + u_1\cos\vartheta\sin\varphi + v_1\cos\varphi, \\ z_1 &= p\cos\vartheta - u_1\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Die Substitutionsformeln für x_2, y_2, z_2 und x_3, y_3, z_3 sind von derselben Gestalt, nur ist u_1, v_1 durch u_2, v_2 bzw. u_3, v_3 zu ersetzen. Für die Funktionaldeterminante findet man

$$\left|\frac{\partial(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)}{\partial(p, \vartheta, \varphi, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)}\right| = |\sin\vartheta|\,\Delta,$$

[9]) Eine Verallgemeinerung dieser Formel für eine beliebige Anzahl von Punkten in einem Euklidischen R_n wurde gleichzeitig in einer Arbeit von W. Blaschke, Integralgeometrie 2, Berichte der Rumänischen Mathematischen Gesellschaft, gegeben.

wo also Δ der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks P_1, P_2, P_3 ist. Wegen (3′) kommt sonach

$$(13') \qquad dP_1\, dP_2\, dP_3 = \Delta\, |\sin\vartheta|\, d\vartheta\, d\varphi\, du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2\, du_3\, dv_3$$

oder

$$(13) \qquad dP_1\, dP_2\, dP_3 = \Delta\, dP_{10}\, dP_{20}\, dP_{30},$$

d. h. das Produkt der Dichten dreier Punkte ist gleich dem doppelten Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Dreiecks multipliziert mit der Dichte der von ihnen bestimmten Ebene und der Dichte der Punkte P_1, P_2 und P_3 *in dieser Ebene.*

§ 3.

Integralformeln.

Um von den Dichten von linearen Elementen zum Maß, d. h. zur Integraldarstellung übergehen zu können, muß man nach den Bemerkungen von § 1 ein gewisses Gebiet angeben, in dem diese Gebilde variieren[10]). Wir geben eine konvexe Fläche F vor, dann ist durch dieselbe offensichtlich nicht nur das Punktgebiet eingeschränkt, wenn man alle innerhalb liegenden Punkte betrachtet, sondern es ist auch entsprechend für die dreidimensionale Mannigfaltigkeit aller Ebenen, bzw. die vierdimensionale Mannigfaltigkeit aller Geraden, ein drei- bzw. vierdimensionales Gebiet ausgezeichnet, wenn nur die Ebenen und Geraden betrachtet werden, die F treffen. Wegen Späteres geben wir das Geradenmaß bzw. Ebenenmaß von F an[11]). Es gilt

$$(14) \qquad \int dG = \frac{\pi}{2}\, O$$

wo O die Oberfläche des konvexen Körpers bedeutet und für dG die Darstellungen von § 1 gelten. Das Ebenenmaß M läßt sich nicht durch die Oberfläche oder das Volumen von F ausdrücken, für dasselbe gilt die Formel von H. Minkowski

$$(15) \qquad M = \int dE = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) d\sigma = \int H\, d\sigma,$$

wo $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ die mittlere Krümmung in einem Flächenpunkt ist und $d\sigma$ das entsprechende Oberflächenelement bedeutet.

Bei Vorgabe von F und einer linearen Mannigfaltigkeit, also im R_3 Geradenmannigfaltigkeit bzw. Ebenenmannigfaltigkeit, sind die Schnittmannigfaltigkeiten mit F, also hier die Mannigfaltigkeit der Sehnen und Schnittflächen, ferner der Winkel, unter dem man F sehen kann, die ein-

---

[10]) Siehe S. 1.

[11]) Wegen (14) und (15) siehe R. Deltheil, a. a. O., S. 90 und 95.

fachsten Größen, die durch F auf diesen Mannigfaltigkeiten induziert werden. Dadurch wird man auf die Betrachtung von Integralen folgender Gestalt geführt[12]):

(a) $$\int \sigma^n \, dG,$$

(b) $$\int |\sin \delta|^n \, dG,$$

(c) $$\int \Omega^n \, dE.$$

In (a) bedeutet σ die von der Geraden G getragene Sehne, die von F ausgeschnitten wird, und das Integral ist zu erstrecken über alle F schneidende Gerade. In (b) bedeutet δ den Winkel, unter dem man F von einer nichtschneidenden Geraden G sieht oder anders gesagt, der Winkel der Berührungsebenen, die von G an F gelegt werden können, und die Integration ist zu erstrecken über sämtliche F nichtschneidende Geraden[13]). In (c) bedeutet Ω den Flächeninhalt, der von einer Ebene aus F ausgeschnitten wird, und die Integration ist über alle Treffebenen von F zu erstrecken.

Das Integral $\int \sigma^n \, dG$.

Wir nehmen zwei Punkte P_1 und P_2 im Inneren von F an und bilden ihre Entfernung $R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. Wir betrachten nun das Integral $\int R^q \, d\,P_1 \, d\,P_2$ erstreckt über alle inneren Punkte von F. Aus der Croftonschen Formel (6) folgt dann, da mit den dortigen Bezeichnungen $R = |t_1 - t_2|$ ist:

(d) $$\int R^q \, d\,P_1 \, d\,P_2 = \int |t_1 - t_2|^{q+2} \, dt_1 \, dt_2 \, dG,$$

wobei wieder dG die Dichte der Verbindungsgeraden von P_1 und P_2 ist, wie bei (6) näher erörtert wurde. Wir halten in dem Integral, das auf der rechten Seite von (d) steht, G fest, t_1 variiert dann von einem gewissen Wert t bis $t + \sigma$, und dies ist auch der Variabilitätsbereich von t_2, und σ hat die obenerwähnte Bedeutung. Der Wert des Integrals ändert sich offenbar nicht, wenn man das Intervall $\langle 0, \sigma \rangle$ für t_1 und t_2 wählt[14]). Es ist nun

$$\int_0^\sigma \int_0^\sigma |t_1 - t_2|^{q+2} \, dt_1 \, dt_2 = 2 \int_0^\sigma \left[\int_0^{t_1} (t_1 - t_2)^{q+2} \, dt_2 \right] dt_1 = \frac{2\,\sigma^{q+4}}{(q+3)\,(q+4)}.$$

---

[12]) Man könnte auch beliebige analytische Funktionen $f(\sigma)$, $\psi(\delta)$ und $\chi(\Omega)$ betrachten, die sich aber auf die angegebenen Fälle reduzieren.

[13]) Wegen der Existenz der Integrale (c) siehe S. 403.

[14]) Man müßte nur substituieren $t_1^* = t_1 + t$, $t_2^* = t_2 + t$ und nachträglich die Veränderlichen wieder mit t_1 und t_2 bezeichnen.

Man hat daher für (d)

$$\int R^q \, d P_1 \, d P_2 = \frac{2}{(q+3)(q+4)} \int \sigma^{q+4} \, dG$$

oder

$$\int \sigma^n \, dG = \frac{n(n-1)}{2} \int R^{n-4} \, d P_1 \, d P_2 \text{ [15]}. \tag{16}$$

Für den Fall $n = 4$ folgt daraus

$$\int \sigma^4 \, dG = 6 V^2, \tag{16'}$$

wo V das Volumen von F ist [16].

Im Spezialfall, wo F eine Kugel ist, kann man den Wert des Integrals (a) leicht angeben. Dazu sei die Gerade G durch die in § 1 (4) verwendeten Größen p, ϑ, φ, α dargestellt. Für die Sehne σ, die von G getragen wird, kommt dann $\sigma^2 = 2^2 (1 - p^2)$. Das Integral wird somit sein

$$\int \sigma^n \, dG = -\tfrac{1}{2} \int 2^n (1 - p^2)^{\frac{n}{2}} \sin \vartheta \, d(1 - p^2) \, d\vartheta \, d\varphi \, dt. \tag{e}$$

Das Integrationsgebiet auf der rechten Seite von (e) wird beschrieben durch

$$0 \leqq p \leqq 1; \quad 0 \leqq \alpha \leqq \pi; \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi; \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

Aus (e) folgt dann:

$$\int \sigma^n \, dG = \frac{2^{n+2}}{n+2} \pi^2 \text{ [17]}. \tag{17}$$

Für den Mittelwert M_n der n-ten Potenz einer Kugelsehne findet man bei der üblichen Erklärung des Mittelwertes wegen (14)

$$M_n = \frac{\int \sigma^n \, dG}{\int dG} = \frac{\int \sigma^n \, dG}{\frac{\pi}{2} O} = \frac{2^{n+2}}{n+2}.$$

---

[15]) In der Ebene wurde von G. Herglotz gefunden

$$\int \sigma^n \, dG = \frac{h(n-1)}{2} \int R^{n-3} \, d P_1 \, d P_2,$$

wo alle Größen wie oben definiert sind.

[16]) Diese Formel wurde von G. Herglotz gefunden, siehe Vorlesung.

[17]) In der Ebene fand bei gleicher Bedeutung der auftretenden Größen für den Fall des Kreises G. Herglotz, siehe Vorlesungen:

$$\int \sigma^k \, dG = \frac{2 \cdot 4 \ldots k}{3 \cdot 5 \ldots (k-1)} 2^{k+1} \cdot \pi, \qquad \text{(falls } k \text{ gerade)}$$

$$\int \sigma^k \, dG = \frac{1 \cdot 3 \ldots k}{2 \cdot 4 \ldots (k+1)} 2^k \cdot \pi^2 \qquad \text{(falls } k \text{ ungerade).}$$

Das Integral $\int |\sin\delta|^n dG$.

Die Bedeutung des Integrals ist S. 400 (b) erklärt. Wir betrachten alle Paare E_1 und E_2 von Treffebenen K der F. Haben dann α_1, α_2, G diejenige Bedeutung wie in der Croftonschen Formel (7), so folgt aus derselben

$$\text{(f)} \qquad \int |\sin(\alpha_2-\alpha_1)|^q \, dE_1 \, dE_2 = \int_i |\sin(\alpha_2-\alpha_1)|^{q+2} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, dG + \int_a |\sin(\alpha_2-\alpha_1)|^{q+2} \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \, dG.$$

In (f) ist das Integral links über alle Paare von Treffebenen zu erstrecken, während auf der rechten Seite die Indizes i und a angeben sollen, daß die betreffenden Integrale über die Treffgeraden über F zu erstrecken sind bzw. dies nicht der Fall ist. In beiden Integralen der rechten Seite hat man bei festgehaltenem G in $\int |\sin(\alpha_2-\alpha_1)|^{q+2} d\alpha_2 d\alpha_1$ für α_1 und α_2 dieselben festen Grenzen. Für $\int_a$ ist dieses Intervall: $\alpha \leqq \alpha_1 \leqq \delta+\alpha$; $\alpha \leqq \alpha_2 \leqq \delta+\alpha$. Für $\int_i$ ist das Intervall: $\alpha \leqq \alpha_1 \leqq \pi+\pi$; $\alpha \leqq \alpha_2 \leqq \pi+\pi$. Wie bei der Betrachtung von (d) kann man diese Intervalle von α_1 und α_2 für $\int_a$ und $\int_i$ ersetzen durch $0 \leqq \alpha_1 \leqq \delta$; $0 \leqq \alpha_2 \leqq \delta$, und $0 \leqq \alpha_1 \leqq \pi$, $0 \leqq \alpha_2 \leqq \pi$, ohne den Wert der Integrale zu ändern. Wir geben den Wert der Integrale an. Ist $q+2$ ungerade und gleich $2k-1$ $(k \geqq 2)$, dann kommt

$$\text{(g)} \qquad \int_0^\delta \int_0^\delta |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|^{2k-1} d\alpha_1 \, d\alpha_2 = \int_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=\delta} \Big[\int_{\alpha_2=0}^{\alpha_2=\alpha_1} \sin(\alpha_1-\alpha_2)^{2k-1} d\alpha_2 \Big] d\alpha_1$$

$$= -\frac{2}{2k-1}\Big[\frac{1}{2k-1}\sin^{2k-1}\delta - \frac{(2k-2)(2k-4)\ldots 4\cdot 2}{(2k-3)(2k-5)\ldots 3\cdot 1}\delta + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(2k-2)(2k-4)\ldots(2k-2i)}{(2k-3)(2k-5)\ldots(2k-2i-1)^2} \sin\delta^{2k-2i-1}\Big].$$

Für $k=1$ hat das Integral den Wert $2(\delta-\sin\delta)$.

Ist $q+2$ gerade etwa gleich $2k$, dann kommt:

$$\text{(h)} \qquad \int_0^\delta \int_0^\delta |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|^{2k} d\alpha_1 \, d\alpha_2$$

$$= -\frac{1}{k}\Big[\frac{1}{2k}\sin^{2k}\delta + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots(2k-2i+1)}{(2k-2)(2k-4)\ldots(2k-2i)^2} \sin^{2k-2i}\delta\Big] + \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\ldots 2}\delta^2,$$

$$\text{(g')} \qquad \int_0^\pi \int_0^\pi |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|^{2k-1} d\alpha_1 \, d\alpha_2 = \frac{2}{2k-1}\frac{(2k-2)(2k-4)\ldots 4\cdot 2}{(2k-3)(2k-5)\ldots 3\cdot 1}\pi,$$

$$\text{(h')} \qquad \int_0^\pi \int_0^\pi |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|^{2k} d\alpha_1 \, d\alpha_2 = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3}{2k\cdot(2k-2)\ldots 2}\pi^2.$$

Wendet man (f) für $q = -1, 0, 1, 2$ die Formeln (g), (h), (g′) und (h′) an, dann erhält man bei Beachtung von (14)

$$(18') \quad \begin{aligned} \int_a |\sin\delta|^3\, dG &= 3\int \frac{dE_1\, dE_2}{|\sin(\alpha_1-\alpha_2)|} - \frac{9}{2}\int |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|\, dE_1\, dE_2, \\ \int_a |\sin\delta|^4\, dG &= 6\int dE_1\, dE_2 - 8\int \sin^2(\alpha_1-\alpha_2)\, dE_1\, dE_2. \end{aligned}$$

Mit Hilfe vollständiger Induktion zeigt man auf Grund von (f), (g), (h), (g′), (h′) und (18′) die Beziehung

$$(18) \quad \int_a |\sin\delta|^n\, dG = \frac{n(n-1)}{2}\int |\sin(\alpha_2-\alpha_1)|^{n-4}\, dE_1\, dE_2 - \frac{n^2}{2}\int \sin(\alpha_2-\alpha_1)^{n-2}\, dE_1\, dE_2\,^{18}).$$

Aus der rechten Seite von (18) sieht man auf Grund des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung und (15) die Existenz von $K_n = \int |\sin\delta|^n\, dG$ für $n \geqq 4$. Wir werden zeigen, daß das Integral für $n = 3$ noch existiert, hingegen bei $n = 1$ und $n = 2$ divergent ist. Dies wird aus dem Spezialfall folgen, zu dem wir uns jetzt wenden, indem wir F als Kugel voraussetzen. Angenommen K_3 existiere für die Kugel K mit beliebigem Radius und sei F eine ihr eingeschriebene konvexe Fläche. Für alle Geraden G, deren Abstand vom Ursprung genügend groß ist, sehe man K und F unter den Winkeln δ und δ'. Dann ist $\delta > \delta'$ und der Integrand in K_3 für K ist größer als der entsprechende für F, woraus die Existenz von J_3 in bezug auf F folgt. Aus der Divergenz der Integrale K_1 und K_2 für K folgt die Divergenz derselben für eine konvexe Fläche F, wenn man dieselbe der K umschreibt.

Die Gerade G, von der aus die beiden Ebenen E_1 und E_2 mit dem Winkel δ an K gelegt werden, seien wie in (4) durch die Größen p, ϑ, φ, α dargestellt. Dann folgt unmittelbar $\sin\delta = \frac{2}{p}\sqrt{1-\frac{1}{p^2}}$. Das Integral (b) nimmt dann folgende Gestalt an

$$(b') \quad \int \frac{2^m}{p^{m-1}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{p^2}}\right)^m |\sin\vartheta|\, dp\, d\vartheta\, d\varphi\, d\alpha.$$

Das Integrationsgebiet wird beschrieben durch:

$$1 \leqq p \leqq \infty; \quad 0 \leqq \alpha \leqq \pi; \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi; \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

---

[18]) Für die Ebene tritt hier als analoges Integral $\int |\sin\delta|^k\, d\omega$ auf, erstreckt über alle Punkte außerhalb einer Eilinie. Der Winkel ist die Sicht dieser Eilinie von einem Punkt. Man findet hier eine (18) entsprechende Formel

$$\int |\sin\delta|^n\, d\omega = \frac{n(n-1)}{2}\int |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|^{n-2}\, dG_1\, dG_2 - \frac{n^2}{2}\int |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|^{n-1}\, dG_1\, dG_2.$$

Das Integral $\int |\sin\delta|^n\, d\omega$ existiert für $n \geqq 3$.

Wir werten das uneigentliche Integral

$$(j) \qquad J_m = \int_1^\infty \frac{2^m}{p^{m-1}} \left(\sqrt{1-\frac{1}{p^2}}\right)^m dp$$

aus. Hier gibt es eine Fallunterscheidung, je nachdem m ungerade etwa $2k+1$ oder gerade etwa gleich $2k$ ist. Es ist, wenn $k \geqq 2$,

$$(k) \qquad J_{2k+1} = -2^{2k+1} \int_1^\infty \frac{1}{\varrho^{2k-2}} \left(\sqrt{1-\frac{1}{\varrho^2}}\right)^{2k+1} d\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$= 2^{2k+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-2} x \cos^{2k+2} x \, dx$$

$$= 2^{2k+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-3) \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2k+1)}{2 \cdot 4 \ldots 4k} \frac{\pi}{2}.$$

Man erhält für J_3 den Wert $\frac{3}{16}\pi$.

Für $m = 2k$ hat man, wenn $k \geqq 2$,

$$(l) \qquad J_{2k} = -2^{2k} \int_1^\infty \frac{1}{\varrho^{2k-3}} \left(\sqrt{1-\frac{1}{\varrho^2}}\right)^{2k} d\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$= 2^{2k} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k-3} x \cos^{2k+1} x \, dx = 2^{2k} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k}{(2k-2)\, 2k\, (2k+2) \ldots (4k-2)}.$$

J_2 existiert nicht, denn es ist ja $J_2 = 2^2 \int_1^\infty \frac{dp}{p} - 2^2 \int_1^\infty \frac{dp}{p^3}$, wo das erste Integral rechts bekanntlich divergent und das zweite konvergent ist. Für $m = 1$ folgt die Divergenz von J_1 daraus, daß für den Integranden $\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}$ von J_1 für $p \geqq 1$ gilt

$$\left|\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}\right| \geqq \left|\sqrt{1-\frac{1}{p^2}}\right| \geqq \frac{p^2-1}{p^2} \geqq \frac{p^2-1}{p^3} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3},$$

d. h. derselbe beständig größer ist als der Integrand von J_2, dessen Divergenz schon erledigt wurde. Wegen (j) und (k) folgt aus (b')[19])

$$(19) \qquad \begin{aligned} \int_a |\sin\delta|^{2k+1} dG &= 2^{2k+2} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-3) \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 4k} \pi^3, \\ \int_a |\sin\delta|^{2k} dG &= 2^{2k+2} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k}{(2k-2)\, 2k\, (2k+2) \ldots (4k-2)} \pi^2, \quad k \geqq 1. \end{aligned}$$

[19]) In der Ebene ergibt sich — siehe dazu Fußnote [18]) — entsprechend, wenn man als Eilinie einen Kreis wählt

$$\int_a |\sin\delta|^{2k+1} dP = 2^{2k+1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-3)\, 1 \cdot 3 \ldots (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 4k} \pi^2,$$

$$\int_a |\sin\delta|^{2k} dP = 2^{2k+1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k}{(2k-2)\, 2k \ldots (4k-2)} \pi.$$

Das Integral $\int \Omega^n dE$.

Die Bedeutung des Integrals ist S. 400 (c) angegeben. Wir gehen aus von drei Punkten P_1, P_2, P_3 innerhalb der konvexen Fläche F. Der doppelte Flächeninhalt des von P_1, P_2 und P_3 bestimmten Dreiecks sei Δ, mit Ω werde die Schnittfläche der Ebene E — aufgespannt von P_1, P_2, P_3 — mit F bezeichnet. Nach der Croftonschen Formel (13) kommt dann für das Integral $\int \frac{\Omega^{n-3}}{\Delta} dP_1 dP_2 dP_3$, erstreckt über alle innerhalb F liegenden Punkte

$$\int \frac{\Omega^{n-3}}{\Delta} dP_1 dP_2 dP_3 = \int \Omega^n dE. \tag{20}$$

Für $n = 0$ kommt wegen (15)

$$M = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) d\sigma = \int \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{\Delta\, \Omega^3}. \tag{20'}$$

In (20′) ist $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ die mittlere Krümmung von F und $d\sigma$ das Oberflächenelement.

(Eingegangen am 29. März 1935).

Die Fundamentalgruppe von Komplexen.

Von

Kurt Reidemeister in Marburg.

Die Fundamentalgruppe eines Komplexes pflegt man auf zwei verschiedene Weisen zu erklären — als die Wegegruppe des Komplexes einerseits, als die Automorphismengruppe des zugehörigen universellen Überlagerungskomplexes andererseits. Daß sich beidemal im allgemeinen dieselbe Gruppe ergibt, ist ein Satz, der insofern merkwürdig erscheint, als die Wegegruppe sich ja bereits aus dem zweidimensionalen Unterkomplex bestimmen läßt, während die Konstruktion einer Überlagerung die Kenntnis des Gesamtkomplexes erfordert.

Ich möchte deswegen im folgenden den Begriff des Weges verallgemeinern und unter einem Weg eine linear oder zyklisch geordnete Menge von Zellen beliebiger Dimension verstehen, die je mit der vorangehenden und nachfolgenden Zelle der Menge inzidieren. Es läßt sich die Deformation solcher Wege und damit die Wegegruppe des Komplexes in einem etwas weiteren Sinne, als es sonst üblich ist, erklären (§ 5) und ein kombinatorisches Verfahren angeben, ihre Erzeugenden (§ 3) und definierenden Relationen (§ 6) aus dem Inzidenzschema des Komplexes abzulesen. Zugleich sieht man, was diese Relationen für die Konstruktion einer Überlagerung bedeuten und wie sich das Inzidenzschema von Überlagerungskomplexen hinschreiben läßt (§ 8).

Es ist bemerkenswert, unter wie geringen Voraussetzungen die Aufstellung der verallgemeinerten Wegegruppe möglich ist (§ 1). Daher ist diese Gruppe auch für die Axiomatik der Komplexe von Bedeutung (§ 9).

§ 1.

Grundlegende Definitionen.

Unter einem n-dimensionalen Komplex verstehen wir eine Menge von Zellen

$$z = a_i^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \alpha_k),$$

denen eine Dimension $k = 0, 1, \ldots, n$ zugeschrieben wird und zwischen denen gewisse Inzidenzrelationen erklärt sind. Unter den definierenden Inzidenzrelationen verstehen wir die, welche zwischen den Zellen k-ter und $(k-1)$-ter Dimension $(k > 0)$ bestehen; jedem Paar von Zellen a_i^k, a_j^{k-1} ordnen wir das Symbol

$$\varepsilon(a_i^k, a_j^{k-1}) = \varepsilon_{ij}^k = 1 \quad \text{oder} \quad 0$$

zu, je nachdem diese Zellen inzidieren oder nicht. Die ε_{ij}^k bilden die k-te Inzidenzmatrix, wie wir sagen wollen.

Unter einem Weg verstehen wir eine geordnete Menge von Zellen

$$w = z_1 z_2 \dots z_m,$$

von denen je zwei benachbarte z_i und z_{i+1} miteinander auf Grund der definierenden Relationen inzidieren, und fassen zunächst diejenigen Wege ins Auge, bei denen die Dimension der Zellen stets abnimmt — sie mögen Inzidenz-m-tupel genannt werden. Mit ihrer Hilfe erklären wir die Inzidenz allgemein so: die Zellen a_i^k und a_j^{k-m+1} mögen inzidieren oder nicht, je nachdem es ein in a_i^k beginnendes und in a_j^{k-m+1} endigendes Inzidenz-m-tupel gibt oder nicht.

Unter einem Teilkomplex verstehen wir eine Teilmenge der Zellen mit den zwischen ihnen bestehenden Inzidenzrelationen. Beispielsweise bilden die sämtlichen Zellen von l-ter Dimension mit $l \leqq k$ einen Teilkomplex, der seinerseits ein k-dimensionaler Komplex ist. Unter dem Rand der Zelle a_i^k verstehen wir den Teilkomplex aus allen mit a_i^k inzidierenden Zellen von geringerer Dimension als k, unter dem Büschel der Zelle a_i^k den Teilkomplex aus allen mit a_i^k inzidierenden Zellen von höherer Dimension als k. Ein Teilkomplex ist im allgemeinen kein Komplex, weil man aus den Inzidenzrelationen von Zellen benachbarter Dimension im allgemeinen nicht mehr sämtliche Inzidenzrelationen folgern kann.

Der Komplex aus den Zellen b_j^l heißt zu dem Komplex aus den Zellen a_i^k dual, wenn man die Zellen b_j^l eindeutig den Zellen a_j^{n-l} so zuordnen kann, daß die zugehörigen definierenden Inzidenzrelationen erhalten bleiben. Bezeichnen wir die Inzidenzmatrizen der b_i^l, b_j^{l-1} mit $\bar{\varepsilon}_{ij}^l$, so ist also

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^l = \varepsilon_{ji}^{n-l+1},$$

d. h. die Inzidenzmatrizen der dualen Komplexe gehen durch Vertauschen von Zeilen und Kolonnen und Umkehrung der Reihenfolge ineinander über.

§ 2.

Die freie Wegegruppe.

Wir wenden uns nun einer näheren Beschreibung der Wege zwecks Erklärung der Wegegruppe zu. Ein Weg heiße geschlossen, wenn seine erste und letzte Zelle dieselbe ist. Sind $z w_1 z$ und $z w_2 z$ zwei in z beginnende geschlossene Wege, so gilt dies auch von dem Produktweg

$$(z w_1 z)\ (z w_2 z) = z w_{12} z = z w_1 z w_2 z,$$

dem Weg, der entsteht, wenn erst $z w_1 z$ und dann $w_2 z$ durchlaufen wird. Ein Weg w heiße reduzibel, wenn er ein Tripel $z_i z_{i+1} z_{i+2}$ mit $z_i = z_{i+2}$

enthält, und unter Reduktion von w verstehen wir alsdann die Abänderung von w zu w' durch Streichen von $z_{i+1} z_{i+2}$; der umgekehrte Übergang von w' zu w heiße Erweiterung, und zwei Wege, die durch eine Kette von Reduktionen und Erweiterungen ineinander übergeführt werden können, mögen *verwandt* heißen. Schließlich verstehen wir unter w^{-1} den Weg $z_m z_{m-1} \dots z_2 z_1$, der aus w durch Umkehrung der Reihenfolge entsteht.

Wir können nun eine Gruppe bilden, deren Elemente die Klassen verwandter geschlossener in z beginnender Wege sind. Sie möge als freie Wegegruppe bezeichnet werden. Die Klassen der zu $z w z$ verwandten Wege bezeichnen wir mit $\{z w z\}$ und setzen

$$\{z w_1 z\} \; \{z w_2 z\} = \{z w_1 z w_2 z\}.$$

Diese Multiplikation ist eindeutig; denn ist etwa $z w_1' z$ zu $z w_1 z$ verwandt, so ist auch $z w_1' z w_2 z$ zu $z w_1 z w_2 z$ verwandt. Sie ist stets ausführbar und assoziativ. Die Klasse $\{z\}$ ist das Einheitselement, und das zu $\{z w z\}$ inverse Element wird durch

$$\{z w z\}^{-1} = \{z w^{-1} z\}$$

geliefert. Denn der Weg $z w z w^{-1} z$ läßt sich durch Reduktionen in den Weg z verwandeln.

§ 3.

Die Erzeugenden der freien Wegegruppe.

Systeme von Erzeugenden dieser Gruppe lassen sich ganz ähnlich wie bei den eindimensionalen Wegen bilden. Wir wählen zunächst die Hilfswege $z h_i z_i$, die von z nach jeder erreichbaren Zelle z_i hinführen, und zwar mögen dieselben der Schreierschen Bedingung genügen, welche besagt: Durchläuft $z h_i z_i$ die Zelle z_j, so ist der Teilweg von $z h_i z_i$, der von z nach z_j führt, der Hilfsweg $z h_j z_j$.

Zu einem geschlossenen Weg

$$z w z = z z_1 z_2 \dots z_m z$$

bilden wir nun den Weg

$$z w^* z = z \cdot z_1 h_1^{-1} z h_1 z_1 \cdot z_2 h_2^{-1} z h_2 z_2 \dots z_m h_m^{-1} z h_m z_m z,$$

der entsteht, indem z_i durch $z_i h_i^{-1} z h_i z_i$ ersetzt wird, was offenbar eine Erweiterung ist. Dieser Weg kann als Produktweg

$$z w^* z = (z z_1 h_1^{-1} z)(z h_1 z_1 z_2 h_2^{-1} z)(z h_2 z_2 z_3 h_3^{-1} z) \dots (z h_m z_m z)$$

aufgefaßt werden. Jeder der Faktoren ist ein geschlossener in z beginnender Weg. Wir erklären demgemäß

$$g_{ij} = z h_i z_i z_j h_j^{-1} z$$

für jedes Paar z_i, $z_j \neq z$ von Zellen[1]), welche sich in der Dimension um 1 unterscheiden und inzidieren, und

$$g_{i0} = z\, h_i z_i z, \quad g_{0j} = z\, z_j h_j^{-1} z$$

für solche Zellen z_i, z_j, die bzw. mit z inzidieren und sich in der Dimension um 1 von der von z unterscheiden.

Der Weg g_{ji} ist zu dem Weg g_{ij} invers. Wir setzen daher ferner voraus, daß die Dimension von z_i größer als die von z_j (einschließlich $z_i = z_0 = z$ und $z_j = z_0 = z$) sein soll, und finden also, daß jeder Weg zwz, geeignet erweitert, in ein Produkt der $g_{ij}^{\pm 1}$ übergeht. Die Klassen $\{g_{ij}\}$ bilden also ein System von Erzeugenden der Gruppe der $\{zwz\}$.

§ 4.

Die Struktur der freien Wegegruppe.

Gewisse der g_{ij} lassen sich durch Reduktion in z verwandeln, nämlich diejenigen, für welche $h_i z_i = h_j$ oder $z_j h_j^{-1} = h_i^{-1}$ ist. Damit sind aber alle Reduktionen zwischen den $\{g_{ij}\}$ erschöpft. Jedenfalls sind die restlichen g_{ij} irreduzibel. Ist nämlich $z\, h_i z_i z_j h_j^{-1} z$ reduzibel, so muß entweder h_i mit z_j enden, und es ist nach der Schreierschen Bedingung $h_i = h_j z_j$, oder es muß h_j^{-1} mit z_i beginnen, und es ist $h_j = h_i z_i$.

Ist nun irgendein Produkt der $\{g_{ij}\}$ vorgelegt, so können wir dasselbe als ein reduziertes Produkt der Erzeugenden annehmen, und wir haben zu zeigen, daß ein solches Produkt nicht gleich 1 sein kann, wenn es überhaupt Faktoren enthält. Wir bilden den dem Produkt zugeordneten Weg w, indem wir $g_{ij}^{-1} = g_{ji}$ setzen,

$$\begin{aligned} w &= g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_a j_a} \\ &= z\, h_{i_1} z_{i_1} \cdot z_{j_1} h_{j_1}^{-1} z\, h_{i_2} z_{i_2} \cdot \ldots \cdot z_{j_{a-1}} h_{j_{a-1}}^{-1} z\, h_{i_a} z_{i_a} \cdot z_{j_a} h_{j_a}^{-1} z. \end{aligned}$$

Unter $h_{j_l i_{l+1}}$ verstehen wir den aus $z_{j_l} h_{j_l}^{-1} z\, h_{i_{l+1}} z_{i_{l+1}}$ durch Reduktion entstehenden Weg. Dann ist w zu

$$w' = z\, h_{i_1} z_{i_1} \cdot h_{j_1 i_2} \cdots h_{j_{a-1} i_a} \cdot z_{j_a} h_{j_a}^{-1} z$$

verwandt, und wir behaupten, daß w' irreduzibel ist. Die $h_{j_l i_{l+1}}$ enthalten, falls $j_l = i_{l+1}$ ist, die eine Zelle $z_{j_l} = z_{i_{l+1}}$, andernfalls mindestens die zwei Zellen z_{j_l} und $z_{i_{l+1}}$, mit denen sie beginnen und endigen. Die Teilwege

(1) $$z\, h_{i_1} z_{i_1} \cdot z_{j_1}, \quad z_{i_a} \cdot z_{j_a} h_{j_a}^{-1} z$$

sowie

(2) $$z_{i_l} \cdot h_{j_l i_{l+1}}, \quad h_{j_l i_{l+1}} \cdot z_{i_{l+1}}$$

[1]) Zwecks Vermeidung unwichtiger Fallunterscheidungen wird von jetzt ab vorausgesetzt, daß alle z_i erreichbar, der Komplex also zusammenhängend ist.

sind jedenfalls irreduzibel. Die Wege (1) sind ja Teilwege der irreduziblen Wege $g_{i_1 j_1}$ bzw. $g_{i_a j_a}$. Von den Wegen (2) greifen wir den ersten heraus, welcher aus

$$z_{i_l} z_{j_l} h_{j_l}^{-1} z\, h_{i_{l+1}} z_{i_{l+1}} \tag{3}$$

durch Reduktion entsteht. Da $z_{i_l} z_{j_l} h_{j_l}^{-1} z$ als Teilweg von $g_{i_l j_l}$ und $z\, h_{i_{l+1}} z_{i_{l+1}}$ als Teilweg von $g_{i_{l+1} j_{l+1}}$ irreduzibel ist, kann (3) nur reduziert werden, wenn zu z benachbarte spiegelbildlich stehende Zellen gleich sind, und diese Reduktionen können nur dann auch z_{i_l} betreffen, wenn entweder $h_{j_l} z_{j_l} = h_{i_{l+1}}$ und $z_{i_l} = z_{i_{l+1}}$ ist oder wenn $h_{j_l} z_{j_l} z_{i_l}$ ein Teilweg von $h_{i_{l+1}}$ ist. Im ersten Fall wäre aber $h_{j_l} z_{j_l} = h_{i_l}$ und im zweiten Fall folgte aus der Schreierschen Bedingung $h_{j_l} z_{j_l} = h_{i_l}$ und beidemal wäre also $g_{i_l j_l} = 1$.

Aus der Irreduzibilität der Wege (1) und (2) folgt, daß auch die Wege

$$z_1 h_{i_1} z_{i_1} h_{j_1 i_2}, \quad h_{j_{l-1} i_l} h_{j_l i_{l+1}}, \quad h_{j_{a-1} i_a} z_{j_a} h_{j_a}^{-1} z$$

ebenfalls irreduzibel sind.

Der Weg w' könnte also nur noch dadurch reduzibel sein, daß eine Kürzung über drei der betrachteten Teilwege möglich wäre. Dann müßte der mittlere dieser Wege $h_{j_{l-1} i_l}$ nur eine Zelle enthalten, es wäre also $z_{j_{l-1}} = z_{i_l}$, und es müßte die letzte Zelle des vorderen gleich der ersten Zelle des dritten Teilweges, $z_{i_{l-1}} = z_{j_l}$, sein. Dann wäre aber

$$g_{i_{l-1} j_{l-1}} = g_{j_l i_l}.$$

Einem irreduziblen Produkt der g im oben angegebenen Sinn entspricht also ein irreduzibler Weg, der von z verschieden ist, und die Gruppe der Klassen verwandter Wege stellt sich als die *freie Gruppe* mit den eingangs beschriebenen freien Erzeugenden $\{g_{ij}\}$ heraus.

§ 5.

Die Wegegruppe.

Die Wegegruppe des Komplexes bestimmen wir als eine Faktorgruppe der freien Wegegruppe, indem wir gewisse Klassen verwandter Wege zu Klassen *äquivalenter* Wege zusammenfassen. Wir erklären zunächst die Deformation eines Weges: enthält w das Tripel $z_i z_{i+1} z_{i+2}$, wo z_i und z_{i+2} die gleiche Dimension k und z_{i+1} die Dimension $k+1$ oder $k-1$ hat, und gibt es eine Zelle z_j von der Dimension $k-1$ oder $k+1$, die sowohl mit z_i wie z_{i+2} inzidiert, so werde z_{i+1} durch z_j ersetzt. Geschlossene Wege mögen äquivalent heißen, wenn sie durch eine Kette von Reduktionen, Erweiterungen und Deformationen ineinander übergeführt

werden können. Unter $[z\,w\,z]$ verstehen wir die Klasse zu $z\,w\,z$ äquivalenter in z beginnender geschlossener Wege und erklären, ganz ähnlich wie oben, das Produkt

$$[z\,w_1\,z]\,[z\,w_2\,z] = [z\,w_1\,z\,w_2\,z].$$

Diese Multiplikation ist stets eindeutig ausführbar und assoziativ, $[z]$ ist das Einheitselement und $[z\,w^{-1}\,z]$ das zu $[z\,w\,z]$ inverse Element. Die Klassen äquivalenter Wege $[z\,w\,z]$ bilden daher mit der angegebenen Verknüpfungsregel eine Gruppe, welche als Wegegruppe bezeichnet werden möge. Die Elemente $[g_{ij}]$ sind ersichtlich ein System von Erzeugenden der Wegegruppe.

Ist $z\,w_1\,z$ zu $z\,w_2\,z$ äquivalent, so ist $z\,w_1\,z\,w_2^{-1}\,z$ äquivalent zu z. Denn $z\,w_1\,z\,w_2^{-1}\,z$ ist äquivalent zu $z\,w_1\,z\,w_1^{-1}\,z$, und dies ist äquivalent zu z. Die Wege einer Äquivalenzklasse entstehen also aus einem ihrer Wege durch Multiplikation mit Wegen aus der Klasse $[z]$ und Reduktionen und Erweiterungen dieses Produktes. Ferner sieht man, daß die in $[z]$ enthaltenen Klassen verwandter Wege eine Untergruppe der freien Wegegruppe, und zwar eine invariante Untergruppe bilden.

Mithin erhalten wir eine Darstellung der Wegegruppe als Faktorgruppe der freien Wegegruppe, wenn wir die Wege bzw. die Klassen verwandter Wege aus der Klasse $[z]$ als Relationen nehmen.

§ 6.

Die Eckrelationen.

Wir können aus der Menge der Relationen leicht eine Untermenge, die Eckrelationen, als definierende Relationen herausgreifen. Läßt sich bei einer Deformation das Tripel $z_i\,z_{i+1}\,z_{i+2}$ in $z_i\,z_j\,z_{i+2}$ überführen, so ist $z_j\,z_i\,z_{i+1}\,z_{i+2}\,z_j$ ein geschlossener Weg, und wenn $z\,h_j\,z_j$ der Hilfsweg von z nach z_j ist, so ist

$$z\,h_j\,z_j\,z_i\,z_{i+1}\,z_{i+2}\,z_j\,h_j^{-1}\,z$$

ebenfalls geschlossen und äquivalent zu z, wie man sieht, indem man zuerst z_{i+1} durch z_j ersetzt, dann durch zwei Reduktionen zu dem Wege $z\,h_j\,z_j\,h_j^{-1}\,z$ übergeht, welcher tatsächlich zu z verwandt ist. Ebenso kann man mit den Wegen $z\,h_i\,z_i\,z_{i+1}\,z_{i+2}\,z_j\,z_i\,h_i^{-1}\,z$, $z\,h_{i+1}\,z_{i+1}\,z_{i+2}\,z_j\,z_i\,z_{i+1}\,h_{i+1}^{-1}\,z$, $z\,h_{i+2}\,z_{i+2}\,z_j\,z_i\,z_{i+1}\,z_{i+2}\,h_{i+2}^{-1}\,z$ vorgehen. Durch die g_{lm} ausgedrückt ergeben sich vier Produkte, die aus einem von ihnen

$$g_{ji}\,g_{i\,i+1}\,g_{i+1\,i+2}\,g_{i+2\,j}$$

durch zyklische Vertauschungen hervorgehen. Sie bestimmen eine Relation zwischen den g_{lm}, welche der Deformation eindeutig entspricht und die zu dieser Deformation gehörige Eckrelation genannt werde. Geht $z\,w_1\,z$ in $z\,w_2\,z$ durch einmalige Anwendung dieser Deformation über, so ist

$z w_1 z w_2^{-1} z$, durch die g_{lm} ausgedrückt, eine Folgerelation der zugehörigen Eckrelation.

Daraus ergibt sich, daß die Eckrelationen die definierenden Relationen der Wegegruppe sind, wenn man die $[g_{lm}]$ als Erzeugende nimmt. Dies folgt durch Induktion: wenn $[z w_1 z w_2^{-1} z]$ und $[z w_2 z w_3^{-1} z]$ als Folgerelation der Eckrelationen erkannt ist, so ist $[z w_1 z w_3^{-1} z]$ verwandt zu $[z w_1 z w_2^{-1} z w_2 z w_3^{-1} z]$ und mithin ebenfalls eine Folgerelation der Eckrelationen.

Die Erklärung der Wegegruppe beruht im wesentlichen auf der Erklärung der Deformation, welche man kurz auch so aussprechen kann: zwei Inzidenztripel, die mit den gleichen Zellen beginnen bzw. endigen, dürfen gegeneinander ausgetauscht werden. Diese Formulierung legt eine Erweiterung dieser Begriffsbildung nahe, indem man gestattet, zwei Inzidenz-m-tupel, die mit gleichen Zellen beginnen bzw. endigen, auszutauschen. Diesen neuen Umformungen entsprechen weitere definierende Relationen, die wir *höhere Eckrelationen* nennen wollen.

§ 7.
Überlagerung eines Komplexes.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang der Wegegruppe mit den Überlagerungskomplexen herstellen. Einen Überlagerungskomplex U über dem Komplex K erklären wir als einen Komplex der gleichen Dimension wie K. Jeder Zelle von U ist eine bestimmte Zelle von K der gleichen Dimension zugeordnet, über der sie liegt. Die Mengen der Zellen von U über derselben Zelle von K seien gleichmächtig. Inzidieren zwei Zellen aus U, so mögen auch die beiden überlagerten Zellen aus K inzidieren. Rand und Büschel einer Zelle von U überdecken den Rand und das Büschel der überdeckten Zelle von K gerade einmal. Die letzte Forderung läßt sich in verschiedene voneinander unabhängige Forderungen zerlegen, indem man den Rand einer k-dimensionalen Zelle durch den Teilkomplex dieses Randes ersetzt, der aus den $(k-1)$-, $(k-2)$-, ..., $(k-r)$-dimensionalen Zellen des Randes besteht, und analog beim Büschel verfährt.

Zur Aufstellung der Inzidenzmatrizen der Überdeckung führen wir eine Menge von Koordinaten u ein, die zu der Menge der Zellen von U über derselben Zelle z von K gleichmächtig ist, und ordnen einer Zelle von U ein Symbol uz zu, wenn sie über z liegt; und es läßt sich erreichen, daß die uz auch umgekehrt die Zellen aus U eindeutig festlegen. Ferner bedeutete γ eine eineindeutige Abbildung der u auf sich, in Zeichen: $u\gamma = u'$ und $u'\gamma^{-1} = u$.

Sind nun a_i^k und a_j^{k-1} zwei Zellen aus K, die miteinander inzidieren, und $u a_i^k$ also eine Zelle von U über a_i^k, so gibt es nach der Forderung

über den Rand genau eine Zelle $u' a_j^{k-1}$ über a_j^{k-1}, welche mit $u a_i^k$ inzidiert, und nach der Forderung über das Büschel zu jeder Zelle $u' a_j^{k-1}$ genau eine $u a_i^k$, die mit $u' a_j^{k-1}$ inzidiert. Wir können also $u \gamma_{ij}^k = u'$ setzen und erhalten so jedem Paar inzidierender Zellen a_i^k, a_j^{k-1} eine eindeutige Abbildung γ_{ij}^k zugeordnet. Verstehen wir unter γ_{ij}^k das Symbol 0, falls a_i^k und a_j^{k-1} nicht inzidieren, so können wir die γ_{ij}^k als die Inzidenzmatrizen der Überlagerung bezeichnen.

Ersetzen wir K und U gleichzeitig durch die dualen Komplexe $\bar{K}$ und $\bar{U}$, so ist $\bar{U}$ eine Überlagerung von $\bar{K}$; denn die Definition der Überlagerung ist zu sich dual. Für die zugehörigen Inzidenzmatrizen $\bar{\gamma}_{ij}^l$ findet man

$$\bar{\gamma}_{ij}^l = (\gamma_{ij}^{n-l+1})^{-1}.$$

Neben der Vertauschung von Zeilen und Kolonnen und Abänderung der Reihenfolge muß man also noch jedes Element der Matrix durch sein Inverses ersetzen.

§ 8.

Überlagerungen und Wegegruppe.

Zur Definition der Inzidenzfunktionen γ_{ij}^k mußten wir nur die $(k-1)$-dimensionalen Zellen des Randes einer k-dimensionalen heranziehen und die noch nicht benutzten Forderungen über Rand und Büschel drücken sich in Bedingungen für die γ_{ij}^k aus.

Sind

$$a_i^k a_j^{k-1} a_m^{k-2} \quad \text{und} \quad a_i^k a_l^{k-1} a_m^{k-2}$$

zwei Inzidenztripel, die bzw. mit den gleichen Elementen beginnen und endigen, so müssen auch

$$u a_i^k u \gamma_{ij}^k a_j^{k-1} u \gamma_{ij}^k \gamma_{jm}^{k-1} a_m^{k-2}$$

und

$$u a_i^k u \gamma_{il}^k a_l^{k-1} u \gamma_{il}^k \gamma_{lm}^{k-1} a_m^{k-2}$$

zwei Inzidenztripel sein, die bzw. mit den gleichen Zellen beginnen und endigen, und es müssen die γ_{ij}^k also den Relationen

$$\gamma_{ij}^k \gamma_{jm}^{k-1} = \gamma_{il}^k \gamma_{lm}^{k-1}$$

genügen. Unter dem Produkt der γ ist dabei die Zusammensetzung der eineindeutigen Transformationen $u\gamma = u'$ gemeint. Die aufgestellten Relationen in den γ entsprechen offenbar den Eckrelationen der Wegegruppe in den g. Ersetzen wir die Inzidenztripel durch Inzidenz m-tupel, so kommen wir zu Relationen für die γ, die den höheren Eckrelationen entsprechen[2]).

[2]) Im folgenden schreiben wir statt $[g]$ nur g.

Um die Beziehung zwischen den γ und g und den von ihnen erzeugten Gruppen genauer zu beschreiben, bezeichnen wir die g ebenfalls mit drei Indizes g_{ij}^k; gewisse dieser g_{ij}^k sind gleich 1, und wir wollen zeigen, daß wir durch Umbezeichnung der Zellen von U erreichen können, daß alsdann auch die entsprechenden γ_{ij}^k gleich der identischen Abbildung werden.

Ist $\varkappa$ eine eineindeutige Abbildung der u auf sich, so können wir einer Zelle über z statt uz auch $\bar{u}z = u\varkappa z$ als Symbol zuordnen. Das möge eine Koordinatenabänderung genannt werden. Ist $z = a_j^{k-1}$, so ändern sich die γ_{ij}^k dabei zu

$$\bar{\gamma}_{ij}^k = \gamma_{ij}^k \varkappa$$

und die γ_{jl}^{k-1} zu

$$\bar{\gamma}_{jl}^{k-1} = \varkappa^{-1} \gamma_{jl}^{k-1}.$$

Man kann also durch Koordinatentransformationen erreichen, daß gewisse γ gleich der Identität werden. Genauer erkennt man das folgende: Sind a_i^k und a_j^{k-1} zwei Zellen, die von einem Hilfsweg nacheinander durchlaufen werden, so läßt sich durch Koordinatenabänderung erreichen, daß für alle solche Zellenpaare gleichzeitig $\gamma_{ij}^k = 1$ wird. Der Beweis ergibt sich durch Induktion. Damit ist erreicht, daß alle diejenigen $\gamma_{ij}^k = 1$ sind, für welche die gleichnumerierten $g_{ij}^k = 1$ sind, und die Konstruktion der Überlagerung ist festgelegt, wenn die den Erzeugenden g_{ij}^k zugeordneten Abbildungen γ_{ij}^k bekannt sind.

Jedem geschlossenen in z beginnenden Weg zwz ist eine bestimmte Abbildung γ_w der Zellen uz auf sich zugeordnet. Wir finden sie, indem wir zwz durch die g_{ij}^k ausdrücken und diese durch die γ_{ij}^k ersetzen. Äquivalenten Wegen entspricht dieselbe Abbildung γ_w, weil die γ_{ij}^k die Eckrelationen erfüllen. Die Abbildung γ_w wird durch Abänderung der Koordinaten für die Zellen, die nicht über z liegen, nicht beeinflußt. Bei Abänderung der Koordinaten uz mittels $\bar{u} = u\varkappa$ erfahren alle γ_w dieselbe Transformation

$$\bar{\gamma}_w = \varkappa^{-1} \gamma_w \varkappa.$$

Wir erhalten also: Jeder Überlagerung U von K lassen sich Darstellungen der Wegegruppe $[zwz]$ durch eineindeutige Abbildungen im Bereich der Koordinatenmenge zuordnen; zwei verschiedene solche Darstellungen sind ähnlich, und die Überlagerung ist durch eine dieser Darstellungen festgelegt.

Dies Resultat läßt sich in folgender Weise umkehren: Jeder Darstellung der Wegegruppe mittels eineindeutiger Transformationen γ, welche auch den höheren Eckrelationen genügen, entspricht eine Überlagerung des Komplexes.

Damit ist, unter den wenigen Voraussetzungen des ersten Abschnittes, der Zusammenhang zwischen Wegegruppe und Überlagerungen hergestellt.

§ 9.
Axiome für Komplexe.

Wir haben bisher nur sehr wenig Voraussetzungen über die Inzidenzbeziehungen der Zellen eines Komplexes gemacht und können deswegen nicht erwarten, daß sich unter diesen geringen Voraussetzungen die weiteren bekannten Eigenschaften der Wegegruppe ableiten lassen. Vielmehr müssen wir uns nach geeigneten Inzidenzaxiomen umsehen, welche diese Eigenschaften zur Folge haben. Das ist eine Methode, die zur Begründung der Dualitätssätze z. B. mit Erfolg angewendet worden ist. Wir wollen einerseits erreichen, daß sich alle Wege in eindimensionale und in n-dimensionale deformieren lassen, und wir wollen andererseits erreichen, daß die höheren Eckrelationen Folgerelationen aus den ersten Eckrelationen werden.

Die Axiome, die sich für dieses Ziel darbieten, sind die folgenden.

Randaxiom: Ist $a_i^k\, a_j^{k+1}\, a_l^k$ ein Weg, in welchem a_i^k und a_l^k gleiche Dimension haben und a_j^{k+1} eine um 1 höhere Dimension, so gibt es einen Weg w aus Zellen des Randes von a_j^{k+1} von den Dimensionen k und $k-1$, welcher a_i^k mit a_l^k verbindet.

Der Teilkomplex aus den $(k-1)$- und $(k-2)$-dimensionalen mit a_j^{k+1} inzidierenden Zellen ist also zusammenhängend. Der Rand einer Zelle genügt selbst dem Randaxiom, da er den Rand jeder in ihm enthaltenen Zelle ebenfalls enthält. Ferner ergibt sich, daß die Teilkomplexe K_k aus den Zellen der Dimension $l \leqq k$ $(k > 0)$ zusammenhängend sind.

Schließlich beachte man: enthält ein Weg w' das Tripel $a_i^k\, a_j^{k+1}\, a_l^k$ und ersetzt man in ihm dies Tripel durch einen Weg w, dessen Existenz im Randaxiom gefordert ist, so geht w' dabei in einen äquivalenten Weg über. Man kann nämlich alle $(k-1)$-dimensionalen Zellen, welche w durchläuft, mittels Deformationen durch a_j^{k+1} ersetzen und den so entstehenden Weg zu w' reduzieren. Insbesondere lassen sich also die von einer k-dimensionalen Zelle ausgehenden geschlossenen Wege in höchstens k-dimensionale Wege deformieren $(k > 0)$.

Dual zum Randaxiom ist das

Büschelaxiom: Ist $a_i^k\, a_j^{k-1}\, a_l^k$ ein Tripelweg, in welchen a_i^k und a_l^k gleiche Dimension und a_j^{k-1} eine um 1 niedrigere Dimension hat, so gibt es einen Weg w aus Zellen des Büschels von a_j^{k-1} von der Dimension k und $k+1$, welche a_i^k mit a_l^k verbindet.

Die Folgerungen aus dem Büschelaxiom sind natürlich ebenfalls dual zu dem aus dem Randaxiom. Insbesondere sind die von einer k-dimen-

sionalen Zelle ausgehenden geschlossenen Wege zu Wegen aus mindestens k-dimensionalen Zellen äquivalent.

Drittens fordern wir das

Randbüschelaxiom: Der Rand einer Zelle genügt dem Büschelaxiom.

Im Rand von a_i^k werde das Büschel der Zelle a_j^{k-r} betrachtet. Dasselbe ist der Durchschnitt des Randes von a_i^k mit dem Büschel von a_j^{k-r} und enthält alle Zellen von geringerer Dimension als k und größerer als $k-r$, die gleichzeitig mit a_i^k und a_j^{k-r} inzidieren.

Das Axiom hat einen Inhalt für $r \geqq 3$ und besagt, zwei Zellen a_l^{k-r+1} und a_m^{k-r+1}, die gleichzeitig mit a_i^k und a_j^{k-r} inzidieren, lassen sich durch einen Weg aus Zellen $(k-r+1)$-ter und $(k-r+2)$-ter Dimension verbinden, die ebenfalls gleichzeitig mit a_i^k und a_j^{k-r} inzidieren. Hieraus folgt durch Induktion: enthält ein geschlossener Weg w einen Teilweg w', der zwei Zellen des Randes von a_i^k der Dimension $k-s$ im Rande von a_i^k über Zellen von niedrigerer Dimension als $k-s$ verbindet, so läßt sich w in einen Weg deformieren, der an Stelle von w' einen Teilweg w enthält, der die beiden Zellen der Dimension $k-s$ ebenfalls im Rande von a_i^k über Zellen von mindestens $(k-s)$-ter Dimension verbindet ($s > 1$). Ist insbesondere $a_i^k w a_i^k$ ein geschlossener, in a_i^k beginnender, ganz im Rand von a_i^k verlaufender Weg, so ist $a_i^k w a_i^k$ zu einem Weg aus $(k-1)$- und $(k-2)$-dimensionalen Randzellen von a_i^k und der Zelle a_i^k und mithin zum Wege a_i^k äquivalent. Nach dem Randbüschelaxiom folgen also die höheren Eckrelationen aus den ersten Eckrelationen. Ferner folgt: die Wegegruppe eines n-dimensionalen Komplexes, der den drei angegebenen Axiomen genügt und nur eine n-dimensionale Zelle enthält, ist die Identität. Damit ist übrigens keineswegs gesagt, daß die Wegegruppe des Randes einer Zelle die Identität sein müßte.

Zum Schluß noch einige Fragen: man kann aus den Eckrelationen zwischen den g_{ij}^k und den g_{lm}^{k-1} die g_{lm}^{k-1} oder die g_{ij}^k eliminieren; es bleiben dann gewisse Relationen zwischen den g_{ij}^k oder den g_{lm}^{k-1} allein bestehen, und man kann fragen, unter welchen Bedingungen dies die definierenden Relationen für die g_{ij}^k bzw. die g_{lm}^{k-1} sind. Eine andere Aufgabe bietet das Verhalten der Wegegruppe bei Unterteilung des Komplexes. Beide Fragen hängen von der Beziehung zwischen der Wegegruppe einer Zelle mit der Wegegruppe ihres Randes ab.

(Eingegangen am 3. April 1935.)

Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises.

Von

H. Gericke in Freiburg i. B.

Im folgenden werden einige, meist bekannte Sätze über Kreiseigenschaften auf neuem Wege hergeleitet. Es handelt sich in § 1 um die von H. Hombu[1]) bewiesene Eigenschaft des Kreises, mit einer kongruenten Kurve stets dann zusammenzufallen, wenn er mit ihr entweder drei Punkte oder drei Stützgeraden gemeinsam hat. Beides erweist sich als Folge voneinander, mittels der anschaulich evident erscheinenden Tatsache, daß zwei konvexe Kurven im allgemeinen ebensoviel gemeinsame Punkte wie gemeinsame Stützgeraden haben. § 2 handelt von Sehnen konstanter Länge. J. Hirakawa[2]) bewies, daß der Kreis dadurch charakterisiert ist, daß Sehnen konstanter Länge stets entweder gleichen Flächeninhalt oder gleiche Bogenlänge abschneiden. E. Salkowski[3]) wies beide Bedingungen als gleichwertig nach und zeigte ferner, daß man diese Bedingungen weiter auflockern kann, indem man nicht von Sehnen aller Längen, sondern nur von drei Scharen solcher, die miteinander ein festes Dreieck bilden, die genannten Eigenschaften zu verlangen. braucht, um die Kurve als Kreis zu erweisen. Diese Ergebnisse lassen sich in Vektorschreibweise sehr einfach gewinnen.

§ 1.

Sätze von Hombu.

1. C_1, C_2 seien die Randkurven zweier ebener konvexer Bereiche, die mindestens einen inneren Punkt gemeinsam haben. Wir verabreden, die möglicherweise auf derselben gemeinsamen Stützgeraden an C_1 und C_2 liegenden unendlich vielen gemeinsamen Punkte von C_1 und C_2 (d. h. ein gemeinsames geradliniges Stück) als nur einen Punkt, und die möglicherweise durch einen Punkt (gemeinsame Ecke) gehenden unendlich vielen gemeinsamen Stützgeraden als nur eine zu zählen. *Dann läßt sich jedem*

[1]) Tôh. Math. Journ. **33**, 72, 1930. Bezüglich dreier Punkte bewies M. Fujiwara diesen Satz in einer Vorlesung an der Tôhoku Imperial University 1914 unter der Voraussetzung stetiger Krümmung. Den ersten allgemeinen Beweis gab T. Kubota, Tôh. Math. Journ. **21**, 21, 1922.

[2]) Tôh. Math. Journ. **37**, 175, 1933.

[3]) Sitzungsber. d. Heidelberger Akademie 14. Abh., 1934.

gemeinsamen Punkt eine gemeinsame Stützgerade eindeutig zuordnen und umgekehrt. Die Anzahl der gemeinsamen Punkte und gemeinsamen Stützgeraden ist gleich, wenn sie endlich ist.

Benutzt wird: Der Rand H der konvexen Hülle von C_1 und C_2 besteht aus Teilen von C_1 und C_2 und geradlinigen Stücken, die auf gemeinsamen Stützgeraden zu C_1 und C_2 liegen.

a) Jedem gemeinsamen Punkt läßt sich eine gemeinsame Stützgerade eindeutig zuordnen: Von einem gemeinsamen Innenpunkt 0 aus ziehe ich die Strahlen durch die gemeinsamen Punkte S_i von C_1 und C_2. Sie treffen H in P_i. Die Stützgeraden an H durch P_i sind die gesuchten. Zum Beweis der Eindeutigkeit ist noch zu zeigen, daß keine zwei dieser Strahlen dasselbe geradlinige Stück von H treffen.

Seien Q_1, Q_2 die Berührungspunkte des betreffenden geradlinigen Stückes mit C_1 bzw. C_2. Würden zwei Punkte P_i, P_j zwischen Q_1, Q_2 fallen (P_i näher an Q_1), so müßte die Gerade S_iS_j die Gerade Q_1Q_2 zwischen P_i und Q_1 schneiden, da Q_1, S_i, S_j zu C_1 gehören, aber kein Punkt von S_iP_i zu C_1 gehört. Andererseits müßten dieselben Geraden sich zwischen P_j und Q_2 schneiden. Also müßte S_i mit P_i und zugleich S_j mit P_j zusammenfallen; dann lägen aber S_i und S_j auf einem gemeinsamen geradlinigen Stück von C_1 und C_2, was als nur ein Punkt gezählt werden sollte.

b) Jeder gemeinsamen Stützgeraden läßt sich eindeutig ein gemeinsamer Punkt zuordnen: Berührt eine gemeinsame Stützgerade C_1 und C_2 in einem gemeinsamen Punkt, so wird ihr dieser zugeordnet. Sonst enthält sie ein geradliniges Stück von H: Q_1Q_2, wobei wieder Q_i zu C_i gehöre. Diesem kann auf folgende Weise eindeutig ein gemeinsamer Punkt von C_1, C_2 zugeordnet werden: Ich verbinde einen gemeinsamen Innenpunkt 0 mit einem variablen Punkt P auf Q_1Q_2. $t = Q_1P$ sei Parameter, R_i ($i = 1, 2$) sei der Schnittpunkt von OP mit C_i, die Länge $OR_i = \varrho_i(t)$. $\varrho_1(t) - \varrho_2(t)$ ist > 0 für $t = 0$, < 0 für $t = Q_1Q_2$, hat also in diesem Intervall mindestens eine Nullstelle.

Daß demselben geradlinigen Stück nur ein Schnittpunkt entsprechen kann, wurde bereits gezeigt (1a). Daß nicht zwei geradlinige Stücke auf denselben Schnittpunkt führen, folgt daraus, daß ein Strahl von einem Innenpunkt aus die konvexe Hülle nur einmal schneidet.

2. Satz von Fujiwara: C sei eine geschlossene konvexe Kurve, aber kein Kreis. Dann gibt es eine zu C kongruente Kurve C^*, so daß C und C^* mindestens vier Punkte gemeinsam haben, aber nicht zusammenfallen.

Sei K ein Kreis, dessen Mittelpunkt M innerhalb C liegt, der C in mindestens zwei Punkten berührt, aber nicht ins Innere von C eindringt.

Einen solchen Kreis gibt es stets. Sein Radius sei r, $\varrho(\varphi)$ sei der Abstand von M von demjenigen Punkt P von C, für den MP mit einer festen Richtung den Winkel φ bildet. Dann hat $d(\varphi) = r - \varrho(\varphi) \geqq 0$ zwischen $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ mindestens zwei Nullstellen α, β. Da C mit K nicht zusammenfällt, kann vorausgesetzt werden, daß für hinreichend und beliebig kleines $\varepsilon > 0$, $d(\alpha + \varepsilon) > 0$ und $d(\beta - \varepsilon) > 0$ ist. Für einen geeigneten Wert ε betrachte ich die Funktion $d^*(\varphi) = d(\varphi - \varepsilon)$, die der Drehung von C um ε entspricht. Dann ist für

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha, \quad \alpha + \varepsilon, \quad \beta, \quad \beta + \varepsilon, \\ d^* - d &\geqq 0, \quad < 0, \quad > 0, \quad \leqq 0. \end{aligned}$$

$d^* - d$ hat also mindestens vier Nullstellen, davon mindestens drei, zwischen denen es nicht überall $= 0$ ist. Diese drei können nicht auf einer Geraden liegen; denn diese Gerade müßte zu C und C^* gehören, also längs ihr $d^* - d$ überall $= 0$ sein.

3. Aus diesem Satz von Fujiwara folgt sofort der dritte Satz von Hombu: Wenn eine gegebene konvexe Kurve mit einer zu ihr kongruenten zusammenfällt, wenn beide gleichzeitig demselben Dreieck ein- oder anbeschrieben sind, muß sie ein Kreis sein.

Wäre die Kurve C kein Kreis, so könnte man sie in eine solche Lage C^* drehen, daß C und C^* mindestens vier Punkte, von denen drei nicht auf einer Geraden liegen, gemeinsam haben, ohne zusammenzufallen. Nach 1a haben sie dann mindestens drei gemeinsame Stützgeraden. Ebenso läßt sich umgekehrt der Satz von Fujiwara aus diesem folgern.

§ 2.

Sehnen konstanter Länge.

Die konvexe Kurve C wird im folgenden als differenzierbar vorausgesetzt.

1. Wenn die Sehnen der konstanten Länge 1 stets gleiche Bogenstücke abschneiden, so schneiden sie gleichen Flächeninhalt ab und umgekehrt.

C sei gegeben durch $\mathfrak{x}(t)$, wobei t der Winkel der Tangente mit einer festen Richtung sei. Die Sehne sei $PQ = \mathfrak{x}(t_1) - \mathfrak{x}(t_2) = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$. $'$ bezeichne die Ableitung nach t, und es sei zur Abkürzung $\frac{dt_2}{dt_1} = k$ gesetzt. Ist $(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)^2 = \text{const}$, so ist also

$$(\mathfrak{x}_1' - \mathfrak{x}_2' k)(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2) = 0. \tag{1}$$

Die von PQ abgeschnittene Bogenlänge ist

$$b = \int_P^Q \sqrt{\mathfrak{x}'^2}\, dt.$$

Soll $b = \text{const}$ sein, so folgt $\mathfrak{x}_1'^2 = \mathfrak{x}_2'^2 \cdot k^2$ oder

$$(\mathfrak{x}_2' + \mathfrak{x}_2' \cdot k)\,(\mathfrak{x}_1' - \mathfrak{x}_2' \cdot k) = 0. \tag{2}$$

Der doppelte von PQ abgeschnittene Flächeninhalt ist

$$F = \int_P^Q (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}')\,dt - (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2).$$

Soll $F = \text{const}$ sein, so folgt

$$\begin{gathered}(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2' \cdot k) - (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1') - (\mathfrak{x}_1', \mathfrak{x}_2) - (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2' \cdot k) = 0, \\ (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{x}_2' \cdot k + \mathfrak{x}_1') = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Aus (1) und (2) folgt: $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2$ ist parallel $\mathfrak{x}_1' + \mathfrak{x}_2' \cdot k$, also (3), umgekehrt folgt (2) aus (1) und (3).

2. Wenn sich in einer konvexen Kurve C ein festes Dreieck so bewegen läßt, daß die Seiten stets konstante Bogenlänge abschneiden, so ist C ein Kreis.

$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ seien die Vektoren zu den Ecken des Dreiecks, $\mathfrak{m}$ der Vektor zum Mittelpunkt M des ihm umbeschriebenen Kreises und die Vektoren ξ_i seien definiert durch die Gleichungen

$$\mathfrak{x}_i = \mathfrak{m} + \xi_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Es sind also alle $|\xi_i| = r = \text{const}$. Sei

$$\xi_i = (r \cdot \cos \varphi_i,\quad r \cdot \sin \varphi_i),$$

wobei φ_i der Winkel von ξ_i gegen eine feste Richtung sei, dann ist $\xi_i'^2 = r^2 \varphi_i'^2$. ($'$ bezeichnet hier die Änderung der betreffenden Größen bei Drehung des Dreiecks.) Nun ist $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \text{const}$, also $\varphi_i' = \varphi_{i+1}'$, somit

$$\xi_i'^2 = \xi_{i+1}'^2. \tag{5}$$

Nach (2) muß $\mathfrak{x}_i'^2 = \mathfrak{x}_{i+1}'^2$ sein. Wegen (4) und (5) ergibt sich daraus

$$\mathfrak{m}'(\xi_i' - \xi_{i+1}') = 0,$$

d. h. $\mathfrak{m}'$ müßte auf den drei Richtungen $\xi_1' - \xi_2'$, $\xi_2' - \xi_3'$, $\xi_3' - \xi_1'$ zugleich senkrecht stehen. Also muß $\mathfrak{m}' = 0$ sein, d. h. der Punkt M bleibt fest, von diesem hat aber jeder Punkt von C den festen Abstand r, d. h. C ist ein Kreis.

(Eingegangen am 5. April 1935.)

Über einen Konvergenzsatz des Herrn Knopp.

Von

J. Karamata in Beograd.

1. Die für die Konvergenz der Reihe Σu_ν notwendige Kroneckersche Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu p_\nu = o(p_n), \quad n \to \infty, \tag{1}$$

wurde von Knopp[1]) auch als hinreichend erwiesen und der folgende Satz gegeben:

Satz 1. *Die Gültigkeit von* (1) *für jede p-Folge*

$$0 < p_{n-1} \leqq p_n \to \infty, \quad n \to \infty$$

ist zur Konvergenz der Reihe Σu_ν *notwendig und hinreichend.*

Hier möchte ich auf einen zweiten Beweis dieses Satzes hinweisen, indem ich einen allgemeineren Satz beweise, aus welchem sich im gewissen Sinne der Knoppsche Satz als Grenzfall ergibt, und durch den der Zusammenhang zwischen der Bedingung (1) und der Konvergenz der Reihe Σu_ν etwas näher ersichtlich wird. Dieser Satz lautet:

Satz 2. *Die Bedingung* (1) *ist für eine gegebene p-Folge mit der nachstehenden vollständig äquivalent*

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'} u_\nu \to 0, \quad \textit{für jedes } n': \; p_n \leqq p_{n'} \leqq \lambda p_n, \; \lambda > 1, \; n \to \infty. \tag{2}$$

Daraus geht unmittelbar hervor, daß das Vorhandensein von (1) für jede p-Folge mit der Cauchyschen Konvergenzbedingung

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'} u_\nu \to 0, \quad \text{für jedes} \quad n' \geqq n \to \infty$$

äquivalent ist, was den Knoppschen Satz liefert[2]).

---

[1]) K. Knopp, Über eine Kroneckersche Konvergenzbedingung, Sitzungsber. der Berl. Math. Ges. 24 (1925), S. 3—5.

[2]) Übrigens ist für den Beweis des Satzes 1 nur eine Hälfte des Satzes 2 notwendig, nämlich, daß (2) aus (1) folgt. Dies kann, nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Knopp, direkt wie folgt gezeigt werden:

Aus (1), d. h. aus

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu p_\nu = p_n \delta_n, \quad \delta_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

folgt, durch Abelsche partielle Summation, daß

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'} u_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n'} \frac{p_{\nu+1} - p_\nu}{p_{\nu+1}} \delta_\nu - \frac{p_\nu}{p_{n+1}} \delta_n + \frac{p_{n'}}{p_{n'+1}} \delta_{n'},$$

Ist nämlich $n+1<k_n<k_{n+1}$ und $N(n)$ die Anzahlfunktion der Folge K_n welche durch die Beziehung

$$K_{n+1}=k_{K_n},\quad K_1=k_1\quad n=1,2,3,\ldots,$$

gegeben ist, so ist

$$N(k_n)=1+N(n),$$

wie dies aus

$$K_{N(n)}\leqq n<K_{N(n)+1}$$

und deren Folgerung

$$K_{N(n)+1}=k_{K_{N(n)}}\leqq k_n<k_{K_{N(n)+1}}=K_{N(n)+2}$$

zu ersehen ist.

Wird also $p_n=\lambda^{N(n)}$ gesetzt, so folgt aus (2), daß

$$\sum_{\nu=n+1}^{k_n}u_\nu\to 0,\quad n\to\infty,$$

für irgendeine k-Folge, d. h. für ein beliebiges n'.

2. Den Satz 2 leite ich aus dem Spezialfall $p_n=n$ ab, indem ich die ihm entsprechende Formel (1) in der Integralform

$$\int_0^x t\,d\{s(t)\}=o(x),\quad x\to\infty$$

schreibe (mit

$$(3)\qquad s(t)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad 0\leqq t<1,\\ \sum_{\nu=1}^{n}u_\nu & ,,\quad n\leqq t<n+1,\quad n=1,2,3,\ldots)\end{cases}$$

und den folgenden Satz beweise:

Satz I. *Sei $s(t)$ von beschränkter Schwankung in $0\leqq t\leqq x$, $x>0$; aus*

$$(4)\qquad \int_0^x t\,d\{s(t)\}=o(x),\quad x\to\infty$$

folgt

$$(5)\qquad s(x')-s(x)\to 0,\quad \textit{für}\quad x\leqq x'\leqq\lambda x\to\infty,\quad \lambda>1,$$

und umgekehrt.

Beweis. a) Aus (4), d. h. aus

$$\int_0^x t\,d\{s(t)\}=x\,\delta(x)\quad\text{mit}\quad\delta(x)\to 0,\quad x\to\infty$$

---

also, wenn $\delta_n'=\operatorname{Max}_{n\geqq\nu}|\delta_n|$ gesetzt wird,

$$\Big|\sum_{\nu=n+1}^{n'}u_\nu\Big|\leqq\delta_n'\lg\frac{p_{n'}}{p_n}+o(1)=o(1),$$

sofern $p_{n'}=O(p_n)$, $n\to\infty$, ist.

folgt

$$s(x) = \delta(x) + \int_0^x \frac{\delta(t)}{t}\, dt,$$

woraus (5) leicht zu erhalten ist.

b) Aus (5) ergibt sich speziell

(6) $\quad s(ux) - s(x) \to 0$, für jedes u: $1 \leqq u \leqq \lambda$, $x \to \infty$ [3]).

Daraus folgt, daß die Funktion $s(x)$ von der Gestalt

(7) $$s(x) = C(x) + \int_0^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt$$

ist, wo $\lim_{x=\infty} C(x)$ vorhanden ist und $\varepsilon(t) \to 0$, $t \to \infty$, wenn $s(x) = \log v(x)$ gesetzt wird, und der folgende Satz [4]) angewendet wird:

Aus

$$\frac{v(ux)}{v(x)} \to 1, \quad \textit{für jedes } u\text{:} \quad 1 \leqq u \leqq \lambda, \quad x \to \infty,$$

folgt

$$v(x) = c(x)\, e^{\int_0^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt},$$

mit $c(x) \to c > 0$ *und* $\varepsilon(x) \to 0$, $x \to \infty$.

Also ist nach (7)

$$\int_0^x t\, d\{s(t)\} = \int_0^x t\, d\{C(t)\} + \int_0^x \varepsilon(t)\, dt = o(x), \quad x \to \infty,$$

was zu beweisen war.

Sei nun $p(x)$ eine für $x \geqq 0$ stetige, nicht abnehmende, gegen Unendlich wachsende Funktion und $d(x)$ ihre Inverse. Wird darauf der Satz I auf die Funktion $s\{d(\tau)\}$ angewendet, so folgt, nachdem die Substitution $t = d(\tau)$ ausgeführt wird, ohne weiteres der folgende

Satz II. *Sei für* $x \geqq 0$, $s(t)$ *von beschränkter Schwankung in* $o \leqq t \leqq x$, $p(t)$ *für* $t \geqq o$ *stetig und*

$$0 < p(y) \leqq p(x) \to \infty \quad \textit{für} \quad y \leqq x \to \infty;$$

aus

$$\int_0^x p(t)\, d\{s(t)\} = o\{p(x)\}, \quad x \to \infty$$

---

[3]) Da (4) schon aus (6) gefolgert wird, so ist auch die geringere Voraussetzung (6) mit (5) äquivalent.

[4]) Siehe J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. Bull. de la Soc. Math. de France **61** (1933), S. 4—5.

folgt

$$s(x') - s(x) \to 0 \quad \textit{für jedes } x': \quad x \leqq x' \leqq d\{\lambda p(x)\}, \quad \lambda > 1, \quad x \to \infty,$$

und umgekehrt.

Aus diesem Satz folgt endlich der Satz 2, indem

$$p_n = p(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und an Stelle von $s(t)$ die Funktion (3) gesetzt wird, da

$$\int_0^n p(t)\, d\{s(t)\} = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu u_\nu$$

ist und $p(t)$ nicht abnimmt.

3. Die Sätze 2, I und II sind auch von gewissem Interesse bei den Inversionssätzen der Limitierungsverfahren, da sie die Äquivalenz gewisser Konvergenzbedingungen vom o-Typus dieser Inversionssätze ergeben.

So hat z. B. R. Schmidt[5]) als Verallgemeinerung der Tauberschen Konvergenzbedingung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu = o(n), \quad n \to \infty$$

des A-Verfahrens, die Konvergenzbedingung der Form

$$s_{n'} - s_n \to 0, \quad n' = O(n), \quad n \to \infty,$$

betrachtet, wobei $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu$ ist; es erweist sich aber aus den vorstehenden Sätzen, daß diese zwei Konvergenzbedingungen tatsächlich untereinander wie auch mit der folgenden

$$s_{[\lambda n]} - s_n \to 0, \quad \text{für jedes} \quad \lambda > 1, \quad n \to \infty,$$

äquivalent sind.

Ähnliche Bemerkungen können zu den Konvergenzbedingungen der allgemeineren Form (1) oder (2) gestellt werden; so ist z. B. die Konvergenzbedingung vom o-Typus des B-Verfahrens

$$s_{n'} - s_n \to 0, \quad n' = n + O(\sqrt{n}), \quad n \to \infty,$$

äquivalent mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} e^{\sqrt{\nu}} u_\nu = o(e^{\sqrt{n}}), \quad n \to \infty.$$

Es bleibt noch die Frage, ob auch eine entsprechende Analogie bei den Konvergenzbedingungen vom O-Typus vorhanden ist. Diesbezüglich könnte noch folgendes bemerkt werden.

---

[5]) R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 89—152.

Ich zeigte[6]), daß aus der A-Limitierbarkeit der Reihe Σu_ν die Konvergenz folgt, falls eine (C, 1)-limitierbare Folge M_n existiert, derart daß

$$|n\,u_n| \leqq M_n \quad \text{für jedes} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

gilt, d. h. falls „$n\,u_n$ (C, 1)-majorabel ist".

Die (C, 1)-Majorabilität stellt also eine Konvergenzbedingung dar, die vom O-Typus ist, da sie die Konvergenzbedingung $u_n = O(1/n)$ als Spezialfall enthält.

Andererseits ist die (C, 1)-Majorabilität in der Schmidtschen Konvergenzbedingung vom O-Typus

$$s_{n'} - s_n \to 0, \quad \text{für jedes} \quad n' \sim n \to \infty,$$

enthalten. Es scheint aber, daß diese beiden Konvergenzbedingungen doch nicht äquivalent sind; wäre dies der Fall, so hätte man zu den Konvergenzbedingungen vom O-Typus in der (C, 1)-Majorabilität das Analogon der Kroneckerschen Bedingung.

---

[6]) J. Karamata, Théorèmes inverses de sommabilité, II, „Glas" de l'Acad. serbe, CXLIII (70) (1931), S. 143 oder in etwas allgemeinerer Form: Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze ..., Journ. f. die reine und angew. Math. 164 (1931), S. 30, Zitat 11.

(Eingegangen am 20. April 1935.)

Zum Momentenproblem für das Intervall [0, 1]*).

Von

Uwe Timm Bödewadt aus Kiel.

Einleitung.

Aus der Folge der Stieltjesschen Integrale

$$\mu_k = \int_a^b x^k \cdot d\chi(x) \quad [k = 0, 1, 2, \ldots],$$

den „Momenten" der „Belegungsfunktion" $\chi(x)$, die im Integrationsintervall definiert und von beschränkter Schwankung sei, diese Belegungsfunktion zu bestimmen: das ist das Momentenproblem. Für das Intervall $[0, \infty)$ wurde es von Stieltjes[1]) gestellt und durch seine Theorie der Stieltjesschen Kettenbrüche gelöst. Für das endliche Intervall [0, 1] hat F. Hausdorff[2]) die auch hier brauchbare Methode von Stieltjes durch eine wesentlich einfachere ersetzt, die auch in der Begründung nicht „jenen umfänglichen algebraischen und funktionentheoretischen Apparat" erfordert. Stieltjes nähert die gesuchte Belegungsfunktion $\chi(x)$ durch Treppenfunktionen $\chi_p(x)$ an, die mit wachsendem Index p eine wachsende Zahl anfänglicher Momente *genau* wiedergeben. Die Sprungstellen dieser Treppenfunktionen sind die Nullstellen der Nenner, und die zugehörigen Sprünge die Zähler in der Teilbruchzerlegung der Näherungsbrüche einer Kettenbruchentwicklung für die Funktion

$$\int_a^b \frac{d\chi(x)}{z - x} \sim \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} + \cdots.$$

Die Treppenfunktionen dagegen, die Hausdorff zur Näherung benutzt, geben die Anfangsmomente *nicht* genau wieder: erst in der Grenze, wenn die Näherungsfunktionen gegen die wahre Belegungsfunktion konvergieren, rücken auch die Momente in ihre wahren Werte ein. Die Sprungstellen der Hausdorffschen Treppenfunktionen sind die äquidistanten Teilpunkte

---

*) Diese Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Universität Kiel als Dissertation angenommen.

[1]) T. J. Stieltjes: Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Toulouse 8 (1894), S. 1—122; 9 (1895) S. 1—47. — Vgl. auch O. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1929², bes. Kap. 9, S. 362—419.

[2]) F. Hausdorff: Momentprobleme für ein endliches Intervall, Math. Zeitschr. 16 (1923), S. 220—248.

des Intervalls [0, 1], und die Sprunghöhen bestimmen sich linear aus den Anfangsmomenten.

Hausdorff hat a. a. O. auch noch einige andere Folgen von Näherungsfunktionen für $\chi(x)$ angegeben. Jedoch zeigen sowohl seine Methoden wie die von Stieltjes in praktischen Beispielen oft nur eine langsame Konvergenz. In solchen Fällen ist es zumindest wünschenswert, den nach einer endlichen Zahl von Schritten verbleibenden Fehler bestimmen zu können; indessen ist keine Abschätzung für das Restglied vorhanden. Einer Anregung von Herrn Prof. Kaluza folgend, untersuchte ich daher die Frage, ob man nicht durch ein Kompromiß zwischen der Stieltjesschen und der Hausdorffschen Methode schnellere Konvergenz erreichen könnte, nämlich so, daß bei äquidistanten Sprungstellen die Sprunghöhen durch die Forderung bestimmt wurden, daß die Näherungstreppenfunktionen ein möglichst großes Anfangsstück der Momentenfolge genau wiedergeben sollten. Aber diese Methode erwies sich als divergent, und so wandte ich mich unabhängig von einer bestimmten Methode der allgemeineren Frage zu, wieweit überhaupt eine Belegungsfunktion, die im Intervall [0, 1] erklärt ist, durch ein Anfangsstück ihrer Momentenfolge bestimmt wird. Die vorliegende Abhandlung bringt die Lösung dieser Frage für den Sonderfall einer monotonen Belegungsfunktion.

Zunächst bringt § 1 vorbereitende Tatsachen über monotone Belegungsfunktionen. Dann wird in § 2 der einfachste Fall behandelt, daß nur das Moment 1. Ordnung bekannt ist. Es zeigt sich, daß sämtliche monotonen Belegungsfunktionen mit dem vorgeschriebenen μ_1 zwischen zwei Schranken $v_1(x)$, $w_1(x)$ verlaufen müssen; und daß diese Schranken zugleich die genauen Grenzen sind: zu jedem ihrer Punkte gibt es *eine* Treppenfunktion mit dem richtigen μ_1, die diesen Punkt der Begrenzungsfunktion erreicht. Dies Ergebnis läßt sich dann verallgemeinern auf den Fall, daß die Momente bis einschließlich μ_p bekannt sind: die Existenz von Randfunktionen $v_p(x)$, $w_p(x)$ wird erschlossen, und es werden die Treppenfunktionen (mit den richtigen Momenten $\mu_0, \ldots, \mu_p$) gekennzeichnet, die vermutlich diese Randfunktionen erreichen werden. Diese „zu p gehörigen Treppenfunktionen" werden in zwei Gruppen geschieden: solche „von erster Art", die bei $x = 1$ keinen Sprung haben, und solche „von zweiter Art", die dort springen. In § 3 wird darauf die Vermutung bewiesen, daß diese Treppenfunktionen die Randfunktionen erreichen und mithin zu deren Berechnung tauglich sind.

Die Berechnung der Treppenfunktionen erfolgt in den § 4 bis 8 — wobei § 5 nur den Beweis einer Determinantengleichung bringt, den kürzer zu fassen mir leider nicht gelang —; § 10 bringt ein notwendiges Kriterium für die Anwendung der in den § 4 bis 8 entwickelten Formeln,

§ 9 ist die Vorbereitung dazu. In § 11 werden die Formeln für die Berechnung der Randkurven zusammengestellt, die fertigen Lösungen für $p = 1, 2, 3$ angegeben und ein Beispiel durchgerechnet. Zum Schluß wird noch auf Beziehungen zur Stieltjesschen Theorie hingewiesen.

§ 1.

Grundeigenschaften monotoner Belegungsfunktionen und ihrer Momente.

Vorerst seien die wichtigsten Eigenschaften der Momentfolgen zusammengestellt, die zu monotonen Belegungsfunktionen im Intervall [0, 1] gehören.

Entscheidend dafür, ob zu einer Momentenfolge $\mu_0, \mu_1, \ldots$ eine monotone Belegungsfunktion gehört, ist nach Stieltjes, ob gewisse Hankelsche Determinanten positiv sind. Kaluza[3]) hat für die aus der Folge $\mu_0, \mu_1, \ldots$ gebildete α-reihige Hankelsche Determinante, in deren Nebendiagonale das Element μ_β steht, die Bezeichnung $K^\alpha \mu_\beta$ eingeführt. Solange diese „Krümmungen“[3]) von der fest gegebenen Folge μ_k gebildet werden, will ich sie kürzer durch K^α_β bezeichnen[4]). K^r_r, K^{r+1}_r nenne ich die Hauptkrümmungen. Die Stieltjesschen Bedingungen bestehen darin, daß die Hauptkrümmungen nichtnegativ (bzw. positiv) sein müssen[5]). Ist dies der Fall, so heißt die Momentenfolge vollkonvex (bzw. wesentlich vollkonvex)[6]).

Damit zu der Momentenfolge $\mu_0, \mu_1, \ldots$ eine in dem Intervall [0, 1] monotone, außerhalb konstante Belegungsfunktion gehöre, fand Hausdorff[7]) als notwendige und hinreichende Bedingung, daß sämtliche Differenzen $\Delta^n \mu_k \geqq 0$ seien $[n \geqq 0,\ k \geqq 0]$. Eine solche Folge heißt vollmonoton. Vollmonotonie ist also mehr als Vollkonvexität. Wenn aber eine endliche Anzahl von Momenten gegeben ist: $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p$, so ist die Forderung an das nächste Moment, daß die $\Delta^{p+1-\lambda} \mu_\lambda \geqq 0$ seien $[\lambda = 0, 1, \ldots, p+1]$,

[3]) Th. Kaluza: Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 161—170; bes. S. 166.

[4]) Für $\alpha = 0$ ist als Wert des Zeichens 1 festzusetzen. Das Zeichen ist also nur für $0 \leqq \alpha \leqq \beta + 1$, $0 \leqq \beta$ erklärt.

[5]) Die Notwendigkeit dieser Bedingung ergibt sich auch aus der Darstellung

$$(\alpha+1)! \cdot K^{\alpha+1}_\beta = \int_0^1 \cdots \int_0^1 u_0^{\beta-\alpha} \cdots u_\alpha^{\beta-\alpha} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ u_0 & \ldots & u_\alpha \\ \vdots & & \vdots \\ u_0^\alpha & \ldots & u_\alpha^\alpha \end{vmatrix}^2 \cdot d\chi(u_0) \ldots d\chi(u_\alpha),$$

die sich aus dem z. B. M. A. 69 (1910) S. 231 formulierten Satz herleitet, denn der Integrand ist nichtnegativ, die Belegungsfunktionen sind nichtfallend, also muß die linke Seite auch nichtnegativ sein. — Vgl. auch Hausdorff a. a. O.[2]), S. 223, Anm. 5.

[6]) Kaluza a. a. O.[3]), S. 169.

[7]) A. a. O.[2]), S. 223, Bedingung (A).

nur eine notwendige und keine hinreichende Bedingung dafür, daß sich durch weitere Fortsetzung eine vollmonotone Folge bilden lasse. Dagegen ist durch die Forderung, daß [für $p = 2r - 1$] K_r^{r+1} oder [für $p = 2r$] $K_{r+1}^{r+1} \geqq 0$ sei, die genaue untere Grenze für μ_{p+1} festgelegt[8]). Die obere findet man, da die Folge der Differenzen $\Delta \mu_k$ ebenfalls vollmonoton und mithin vollkonvex ist, aus der Forderung, daß [für $p = 2r - 1$] $K^r \Delta \mu_r$ oder [für $p = 2r$] $K^{r+1} \Delta \mu_r \geqq 0$ sein sollen. Ich will fortan $K^\alpha \Delta \mu_\beta$ mit L_β^α[9]) [und entsprechend $K^\alpha \Delta^2 \mu_\beta$ mit M_β^α[9])] bezeichnen: dann ist die obere Grenze für μ_{p+1} also durch $L_r^r = 0$ [$p = 2r - 1$] oder $L_r^{r+1} = 0$ [$p = 2r$] gegeben[10]).

In der Folge der Hauptkrümmungen K_0^0, K_0^1, K_1^1, K_1^2, K_2^2, ... und ebenso in der Folge L_0^0, L_0^1, ... heißt die spätere von zwei Hauptkrümmungen die höhere.

Hat die Belegungsfunktion die Form einer Treppenfunktion mit r Sprüngen, so ist $K_r^{r+1} = 0$[11]). Liegt von diesen r Sprüngen einer bei 0, so ist schon $K_r^r = 0$. Liegen $r - 1$ Sprünge im Innern des Intervalls, einer bei 1, so verschwindet L_{r-1}^r. Liegt ein Sprung bei 0, einer bei 1 und die anderen $r - 2$ dazwischen, so wird bereits $L_{r-1}^{r-1} = 0$. Sämtliche höhereren Hauptkrümmungen verschwinden ebenso.

Hat also eine monotone Treppenfunktion nur r in (0, 1) gelegene Sprünge, so ist ihr μ_{2r} kleiner als das jeder anderen monotonen Belegungsfunktion, die in den Momenten $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{2r-1}$ mit ihr übereinstimmt; hat sie einen Sprung bei 0 und $r - 1$ Sprünge innerhalb (0, 1), so ist ihr μ_{2r-1} minimal; springt sie einmal bei 1 und $r - 1$ mal zwischen 0 und 1, so ist ihr μ_{2r} maximal, und wenn sie $r - 2$ Sprünge im Innern von (0, 1) macht und je einen bei 0 und bei 1, so hat ihr μ_{2r-1} den

---

[8]) Denn die Ableitung von K_r^{r+1} nach μ_{2r} ist K_{r-1}^r, also positiv; mithin darf μ_{2r} nicht kleiner werden, als daß $K_r^{r+1} = 0$, da dieses sonst negativ würde. Diese untere Schranke wird andererseits wirklich erreicht, denn es gibt monotone Treppenfunktionen mit den Momenten $\mu_0, \ldots, \mu_{2r-1}$ und $K_r^{r+1} = 0$: die Sonderfunktionen 1. Art zu $2r - 1$ (s. u. § 2, § 4, § 6). Entsprechendes gilt für K_{r+1}^{r+1}.

[9]) Vgl. Anm. 4.

[10]) Vgl. Anm. 8; wenn $\Delta \mu_{p-1}$ seinen kleinsten Wert hat, so hat μ_p (bei festgehaltenen $\mu_0, \ldots, \mu_{p-1}$) seinen größten Wert.

[11]) Die Momente sind dann Summen gleicher Potenzen der r Sprungstellen; K_r^{r+1} läßt sich so in r^{r+1} Summanden zerlegen, daß in jeder der $r + 1$ Spalten nur noch die Potenzen einer der r Sprungstellen stehen; jeder dieser Summanden muß dann verschwinden, da mindestens zwei Spalten einander proportional sind. — Bedenkt man noch, daß ein bei $x = 0$ liegender Sprung nur in μ_0 vorkommt, daß weiter ein bei $x = 1$ liegender in allen Momenten in gleicher Stärke auftritt, mithin in den Differenzen $\Delta \mu_k$ gar nicht mehr, so ergeben sich auch die anderen Behauptungen. — Übrigens gilt dieser Absatz auch für nichtmonotone Funktionen.

größten Wert, der einer monotonen Belegungsfunktion bei Festhaltung von $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{2r-1}$ möglich ist.

Umgekehrt: ist $K_r^{r+1} = 0$, so kann $\chi(x)$ auch höchstens r Wachstumsstellen zwischen 0 und 1 haben[12]). Ist $K_r^r = 0$, so können bis zu $r-1$ Sprünge innerhalb $(0, 1)$ liegen und außerdem einer bei 0, im übrigen muß $\chi(x)$ konstant sein usw. Zu einer nicht-wesentlich vollkonvexen Momentenfolge gehört immer eine Treppenfunktion mit nur endlich vielen Wachstumsstellen, und umgekehrt; die Belegungsfunktion ist also in diesem Falle schon durch ein Anfangsstück der Momentenfolge vollkommen bestimmt. Für die folgenden Untersuchungen dürfen wir somit voraussetzen, daß die Momentenfolge, soweit wir sie jeweils zu betrachten haben, wesentlich vollkonvex sei. Die andernfalls notwendigen Änderungen sind leicht zu ersehen.

Hausdorff hat unabhängig von seiner und der Stieltjesschen Methode bewiesen, daß, wenn eine vorgelegte Folge $\mu_0, \mu_1, \ldots$ überhaupt als Momentenfolge aufgefaßt werden kann[13]), das zugehörige Momentenproblem eindeutig lösbar ist, wofern es sich um ein endliches Intervall handelt, eine noch freibleibende additive Konstante durch die Forderung $\chi(0) = 0$ normiert wird und eine Regelung darüber getroffen wird, welcher Wert der Belegungsfunktion an einer Sprungstelle zugeschrieben werden soll[14]). Hierfür wählt er die gebräuchliche Festsetzung $2\chi(x) = \chi(x-0) + \chi(x+0)$. Ich setze dies Ergebnis im Folgenden voraus, ändere aber die letzte Regelung dahin ab, daß ich der Belegungsfunktion an einer Sprungstelle die Gesamtheit der Werte zwischen den beiderseitigen Grenzwerten zuschreibe, also die Sprungstrecke ausziehe. Das ist offenbar erlaubt.

§ 2.

Der einfachste Fall: $p = 1$. Grenzen für $\chi(x)$ aus $\mu_0, \ldots \mu_p$: $v_p(x) \geqq \chi(x) \geqq w_p(x)$. Die Sonder- und die Treppenfunktionen erster und zweiter Art zu gegebenem p.

Es seien zum Beispiel μ_0, μ_1 vorgegeben. μ_0 allein schränkt die Belegungsfunktion nur dahin ein, daß sie in dem Rechteck $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq \chi(x) \leqq \mu_0$ verlaufen muß. Bedeutungsgemäß ist

$$\mu_1 = \int_0^1 u \cdot d\chi(u) = \int_0^x u \cdot d\chi(u) + \int_x^1 u \cdot d\chi(u) \quad [0 \leqq x \leqq 1].$$

[12]) Folgt aus der in Anm. 5 genannten Integraldarstellung: der Integrand hat nur r Nullstellen, ist sonst positiv; soll das Integral verschwinden, so müssen alle Wachstumsstellen der Belegungsfunktion an diesen Nullstellen liegen.

[13]) Kriterium dafür: Hausdorff a. a. O.[2]), S. 232, Bedingung (B).

[14]) A. a. O.[2]), S. 222.

also nach dem Mittelwertsatz

$$\mu_1 = x_1 \cdot (\chi(x) - 0) + x_2 \cdot (\mu_0 - \chi(x)) = \mu_0 \cdot x_2 - \chi(x) \cdot (x_2 - x_1) \qquad [0 \leqq x_1 \leqq x \leqq x_2 \leqq 1].$$

Daraus folgt

$$\chi(x) = \frac{\mu_0 x_2 - \mu_1}{x_2 - x_1}.$$

Es sei jetzt $x \leqq \frac{\mu_1}{\mu_0}$. Dann ist

$$\chi(x) \leqq \frac{\mu_0 \cdot x_2 - \mu_1}{x_2 - x} = \mu_0 - \frac{\mu_1 - \mu_0 x}{x_2 - x} \leqq \mu_0 - \frac{\mu_1 - \mu_0 x}{1 - x} = \frac{\mu_0 - \mu_1}{1 - x}.$$

Dieser Ausdruck ist nur für $0 \leqq x \leqq \frac{\mu_1}{\mu_0}$ kleiner als μ_0. Jetzt sei $x \geqq \frac{\mu_1}{\mu_0}$. Dann ist

$$\chi(x) \geqq \frac{\mu_0 x_2 - \mu_1}{x_2} = \mu_0 - \frac{\mu_1}{x_2} \geqq \mu_0 - \frac{\mu_1}{x} = \frac{\mu_0 x - \mu_1}{x}.$$

Dieser Bruch ist nur für $\frac{\mu_1}{\mu_0} \leqq x \leqq 1$ größer als 0. — Die so berechneten Schranken sind die genauen Grenzen für alle monotonen Belegungsfunktionen, deren erste Momente die Werte μ_0, μ_1 haben, denn unter ihnen gibt es Treppenfunktionen mit zwei Sprüngen, die diese Schranken erreichen. (Vgl. Fig. 1. Die dort gestrichelt eingezogenen Treppenkurven z. B. haben gerade die Momente μ_0, μ_1.) Das ganze Gebiet zwischen den beiden Randkurven

Fig. 1.

$$v_1(x) = \frac{\mu_0 - \mu_1}{1 - x} \left[0 \leqq x \leqq \frac{\mu_1}{\mu_0}\right], \quad = \mu_0 \qquad \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \leqq x \leqq 1\right]$$

$$w_1(x) = 0 \qquad \left[0 \leqq x \leqq \frac{\mu_1}{\mu_0}\right], \quad = \mu_0 - \frac{\mu_1}{x} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \leqq x \leqq 1\right]$$

wird dicht erfüllt von den monotonen Belegungsfunktionen mit den Momenten μ_0, μ_1.

Dies Beispiel läßt sich so verallgemeinern: Die Menge aller monotonen Belegungsfunktionen, die bei 0 den Wert 0, bei 1 den Wert μ_0 haben und außerhalb des Intervalls [0, 1] konstant sind, sei N_0. Fasse ich die Funktionen aus N_0 als Punktmengen auf, so kann ich die Vereinigungsmenge G_0 bilden. Das Gebiet G_0 wird nach oben durch die Kurve $v_0(x) = \mu_0$, nach unten durch die Kurve $w_0(x) = 0$ begrenzt, seitlich von den Ordinaten $x = 0$, $x = 1$. N_1 sei die Teilmenge derjenigen Funktionen aus N_0, bei denen das Moment erster Ordnung die Größe μ_1 hat; G_1 sei die Vereinigungsmenge von N_1. Die obere Randkurve von G_1 ist $v_1(x)$, die untere $w_1(x)$. Es gilt dabei $v_0(x) \geqq v_1(x)$, $w_0(x) \leqq w_1(x)$. N_2 sei die

Teilmenge der Funktionen aus N_1, wo das zweite Moment μ_2 ist, G_2 die Vereinigungsmenge von N_2, $v_2(x)$ die obere und $w_2(x)$ die untere Berandung von G_2 usw. Ich erhalte zwei Folgen von Randkurven: v_0, $v_1, v_2, \ldots$ und $w_0, w_1, w_2, \ldots$; diese Funktionen sind alle monoton in x, und es gilt

$$v_0 \geqq v_1 \geqq v_2 \geqq \ldots \geqq v_k \geqq \ldots \geqq \ldots \geqq w_k \geqq \ldots \geqq w_2 \geqq w_1 \geqq w_0.$$

Sämtliche monotonen Belegungsfunktionen mit den Momenten $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p$ verlaufen also zwischen $v_p(x)$ und $w_p(x)$. In jedem Punkte x ist die Folge der Funktionswerte $v_k(x)$, ebenso die Folge $w_k(x)$ monoton und beschränkt; es müssen also Grenzfunktionen $\lim\limits_{k\to\infty} v_k(x)$ und $\lim\limits_{k\to\infty} w_k(x)$ existieren, und zwischen ihnen müssen alle Lösungen des Momentenproblems $\chi(x)$ verlaufen: $\lim\limits_{k\to\infty} v_k(x) \geqq \chi(x) \geqq \lim\limits_{k\to\infty} w_k(x)$. Da aber das Momentenproblem nur eine Lösung hat, so kann $\lim N_k$ nur aus $\chi(x)$ bestehen, $\lim G_k$ nur aus den Punkten von $\chi(x)$; es ist demnach

$$\lim_{k\to\infty} v_k(x) = \chi(x), \quad \lim_{k\to\infty} w_k(x) = \chi(x).$$

(An einer Sprungstelle x von $\chi(x)$ soll das heißen, daß $\lim\limits_{k\to\infty} v_k$ gleich dem größten und $\lim\limits_{k\to\infty} w_k$ gleich dem kleinsten Wert von $\chi(x)$ an der Sprungstelle ist.)

Existenz und Konvergenz dieser Randkurven sind somit gesichert. Um die Frage, wieweit eine monotone Belegungsfunktion durch endlichviele Anfangsmomente bestimmt sei, zu lösen, müssen wir die Randkurven berechnen können.

Gibt es vielleicht, wie im Fall $p = 1$, immer Belegungsfunktionen, die die Randkurven erreichen, und wie werden diese Funktionen aussehen? Stetige Funktionen werden es kaum sein, da diese sich mehr in der Mitte des Streifens zwischen v_p und w_p halten werden. Im Gegenteil wird eine Belegungsfunktion, die an der Stelle x den Rand erreicht, dort einen Sprung haben und auch in ihrem übrigen Verlauf möglichst unstetig sein, d. h. möglichst große und darum möglichst wenige Sprünge machen. Es wird also eine Treppenfunktion sein, die die Punkte $(0; 0)$ und $(1; \mu_0)$ durch einen Streckenzug aus $p + 3$ abwechselnd senkrechten und waagerechten Strecken verbindet. Diese $p + 3$ Strecken müssen den $p + 3$ Forderungen genügen: Die Momente 0-ter bis p-ter Ordnung sollen die vorgeschriebenen Werte μ_0 bis μ_p haben; die Gesamtlänge der waagerechten Stücke soll 1 sein; ein Sprung soll an der Stelle x liegen.

Diese Treppenfunktionen mögen die zu $\mu_0, \ldots, \mu_p$ gehörigen oder die zu p gehörigen oder kurz die Treppenfunktionen zu p heißen. Unter

ihnen unterscheide ich solche erster Art — das sind die, die bei $(1; \mu_0)$ mit einer waagerechten Strecke enden — und Treppenfunktionen zweiter Art, deren letzte Strecke senkrecht ist. Es kann vorkommen, daß der Wert von x so zu den Werten der Momente stimmt, daß schon eine aus nur $p+2$ Strecken bestehende Treppenfunktion sämtlichen $p+3$ Bedingungen genügt; x ist dann also durch die Momente $\mu_0, \ldots, \mu_p$ bestimmt. Diese Treppenfunktionen will ich die zu p gehörigen Sonderfunktionen nennen[15]). Es kann Sonderfunktionen erster und zweiter Art geben. Die Länge der Strecken einer zu p gehörigen Treppenfunktion muß stetig von x abhängen; jede zu p gehörige Sonderfunktion kann daher sowohl als Grenzfall der Treppenfunktionen erster Art zu p wie auch der zu p gehörigen Treppenfunktionen zweiter Art aufgefaßt werden, indem entweder die letzte oder die erste Strecke der allgemeinen Treppenfunktion 0 wird. Nur über die Sonderfunktionen ist ein stetiger Übergang zwischen den Treppenfunktionen erster und zweiter Art denkbar. (Vgl. Fig. 1. Die dort eingezeichneten Treppenfunktionen der Form ⌐¬ sind die allgemeinen Treppenfunktionen erster Art, die von der Form ⌙⌜ sind die zweiter Art; die so ⌐ aussehende ist die Sonderfunktion erster Art und die von der Gestalt ⌐⌟ die Sonderfunktion zweiter Art.) Nach § 1 haben von allen monotonen Belegungsfunktionen mit den Momenten $\mu_0, \ldots, \mu_p$ die Sonderfunktionen erster Art das kleinste und die zweiter Art das größte μ_{p+1}. Die zu p gehörigen Sonderfunktionen sind zu $p-1$ gehörige allgemeine Treppenfunktionen gleicher Art; und jede zu p gehörige allgemeine Treppenfunktion kann als eine zu $p+1$ gehörige Sonderfunktion aufgefaßt werden, wobei der Wert von μ_{p+1} durch x bestimmt ist.

§ 3.

Beweis, daß die zu p gehörigen Treppenfunktionen — und nur sie — die Grenzen $v_p(x)$ und $w_p(x)$ erreichen.

Wir brauchen für den Beweis, daß die Treppenfunktionen mit den Enden ihrer Sprünge die Randkurven erreichen, einen Sonderfall[16]) eines Satzes von Fejér[17]):

[15]) Über ihre Beziehung zur Stieltjesschen Theorie siehe unten die Anmerkung am Schluß.

[16]) Polya und Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Berlin 1925, S. 65 und 229, Nr. 140.

[17]) Fejér, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 158 (1914), S. 1328–1331.

Satz 1. *$f(x)$ sei eine in $(0, 1)$ erklärte nicht identisch verschwindende Funktion von beschränkter Schwankung. Die Integrale $\int_0^1 f(x)\, x^k\, dx$ mögen für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ verschwinden. Dann hat $f(x)$ mindestens n Zeichenwechsel.*

Der Satz 1 kann auf die Form gebracht werden:

Satz 2. *Es sei $f(x)$ eine in $[0, 1]$ erklärte nicht identisch verschwindende Funktion von beschränkter Schwankung. Es sei $f(0) = f(1) = 0$. Die ersten Momente $\int_0^1 x^k\, df(x)$ $[k = 1, 2, \ldots, p]$ mögen verschwinden. Dann hat $f(x)$ mindestens p Zeichenwechsel.*

Aus $0 = \int_0^1 x^k\, df(x)$ $[k = 1, \ldots, p]$ folgt nämlich durch Integration nach Teilen $0 = \int_0^1 f(x)\, x^k\, dx$ $[k = 0, \ldots, p-1]$; damit sind die Voraussetzungen von Satz 1 gegeben.

Damit beweisen wir den folgenden

Satz 3. *$\mu_0, \ldots, \mu_p$ sei Anfangsstück einer vollmonotonen Momentenfolge. $\chi_p(x)$ sei eine zu diesem Anfangsstück gehörige Treppenfunktion. Sie besteht also aus einem $(p+3)$-gliedrigen Streckenzug, von dem p Ecken im Innern des Rechtecks $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq \chi(x) \leqq \mu_0$ liegen. Diese inneren Ecken sind entweder unterer oder oberer Endpunkt eines Sprunges von $\chi_p(x)$. Es sei $(x; \chi_p(x-0))$ eine innere Ecke, die zugleich unterer Endpunkt eines Sprunges sei. Dann gilt für jede andere monotone Belegungsfunktion $\chi(x)$ mit denselben Anfangsmomenten $\mu_0, \ldots, \mu_p$, daß $\chi(x-0) > \chi_p(x-0)$. Ist hingegen $(x; \chi_p(x+0))$ eine innere Ecke, die oberer Endpunkt eines Sprunges ist, so gilt $\chi(x+0) < \chi_p(x+0)$*[18]).

Dieser Satz sagt noch mehr aus, als daß die Treppenfunktionen die Randkurven erreichen: nämlich, daß die Randkurven im Innern des durch μ_0 gegebenen Rechtecks von keiner sonstigen monotonen Belegungsfunktion mit denselben Anfangsmomenten erreicht werden.

Zum Beweis. Es sei $p = 2r$, χ_p von erster Art, χ eine andere monotone Belegungfunktion mit denselben Anfangsmomenten. Ich setze $\chi(x) - \chi_p(x) = f(x)$. Nach Satz 2 hat $f(x)$ mindestens p Zeichenwechsel.

---

[18]) Wenn die gegebene Momentenfolge nicht-wesentlich vollkonvex ist, so kann nach § 1 die Treppenfunktion zu p weniger als $p+3$ Sprünge haben. Dann ist Satz 3 insofern erfüllt, als es keine von $\chi_p(x)$ verschiedene zu p gehörige Belegungsfunktion gibt. — Bezüglich der Sonderfunktionen zu p vgl. den folgenden Satz 4.

Nun hat χ_p die Form einer Treppenfunktion mit $r+1$ Sprüngen innerhalb $(0,1)$. Solange χ_p konstant ist, kann $f(x)$ nur monoton wachsen; abnehmen kann es nur an den Sprungstellen von χ_p. Gelegenheit zum Zeichenwechsel besteht für $f(x)$ also nur an den inneren Sprungstellen selbst und noch je einmal zwischen zwei benachbarten Sprungstellen von χ_p. Die größte mögliche Zahl von Zeichenwechseln ist also $(r+1)+r=p+1$. Wenn Satz 3 nicht zuträfe, so würde an einer Sprungstelle von χ_p $f(x-0) \leqq 0$ oder auch $f(x+0) \geqq 0$ sein können. Sollten sich in dieser Weise der linke Grenzwert von $f(x)$ an der ersten Sprungstelle von χ_p *oder* der rechte Grenzwert an der letzten Sprungstelle ändern, so würde die Zahl der Zeichenwechsel um eins abnehmen; das ist nach Satz 2 möglich und widerspricht auch nicht Satz 3, denn diese beiden Ecken liegen auf dem Rande des Rechtecks. In jedem anderen Falle aber würde durch eine solche Änderung die Anzahl der Zeichenwechsel um zwei abnehmen und könnte auch durch weitere Abänderungen gleicher Art nicht wieder steigen. Das widerspräche Satz 2, tritt also nicht ein. Mithin ist Satz 3 für gerades p und Treppenfunktionen erster Art zu p bewiesen. Für Treppenfunktionen zweiter Art und für ungerades p zeigen gleichlaufende Überlegungen die Richtigkeit von Satz 3.

Für die Sonderfunktionen kann man entsprechende Erwägungen anstellen. Da sie nur aus $p+2$ Strecken bestehen, wird hier die Höchstzahl der Zeichenwechsel p, so daß hier eine Änderung an den Randecken nicht freisteht. Wir erhalten den

Satz 4. *$\mu_0, \ldots, \mu_p$ sei Anfangsstück einer vollmonotonen Momentenfolge. $\chi_p(x)$ sei Sonderfunktion zu p. Ist $\chi(x)$ irgend eine andere monotone Belegungsfunktion mit denselben Anfangsmomenten, so gilt an jeder von 0 verschiedenen Sprungstelle der Sonderfunktion $\chi_p(x-0) < \chi(x-0)$, an jeder von 1 verschiedenen Sprungstelle $\chi_p(x+0) > \chi(x+0)$.*

Da die Treppenfunktionen mit ihren Sprüngen von der unteren Schranke $w(x)$ bis zur oberen $v(x)$ reichen, andere monotone Belegungsfunktionen zu p diese Schranken aber nicht erreichen, so hat an jeder Stelle im Intervall $(0,1)$ die dort springende Treppenfunktion zu p einen größeren Sprung als jede andere monotone Belegungsfunktion zu p[19]).

§ 4.

Berechnung der Sprungstellen der Sonder- und der Treppenfunktionen erster Art.

Es sollen jetzt die Treppenfunktionen zu p berechnet werden, und zwar zunächst die Sprungstellen der Sonderfunktion und der Treppen-

[19]) Dies Ergebnis läßt sich auch allein aus der in Anmerkung 5 gebrachten Darstellung der Krümmungen ableiten.

funktion erster Art. Es sei $p = 2r - 1$. Die Sonderfunktion besteht dann aus $2r + 1$ Strecken, von denen die letzte und mithin auch die erste waagerecht verlaufen. Es liegen also r Sprungstellen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ im Intervall $(0, 1)$ mit den zugehörigen Sprunghöhen $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Sie haben die Gleichungen

$$\mu_k = a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \ldots + a_r x_r^k \quad [k = 0, 1, \ldots, 2r - 1]$$

zu befriedigen. Damit das System der r Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ diesen $2r$ Gleichungen genügen kann, müssen die folgenden Determinanten verschwinden:

$$\begin{vmatrix} \mu_m & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_{m+1} & x_1 & x_2 & \ldots & x_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mu_{m+r} & x_1^r & x_2^r & \ldots & x_r^r \end{vmatrix} = 0 \quad [m = 0, 1, \ldots, r - 1].$$

Eliminiere[20]) ich aus diesen r Gleichungen alle x_ϱ bis auf eins, das ich kurz mit x bezeichnen will, so bleibt für dieses die Bestimmungsgleichung

$$P_{r-1}^r = 0 \quad [p = 2r - 1], \tag{4.1}$$

wenn ich die Bezeichnung

$$P_\beta^{\alpha+1}(x) = \begin{vmatrix} \mu_{\beta-\alpha} & \ldots & \mu_\beta & x^{\beta-\alpha} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{\beta+1} & \ldots & \mu_{\beta+\alpha+1} & x^{\beta+1} \end{vmatrix}; \quad P_\beta^0 = x^{\beta+1} \tag{4.2}$$

einführe[21]).

Es sei $p = 2r$. Die Sonderfunktion erster Art besteht aus $2r + 2$ Strecken; da die letzte waagerecht verläuft, so ist die erste senkrecht. D. h., es liegen r Sprungstellen $x_1, \ldots, x_r$ innerhalb $(0, 1)$ und eine bei $x_0 = 0$. Wie oben ergibt sich hier nach Elimination aller x bis auf x_0 und eines der anderen x die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \ldots & \mu_{r-1} & 1 & 1 \\ \mu_1 & \ldots & \mu_r & 0 & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{r+1} & \ldots & \mu_{2r} & 0 & x^{r+1} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$P_r^r = 0 \quad [p = 2r]. \tag{4.3}$$

[20]) Die Elimination ist stets möglich, weil alle auftretenden Determinanten den Rang r haben; aus der gegenteiligen Annahme ließe sich nämlich durch vollständige Induktion ableiten, daß entgegen der in § 1 gemachten Voraussetzung K_r^r verschwände. — Entsprechendes gilt für alle weiteren in dieser Abhandlung vorkommenden Eliminationen.

[21]) P_β^α ist also nur für $0 < \alpha \leq \beta + 1$ erklärt.

Nun gilt der

Satz 5. *Die Nullstellen von* P_{r-1}^r, P_r^r *sind reell und einfach und liegen innerhalb* $[0, 1)$.

Zum Beweise diene, daß die Integrale

$$\int_0^1 P_{r-1}^r x^k \, d\chi(x) = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 P_r^r x^k \, d\chi(x) = 0$$

sind für $k = 0, 1, \ldots, r-1$; denn für diese Werte von k wird durch die Integration die letzte Spalte der Determinante $P_{r-1}^r x^k$ bzw. $P_r^r x^k$ gleich einer der vorhergehenden Spalten. Nun benutze man den

Satz 6. $f(x)$ *sei eine in* $(0, 1)$ *erklärte, nur an endlichvielen Stellen verschwindende Funktion.* $\chi(x)$ *sei in demselben Intervall als monoton steigende Funktion mit unendlichvielen Wachstumsstellen erklärt. Die Integrale* $\int_0^1 f(x) \cdot x^k \cdot d\chi(x)$ $[k = 0, 1, \ldots, r-1]$ *mögen verschwinden. Dann hat* $f(x)$ *innerhalb* $(0, 1)$ *mindestens* r *Zeichenwechsel.*

Dieser Satz ist durch Abänderung aus Satz 1 entstanden. Man kann ihn auch ähnlich beweisen[22]): Angenommen, $f(x)$ habe nur $n \leqq r-1$ Zeichenänderungen. Dann gibt es also n Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im Intervall $(0, 1)$: $0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n < 1$ von der Beschaffenheit, daß $f(x)$ in jedem der Abschnitte $(0, x_1)$, $(x_1, x_2), \ldots, (x_n, 1)$ konstantes Vorzeichen hat und nur endlichoft verschwindet, in zwei benachbarten Abschnitten aber verschiedenes Vorzeichen hat. Dann ist

$$F(x) = f(x)\,(x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

von konstantem Vorzeichen im ganzen Intervall $(0, 1)$ und hat auch nur endlichviele Nullstellen. Mithin muß $\int_0^1 F(x) \cdot d\chi(x) \neq 0$ sein; nach den Voraussetzungen des Satzes 6 muß es hingegen verschwinden. Dieser Widerspruch widerlegt die Annahme von weniger als r Zeichenwechseln.

Es ist festzustellen, wieweit die Voraussetzungen dieses Satzes zutreffen. Nach § 1 wollen wir annehmen, daß die vorgelegte Momentenfolge wesentlich vollkonvex sei; dann hat $\chi(x)$ unendlichviele Wachstumsstellen. Weiter haben P_{r-1}^r, P_r^r nur endlichviele Nullstellen; denn sie sind rationale Funktionen und verschwinden nicht identisch, da die Koeffizienten des höchsten Gliedes K_{r-1}^r, K_r^r positiv sind. Somit kann Satz 6 angewandt werden und liefert das Ergebnis, daß P_{r-1}^r und P_r^r je mindestens r Zeichenwechsel im Intervall $(0, 1)$ haben müssen. Da P_{r-1}^r als Funktion r-ten Grades und P_r^r als Funktion $(r+1)$-ten Grades mit

[22]) Vgl. Anm. 16.

einer Nullstelle bei $x = 0$ beide im Innern des Intervalls $(0, 1)$ auch nur höchstens r Nullstellen haben können und ein Zeichenwechsel für stetige Funktionen nur an einer Nullstelle eintreten kann, so haben sie genau r einfache Nullstellen in $(0, 1)$. — Satz 5 ist damit bewiesen.

Da nun (4. 1) bzw. (4. 3) für jede Sprungstelle der Sonderfunktion gilt, so müssen die r Nullstellen von P_{r-1}^r bzw. P_r^r gerade die r Sprungstellen $x_1, \ldots, x_r$ der Sonderfunktion erster Art sein. Diese sind somit eindeutig bestimmt; und da zu jeder Sprungstelle die Sprunghöhe aus den obigen linearen Gleichungen eindeutig berechnet werden kann[23]), so gibt es zu jedem p nur *eine* Sonderfunktion erster Art. —

Die allgemeine zu p gehörige Treppenfunktion erster Art hat $p + 3$ Strecken. Wenn $p = 2r$, so macht sie also an $r + 1$ Stellen $x_0, x_1, \ldots, x_r$ im Innern von $(0, 1)$ Sprünge der Größe $a_0, a_1, \ldots, a_r$. Gefordert wird

$$\mu_k = a_0 x_0^k + a_1 x_1^k + \ldots + a_r x_r^k \qquad [k = 0, 1, \ldots, 2r]. \tag{4. 4}$$

Für die Befriedigung dieser $2r + 1$ Gleichungen durch das System $a_0, a_1, \ldots, a_r$ müssen die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \mu_m & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_{m+1} & x_0 & \ldots & x_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+r+1} & x_0^{r+1} & \ldots & x_r^{r+1} \end{vmatrix} = 0 \quad [m = 0, 1, \ldots, r-1]$$

sein. Aus diesen r Gleichungen eliminiere ich alle x_ϱ bis auf zwei, die ich x, y nennen will:

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \ldots & \mu_{r-1} & 1 & 1 \\ \mu_1 & \ldots & \mu_r & x & y \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{r+1} & \ldots & \mu_{2r} & x^{r+1} & y^{r+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn ich allgemein

$$\begin{vmatrix} \mu_{\beta-\alpha} & \ldots & \mu_{\beta-1} & x^{\beta-\alpha} & y^{\beta-\alpha} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{\beta+1} & \ldots & \mu_{\beta+\alpha} & x^{\beta+1} & y^{\beta+1} \end{vmatrix} = (y - x) \cdot S_\beta^{\alpha+1}(x, y) \tag{4. 5}$$

schreibe[24]), habe ich also erhalten

$$S_r^{r+1}(x, y) = 0 \quad [p = 2r]. \tag{4. 6}$$

Diese Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen den Sprungstellen der zu $p = 2r$ gehörenden Treppenfunktionen erster Art an; zu einem

[23]) Daß diese Sprünge alle nichtnegativ sind, die hiernach berechnete Sonderfunktion also wirklich monoton ausfällt, wird in § 6 gezeigt.

[24]) Man kann noch festsetzen $S_\beta^1(x, y) = x^\beta \cdot y^\beta$; dann ist $S_\beta^{\alpha+1}(x, y)$ für $0 \leqq \alpha \leqq \beta$ erklärt.

gegebenen x liefert sie r Werte für y. Diese insgesamt $r+1$ Werte sind also die $r+1$ Sprungstellen $x_0, \ldots, x_r$. Wie die Sonderfunktion erster Art durch die Momente $\mu_0, \ldots, \mu_p$ eindeutig bestimmt ist, so gibt es also zu $\mu_0, \ldots, \mu_{2r}$, x nur eine Treppenfunktion erster Art. Es bedarf freilich noch der Untersuchung, unter welchen Bedingungen für x die $r+1$ Werte von y alle in das Intervall $[0, 1]$ fallen; darüber vergleiche § 10.

Wenn $p = 2r-1$, so haben die zu p gehörigen Treppenfunktionen erster Art einen Sprung a_0 bei $x_0 = 0$ und r Sprünge $a_1, \ldots, a_r$ an den Stellen $x_1, \ldots, x_r$ im Innern des Intervalls $(0, 1)$. Dafür gelten die Gleichungen:

$$\mu_k = a_0 x_0^k + \ldots + a_r x_r^k \quad [k = 0, 1, \ldots, 2r-1]. \tag{4.7}$$

Dann müssen die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \mu_m & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_{m+1} & 0 & x_1 & \ldots & x_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+r+1} & 0 & x_1^{r+1} & \ldots & x_r^{r+1} \end{vmatrix} = 0 \quad [m = 0, 1, \ldots, r-2]$$

sein, d. h.

$$\begin{vmatrix} \mu_m & x_1 & \ldots & x_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+r} & x_1^{r+1} & \ldots & x_r^{r+1} \end{vmatrix} = 0 \quad [m = 1, 2, \ldots, r-1].$$

Für irgend zwei x, y von den x_ϱ folgt dann

$$S_r^r(x, y) = 0 \quad [p = 2r-1]. \tag{4.8}$$

Auch hier ist die Treppenfunktion erster Art durch $\mu_0, \ldots, \mu_p, x$ eindeutig bestimmt, aber auch hier ist noch zu untersuchen, welche Werte von x auf brauchbare Werte für y führen.

§ 5.

Beweis einer Determinantengleichung.

Für die durch (4.5) erklärte Funktion $S_\beta^{\alpha+1}(x, y)$ ist auch die Darstellung

$$S_\beta^{\alpha+1}(x, y) = -\begin{vmatrix} 0 & x^{\beta-\alpha} & \ldots & x^\beta \\ y^{\beta-\alpha} & \mu_{\beta-\alpha} & \ldots & \mu_\beta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^\beta & \mu_\beta & \ldots & \mu^{\beta+\alpha} \end{vmatrix} \tag{5.1}$$

möglich, die im folgenden vorwiegend gebraucht wird. Für den Beweis dieser Behauptung darf man o. B. d. A. $\alpha = \beta = r$ nehmen. Wir setzen

also die beiden Darstellungen von $S_r^{r+1}(x, y)$ nach (4.5) und nach (5.1) einander gleich. Die Koeffizienten gleicher Potenzen von y müssen übereinstimmen:

$$\begin{vmatrix} \mu_0 \cdots \mu_{\varrho-1} & 1 & \mu_{\varrho+1} \cdots & \mu_r \\ \mu_1 \cdots \mu_\varrho & x & \mu_{\varrho+2} \cdots & \mu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_r \cdots \mu_{r+\varrho-1} & x^r & \mu_{r+\varrho+1} \cdots & \mu_{2r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_{r-1} & 1 & 0 \\ \mu_1 & \cdots & \mu_r & x & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ \mu_{r+1} & \cdots & \mu_{2r} & x^{r+1} & x^{r-\varrho} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_{r-1} & 1 & 0 \\ \mu_1 & \cdots & \mu_r & x & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & x^\varrho & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ \mu_{r+1} & \cdots & \mu_{2r} & 0 & x^{r-\varrho} \end{vmatrix}$$

Dazu müssen die Koeffizienten von x^λ auf beiden Seiten gleich sein:

$$\begin{vmatrix} \mu_0 \cdots \mu_{\varrho-1} \mu_{\varrho+1} \cdots \mu_r \\ \vdots \\ \mu_{\lambda-1} \\ \mu_{\lambda+1} \\ \vdots \\ \mu_r \cdots \quad \cdots \mu_{2r} \end{vmatrix} = \sum_\alpha^\beta \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots \mu_{r-1} \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{\tau-1} & \\ \mu_{\tau+1} & \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{\varrho+\lambda-\tau} & \\ \mu_{\varrho+\lambda-\tau+2} & \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{r+1} & \cdots \mu_{2r} \end{vmatrix}$$

mit
$\alpha = \mathrm{Max}\,(0,\ \varrho+\lambda-r)$,
$\beta = \mathrm{Min}\,(\varrho, \lambda)$.

Hierfür genügt es,

$$(5.2) \quad \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots \mu_{r-1} \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{h-1} & \\ \mu_{h+1} & \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{k-1} & \\ \mu_{k+1} & \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{r+1} \cdots & \mu_{2r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_0 \cdots \mu_{h-1} \mu_{h+1} \cdots \mu_r \\ \vdots \\ \mu_{k-2} \\ \mu_k \\ \vdots \\ \mu_r \cdots \quad \cdots \mu_{2r} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mu_0 \cdots \mu_{h-2} \mu_h \cdots \mu_r \\ \vdots \\ \mu_{k-1} \\ \mu_{k+1} \\ \vdots \\ \mu_r \cdots \quad \cdots \mu_{2r} \end{vmatrix}$$

zu zeigen, wobei stets $k > h$ sei und rechts für $h = 0$ und auch für $k = r + 1$ der Subtrahend verschwindet. Diese Gleichung brauche ich nur für $1 \leqq h < k \leqq r$ zu beweisen.

Für diesen Beweis eine einfachere Bezeichnung: Statt μ_λ schreibe ich nur noch den Zeiger λ hin. Als Unterdeterminanten Hankelscher Determinanten sind die hier auftretenden Determinanten durch Angabe der ersten Zeile und der ersten Spalte schon vollständig bestimmt. Ich schreibe daher auf einen „Bruch"strich das erste Element der ersten Zeile, dann in Klammern die in der fortlaufenden Folge zum letzten Element fehlenden Elemente der ersten Zeile, dann das letzte Element; unterhalb des Striches gebe ich ebenso die erste Spalte an. Für die Reihenfolge der fehlenden Elemente soll diese Regel gelten: Die fehlenden Elemente der ersten Zeile und der ersten Spalte sollen beide in gerader oder beide in ungerader Permutation aufgeführt sein; sind nur die fehlenden Elemente einer von den beiden Reihen in ungerader Permutation aufgeführt, so bedeutet das dieselbe Determinante, aber mit dem Faktor (-1).

Die zu beweisende „Hauptgleichung" (5. 2) sieht in dieser Darstellung so aus:

$$\frac{0 \quad r-1}{0\,(h,\,k)\,r+1} = \frac{0\,(k-1)\,r}{0 \quad (h) \quad r} - \frac{0\,(h-1)\,r}{0 \quad (k) \quad r}.$$

Die Bestimmung $h < k$ kann infolge der Vorzeichenregel jetzt ausfallen. — Ich entwickele diese drei Determinanten nach den Elementen ihrer ersten Zeilen. Für den Beweis der Hauptgleichung wird es hinreichen, wenn die zu gleichen Elementen gehörigen Unterdeterminanten sich immer das Gleichgewicht halten; diese „Untergleichungen" gelten in der Tat:

In den ersten Zeilen kommen die Elemente $0, 1, \ldots, r$ vor; doch $h - 1$, $k - 1$, r nur in je zweien der Determinanten. Die hierzu gehörigen Untergleichungen sind:

für $h - 1$:

$$\frac{1 \quad (h) \quad r}{1\,(h,\,k)\,r+1} = \frac{1\,(h,\,k)\,r+1}{1 \quad (h) \quad r},$$

für $k - 1$:

$$\frac{1 \quad (k) \quad r}{1\,(h,\,k)\,r+1} = -\frac{1\,(k,\,h)\,r+1}{1 \quad (k) \quad r},$$

für r:

$$0 = \frac{1\,(k)\,r}{1\,(h)\,r} - \frac{1\,(h)\,r}{1\,(k)\,r}.$$

Diese Untergleichungen stimmen, da jedesmal die beiden in Gleichung stehenden Unterdeterminanten bis auf Vertauschung von Zeilen und Spalten identisch sind, also gleichen Wert haben.

Alle anderen Elemente kommen in jeder der drei Determinanten vor. Im Falle $h = 1$ lautet die zum Element $u - 1$ gehörige Untergleichung

$$\frac{2\,(u+1)\,r+1}{2\quad(k)\quad r+1} = \frac{2\,(u+1,\,k+1)\,r+2}{2\qquad\qquad r} + \frac{2\quad(u)\quad r+1}{2\,(k+1)\,r+1}.$$

Das ist aber die Hauptgleichung mit $r - 1$ statt r, $u - 1$ statt h und $k - 1$ statt k, wenn man noch die Transformation $\mu_k \to \mu_{k+2}$ vornimmt. Ich setze daher fortan voraus, daß die Hauptgleichung durch vollständige Induktion schon bis $r - 1$ statt r bewiesen sei — für $r = 2$ ist sie ja leicht nachzurechnen —; dann brauche ich jetzt die Hauptgleichung nur noch für $h > 1$ als richtig zu erweisen.

Die zum Element 0 gehörige Untergleichung lautet:

$$\frac{2\qquad\qquad r}{2\,(h+1,\,k+1)\,r+2} = \frac{2\quad(k)\quad r+1}{2\,(h+1)\,r+1} - \frac{2\quad(h)\quad r+1}{2\,(k+1)\,r+1}.$$

Durch die Transformation $\mu_{\lambda+2} \to \mu_\lambda$ entsteht daraus die Hauptgleichung für $r - 1$ statt r, $h - 1$ statt h und $k - 1$ statt k. Ich hatte vorausgesetzt, daß diese schon bewiesen sei.

Bezeichne ich $r + 1$ durch w, so ist jetzt nur noch der Fall zu erledigen:

$$\underset{(1)}{1\,(u,\,w)\,w} = \underset{(2)}{1\,(u,\,k)\,w} - \underset{(3)}{1\,(u,\,h)\,w}, \tag{5.3}$$

wobei u, h, k voneinander verschieden, größer als 1 und höchstens gleich r sind.

Die Richtigkeit dieser Gleichung ist bewiesen, wenn jedem der $(r - 1)!$ Glieder einer beliebigen von diesen drei Determinanten eineindeutig ein gleiches Glied in einer der beiden anderen Determinanten, und zwar mit passendem Vorzeichen, zugeordnet ist. Das soll jetzt geschehen.

Es sei z. B. irgendein Glied der Determinante (1) ausgewählt. Die erste Zeile von (1) ist mit der ersten Spalte identisch, bis auf die beiden Elemente h, k, die nur als Spalten-, und die beiden u, w, die nur als Zeilenanfänge vorkommen. Ich suche jetzt das Element des ausgewählten Determinantengliedes auf, das in der mit h beginnenden Spalte steht; die Zeile dieses Elementes möge mit h' beginnen. Dann suche ich das Element auf, das in der mit h' beginnenden Spalte steht; seine Zeile möge mit h'' beginnen — usw. Ich erhalte so eine Folge $h\ h'\ h''\ \ldots$, in der jedes Glied das voraufgehende und das folgende eindeutig bestimmt. Deswegen kann die Folge nicht dasselbe Glied zweimal enthalten, das Anfangsglied h müßte dann auch zweimal vorkommen, kann aber nur erstes Glied sein. — Da die Determinante nur endlichviele Reihen hat, muß die Folge abbrechen. Letztes Glied kann nur u oder w sein. Gehe ich von diesem Gliede aus rückwärts, suche ich also das in dieser Zeile stehende Element, dessen Spalte h^* sei, dann das in der Zeile h^* stehende Element usw., so finde ich dieselbe Folge und ende mit h. Ebenso finde

ich eine Folge $k\,k'\,k''\,\ldots$, die mit dem anderen der Elemente u, w enden muß und auch von diesem aus aufstellbar ist. Da jede dieser beiden Folgen schon durch ein Glied bestimmt ist, beide aber verschieden anfangen, so können sie keine Glieder gemeinsam haben.

Diese beiden Folgen bestimmen die zu ihrer Aufstellung gebrauchten Elemente des ausgewählten Determinantengliedes eindeutig. Wenn dieses noch weitere Elemente hat, so müssen die dazu gehörigen Spaltenanfänge in ihrer Gesamtheit mit den dazu gehörigen Zeilenanfängen übereinstimmen. Denn außer h, k, u, w waren dieselben Zeilen- und Spaltenanfänge vorhanden, und neben $h\,k$, u, w wurde jeder Zeilenanfang auch als Spaltenanfang verbraucht und umgekehrt.

In der zweiten und dritten Determinante lassen sich ebenfalls zu jedem Gliede zwei Folgen bilden. In (2) müssen die u- und k-Folge auf h und w enden (und umgekehrt), in (3) die u- und h-Folge auf k und w.

Folgen $h \leftrightarrow u$ und $k \leftrightarrow w$ sind demnach nur in den Determinanten (1) und (2), $h \leftrightarrow w$ und $u \leftrightarrow k$ nur in (1) und (3), $h \leftrightarrow k$ und $u \leftrightarrow w$ nur in (2) und (3) möglich, und zwar ist jede Folge, die es in einer der beiden Determinanten gibt, auch in der anderen aufzufinden; und zur Aufstellung der Folge sind in beiden Determinanten dieselben Elemente notwendig. Sie sind nur insofern verschieden angeordnet, als bei (2) im Vergleich zu (1) die Unterdeterminante aus den Zeilen und Spalten der k-w-Folge um ihre Hauptachse geklappt ist; wenn es sich um die beiden Determinanten (1), (3) handelt, so ist die Unterdeterminante zur h-w-Folge um ihre Achse geklappt, und bei (2), (3) die zur h-k-Folge. Die zur anderen Folge gehörigen Elemente lassen sich dagegen in beiden Determinanten in gleicher Lage auffinden. — Die Zeilen- und Spaltenanfänge der nicht für die Aufstellung der beiden Folgen gebrauchten Elemente müssen dann in beiden Determinanten noch zur Verfügung stehen. Auch diese Elemente lassen sich in beiden Determinanten in gleicher Lage auffinden, wie daraus leicht zu sehen. Es kommt also in beiden Determinanten dasselbe Glied als Ganzes vor. — Diese Zuordnung ist eineindeutig.

Und die Vorzeichen? Angenommen etwa, es handle sich um die Determinanten (1) und (2). Die Elemente des auf sein Vorzeichen in (1) und in (2) zu untersuchenden Determinantengliedes teile ich in zwei Gruppen: einerseits diejenigen, deren Unterdeterminante beim Übergang von (1) zu (2) um ihre Achse geklappt werden muß, also die zur k-w-Folge gehörigen Elemente, andererseits die übrigen. Da die so bestimmten beiden Faktoren in ihren (sich ergänzenden) Unterdeterminanten beidemal die gleiche Stellung einnehmen, so haben sie auch in Bezug auf ihre Unterdeterminanten gleiches Zeichen. Wenn das untersuchte Determinantenglied in (1) und (2) verschiedenes Vorzeichen hat, so kann das also nur an der verschie-

denen Stellung der beiden Unterdeterminanten in (1) und in (2) liegen. Es mögen nun die Elemente einer Unterdeterminante etwa in der m-ten, n-ten, ..., p-ten Zeile und in der q-ten, r-ten, ..., s-ten Spalte der Hauptdeterminante liegen, und wir wollen $m+n+\ldots+p+q+r+\ldots+s$ die Stellungszahl dieser Unterdeterminante in der Hauptdeterminante nennen. Dann ist nach dem Laplaceschen Zerlegungssatz dafür, ob das untersuchte Determinantenglied in (1) und (2) gleiches oder verschiedenes Vorzeichen hat, jetzt der Umstand maßgebend, ob die Stellungszahlen einer der beiden Unterdeterminanten in (1) und in (2) kongruent oder inkongruent nach dem Modul 2 sind. Wir betrachten die zweite Unterdeterminante, die beim Übergang von (1) zu (2) nicht umgeklappt wird. Ihre Stellung kann sich nur so ändern, daß beim Umklappen der ersten andere Zeilen und Spalten anstelle der bisherigen treten. Der ganze Unterschied dabei ist aber, daß in (1) w Zeilenanfang ist und k Spaltenanfang, in (2) umgekehrt. Die Vorzeichenänderung beim Übergang (1) → (2) ist also die gleiche, als wenn in (1) die mit w beginnende Zeile an die Stelle der (ausgestrichenen) mit k beginnenden Zeile gebracht würde und die mit k beginnende Spalte an die Stelle der (fehlenden) mit w beginnenden Spalte. Dabei rücken alle unterhalb der k-Zeile stehenden Zeilen der zweiten Unterdeterminante um einen Platz nach unten, alle rechts von der k-Spalte stehenden Spalten der zweiten Unterdeterminante um einen Platz nach links. Nun sind die Zeilen der zweiten Unterdeterminante mit den Spalten identisch; abgesehen davon, daß u nur als Zeilen- und h nur als Spaltenanfang vorkommt. Wenn daher $u<k$, $h<k$, so bleibt die Summe der Stellungszahlen beim Übergang von (1) zu (2) konstant, das Determinantenglied in (1) hat gleiches Vorzeichen wie das in (2); und da beide Determinanten mit positivem Vorzeichen auf verschiedenen Seiten der Gleichung stehen, so heben diese beiden Glieder sich auf. Wenn $u>k$, so ist die Anzahl der Spalten, die ihren Platz ändern, um eine geringer als die der Zeilen, so daß die beiden Glieder in den Determinanten (1) und (2) verschiedenes Vorzeichen haben; aber nach der Vorzeichenregel über die Reihenfolge der fehlenden Elemente erhält dann auch die ganze Determinante (2) ein Minuszeichen, so daß die beiden Glieder sich auch in diesem Falle aufheben. Ebensowenig macht es etwas aus, wenn $h>k$, da dann (1) negativ zu nehmen ist. Wenn $u>k$, $h>k$, so bleibt die Summe der Stellungszahlen konstant; (1) und (2) sind beide negativ zu nehmen: Die beiden Glieder heben sich auch in diesem Falle auf.

Wenn es sich um die Determinanten (1) und (3) oder um (2) und (3) handelt, so zeigt eine gleichlaufende Überlegung, daß auch dann die beiden Glieder sich aufheben. Damit ist die Gleichung (5. 3) bewiesen, mit ihr (5. 2) und durch diese (5. 1).

§ 6.

Berechnung der Sprunghöhen erster Art.

Ich berechne jetzt die Sprunghöhen der Treppenfunktionen erster Art. Es sei $p = 2r$. Aus (4. 4) folgt, indem ich a_0 aus je $r+1$ aufeinanderfolgenden Gleichungen nach der Cramerschen Regel berechne:

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_m & x_0^m & x_1^m & \dots & x_r^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+r} & x_0^{m+r} & x_1^{m+r} & \dots & x_r^{m+r} \end{vmatrix} = 0 \quad [m = 0, \dots, r].$$

Ich multipliziere die erste Zeile mit x_0^m und dividiere die zweite bis letzte Spalte mit $x_0^m, x_1^m, \dots, x_r^m$:

$$\begin{vmatrix} a_0 x_0^m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_m & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \mu_{m+1} & x_0 & x_1 & \dots & x_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m+r} & x_0^r & x_1 & \dots & x_r^r \end{vmatrix} = 0 \quad [m = 0, \dots, r].$$

Aus diesen $r+1$ Gleichungen eliminiere ich $x_1, x_2, \dots, x_r$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0 x_0 & \dots & a_0 x_0^r \\ 1 & \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_r \\ x_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^r & \mu_r & \mu_{r+1} & \dots & \mu_{2r} \end{vmatrix} = 0.$$

Nach (5. 1) heißt das $K_r^{r+1} - a_0 S_r^{r+1}(x_0, x_0) = 0$. Da über die Reihenfolge der x_ϱ nichts vorausgesetzt war, so kann x_0 jede der Sprungstellen bedeuten. Ich schreibe x statt x_0 und $a(x)$ statt a_0, dann habe ich in

$$a(x) = \frac{K_r^{r+1}}{S_r^{r+1}(x)} \quad [p = 2r] \tag{6. 1}$$

die Formel, die mir zu jeder Sprungstelle x einer zu $p = 2r$ gehörenden Treppenfunktion erster Art die Sprunghöhe liefert.

Dabei habe ich gesetzt[25]):

$$S_\beta^{\alpha+1}(x, x) = x^{\beta-\alpha} \cdot S_\beta^{\alpha+1}(x). \tag{6. 2}$$

Aus (4. 5) erhalte ich die Darstellung

$$S_\beta^{\alpha+1}(x) = \begin{vmatrix} \mu_{\beta-\alpha} & \dots & \mu_{\beta-1} & x^{\beta-\alpha} & 0 \\ . & & . & . & 1 \\ . & & . & . & 2x \\ . & & . & . & . \\ \mu_{\beta+1} & \dots & \mu_{\beta+\alpha} & x^{\beta+1} & (\alpha+1)x^\alpha \end{vmatrix}. \tag{6. 3}$$

[25]) Es ist $S_\beta^1(x) = x^\beta$ zu setzen; damit ist $S_\beta^{\alpha+1}(x)$ für $0 < \alpha < \beta$ erklärt.

Es sei $p = 2r - 1$. Bedeutet dann x eine der Sprungstellen $x_1, \ldots, x_r$, so finde ich aus (4.7) für die zugehörige Sprunghöhe auf gleichem Wege

$$a(x) = \frac{K_r^r}{S_r^r(x)} \quad [p = 2r - 1]. \tag{6.4}$$

Die Sprunghöhen der Sonderfunktion erster Art zu p finde ich, indem ich die Sonderfunktion als Treppenfunktion erster Art zu p oder zu $p - 1$ auffasse. So ergibt sich für den Sprung der zu $p = 2r$ gehörenden Sonderfunktion erster Art bei $x = 0$, wenn ich die Sonderfunktion als Treppenfunktion erster Art zu $2r$ auffasse, aus (6.1) die Größe

$$a(0) = \frac{K_r^{r+1}}{K_{r+1}^r} \quad [p = 2r]. \tag{6.5}$$

Die Formel (6.4) versagt für $x = 0$, da S_r^r dort verschwindet. Wir können den bei 0 liegenden Sprung der Treppenfunktion erster Art zu $2r - 1$ berechnen, indem wir sie als Sonderfunktion erster Art zu $p = 2r$ auffassen. Nach (6.5) ist dann

$$\begin{vmatrix} \mu_0 - a(0) & \mu_1 & \ldots & \mu_r \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_r & \mu_{r+1} & \ldots & \mu_{2r} \end{vmatrix} = 0.$$

Darin ist μ_{2r} nach (4.3) durch die Gleichung

$$P_r^r = \begin{vmatrix} \mu_1 & \ldots & \mu_r & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{r+1} & \ldots & \mu_{2r} & x^{r+1} \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Aus diesen beiden Gleichungen eliminiere man die Spalte, in der μ_{2r} steht:

$$\begin{vmatrix} \mu_0 - a(0) & \mu_1 & \ldots & \mu_{r-1} & x \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_r & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_r & \mu_{r+1} & \ldots & \mu_{2r-1} & x^{r+1} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$a(0) = \frac{x \cdot P_{r-1}^r(x)}{P_r^{r-1}(x)} \quad [p = 2r - 1]. \tag{6.6}$$

Das ist also die Größe des bei 0 liegenden Sprunges der Treppenfunktion erster Art zu $2r - 1$; x ist dabei irgendeine der von 0 verschiedenen Sprungstellen.

(6.5) und daher auch (6.6) liefern wegen der Vollkonvexität der Momentenfolge immer einen positiven Wert. Positiv sind auch die Werte von (6.1), (6.4), denn $\frac{1}{a(x)}$ ist, wie man an (5.1) erkennt, eine quadra-

tische Form in den Argumenten $1, x, \ldots, x^r$ bzw. das x-fache einer quadratischen Form in $1, x, \ldots, x^{r-1}$. Und diese quadratischen Formen sind positiv definit, weil ihre inversen Formen $\sum_{0}^{r}{}_{i,k}\, \mu_{i+k} \cdot x^i x^k$ bzw. $\sum_{0}^{r-1}{}_{i,k}\, \mu_{i+k+1} \cdot x^i x^k$ es sind: sie lassen sich ja durch die Integrale

$$\int_0^1 \Big(\sum_0^r u^i x^i\Big)^2 d\chi(u) \quad \text{bzw.} \quad \int_0^1 \Big(\sum_0^{r-1} u^i x^i\Big)^2 \cdot u \cdot d\chi(u)$$

wiedergeben [26]).

Da der Zähler K_r^{r+1} bzw. K_r^r positiv ist, so sind es für $0 < x \leqq 1$ auch die Funktionen $S_r^{r+1}(x)$ und $S_r^r(x)$; die erste auch für $x = 0$.

§ 7.

Berechnung der Sprungstellen zweiter Art.

Es sei $p = 2r$. Die Sonderfunktion zweiter Art besteht aus $2r + 2$ Strecken, die letzte ist senkrecht. Es liegen also r Sprünge $a_1, a_2, \ldots, a_r$ an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ in $(0, 1)$ und einer a_{r+1} bei 1. Ich erkläre Δx^k als $x^k - x^{k+1}$, $\Delta^2 x^k$ als $x^k - 2x^{k+1} + x^{k+2}$. $\Delta \mu_k$ werde kurz mit Δ_k bezeichnet. Aus den Gleichungen

$$\mu_k = a_1 x_1^k + \ldots + a_r x_r^k + a_{r+1} \quad [k = 0, 1, \ldots, 2r]$$

bilde ich durch Subtraktion je zweier aufeinanderfolgender

$$\Delta_k = a_1 \cdot \Delta x_1^k + \ldots + a_r \cdot \Delta x_r^k \quad [k = 0, 1, \ldots, 2r - 1].$$

Daraus folgt (vgl. die Ableitung von (4. 1)):

$$Q_{r-1}^r = 0 \quad [p = 2r], \tag{7. 1}$$

wobei Q_β^α dadurch aus P_β^α entsteht, daß in (4. 2) μ_k durch $\Delta \mu_k$ und x^k durch Δx^k ersetzt werden [27]), also

$$Q_\beta^\alpha = (1 - x) \begin{vmatrix} \Delta_{\beta-\alpha+1} & \ldots & \Delta_\beta & x^{\beta-\alpha+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta_{\beta+1} & \ldots & \Delta_{\beta+\alpha} & x^{\beta+1} \end{vmatrix}; \quad Q_\beta^0 = (1 - x)\, x^{\beta+1}. \tag{7. 2}$$

Ebenso kann die Funktion R_β^α erklärt werden durch

$$R_\beta^\alpha = (1 - x)^2 \cdot \begin{vmatrix} \Delta^2 \mu_{\beta-\alpha+1} & \ldots & \Delta^2 \mu_\beta & x^{\beta-\alpha+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Delta^2 \mu_{\beta+1} & \ldots & \Delta^2 \mu_{\beta+\alpha} & x^{\beta+1} \end{vmatrix}; \tag{7. 3}$$

$$R_\beta^0 = (1 - x)^2\, x^{\beta+1}.$$

---

[26]) Vgl. Perron a. a. O. [1]), S. 377.

[27]) Vgl. Anm. 21.

R_β^α entsteht demnach aus P_β^α, indem μ_k durch $\Delta^2 \mu_k$ und x^k durch $\Delta^2 x^k$ ersetzt werden[28]).

Es sei jetzt $p = 2r + 1$: dann hat die Sonderfunktion zweiter Art zu p einen Sprung a_0 bei 0, r Sprünge $a_1, \ldots, a_r$ an den Stellen $x_1, \ldots, x_r$ inmitten (0, 1) und einen Sprung a_{r+1} bei 1. Das gibt die Gleichungen

$$\mu_k = a_0 x_0^k + \ldots + a_r x^k + a_{r+1} \quad [k = 0, \ldots, 2r + 1;\ x_0 = 0].$$

Daraus folgt

$$\Delta_k = a_1 \cdot \Delta x_1^k + \ldots + a_r \cdot \Delta x_r^k \quad [k = 1, 2, \ldots, 2r]$$

und daraus als Gleichung der Sprungstellen

$$Q_r^r = 0 \quad [p = 2r + 1]. \tag{7.4}$$

Wie nach Satz 5 von der ersten Art, so gibt es hiernach auch von der zweiten Art nur eine Sonderfunktion zu p. Die Sprungstellen der Sonderfunktion zweiter Art liegen, wie die der von erster Art, alle einzeln in dem Intervall [0, 1]. Bezeichne ich nämlich die durch den Übergang von der Folge μ_k zur Folge Δ_k bewirkte Transformation mit Unterstreichung der betreffenden Größen, so ist $\underline{K} = L$, $(1 - x)\,\underline{P} = Q$. Da die Nullstellen von P alle einfach und reell sind und in [0, 1] liegen, so auch die von $\underline{P}$ und von $(1 - x)\,\underline{P} = Q$.

Die allgemeine zu p gehörige Treppenfunktion zweiter Art besteht aus $p + 3$ Strecken, von denen die letzte senkrecht ist. Bei ungeradem $p = 2r + 1$ liegen also $r + 1$ Sprünge $a_0, a_1, \ldots, a_r$ innerhalb (0, 1) an den Stellen $x_0, x_1, \ldots, x_r$ und ein Sprung a_{r+1} bei 1. Es gelten die Gleichungen

$$\Delta_k = a_0 \cdot \Delta x_0^k + \ldots + a_r \cdot \Delta x_r^k \quad [k = 0, 1, \ldots, 2r]. \tag{7.5}$$

Daraus folgt (entsprechend (4.7)) als Bestimmungsgleichung für den Zusammenhang zwischen den Sprungstellen der Treppenfunktion zweiter Art zu $2r + 1$

$$T_r^{r+1}(x, y) = 0 \quad [p = 2r + 1], \tag{7.6}$$

wenn man allgemein[29]) festsetzt:

$$(y - x) \cdot T_\beta^{\alpha+1}(x, y) = \begin{vmatrix} \Delta_{\beta-\alpha} & \ldots & \Delta_{\beta-1} & \Delta x^{\beta-\alpha} & \Delta y^{\beta-\alpha} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{\beta+1} & \ldots & \Delta_{\beta+\alpha} & \Delta x^{\beta+1} & \Delta y^{\beta+1} \end{vmatrix}. \tag{7.7}$$

[28]) Vgl. Anm. 21.

[29]) Es ist $T_\beta^1(x, y) \quad \Delta x^\beta \cdot \Delta y^\beta$ zu setzen; alsdann ist $T_\beta^{\alpha+1}(x, y)$ für $0 \leqq \alpha \leqq \beta$ erklärt.

Nach § 5 ist auch die Schreibweise möglich

$$(7.8)\qquad T_\beta^{\alpha+1}(x, y) = -\begin{vmatrix} 0 & \Delta x^{\beta-\alpha} & \dots & \Delta x^\beta \\ \Delta y^{\beta-\alpha} & \Delta_{\beta-\alpha} & \dots & \Delta_\beta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta y^\beta & \Delta_\beta & \dots & \Delta_{\beta+\alpha} \end{vmatrix}.$$

Bei geradem $p = 2r$ liegt ein Sprung a_0 bei $x_0 = 0$, r Sprünge $a_1, \dots, a_r$ liegen in $(0, 1)$ bei $x_1, \dots, x_r$ und einer a_{r+1} bei 1. Es gelten die Gleichungen

$$(7.9)\qquad \Delta_k = a_0 \cdot \Delta x_0^k + \dots + a_r \cdot \Delta x_r^k \quad [k = 0, \dots, 2r-1];$$

und aus ihnen folgt für die Sprungstellen

$$(7.10)\qquad T_r^r(x, y) = 0 \quad [p = 2r].$$

Auch die Treppenfunktionen zweiter Art sind eindeutig bestimmt. Es steht noch die Frage offen, welche Werte x man als Sprungstelle wählen darf, damit sämtliche Sprungstellen y in $[0, 1]$ liegen; darüber gibt § 10 Auskunft.

§ 8.

Berechnung der Sprunghöhen zweiter Art.

Die Sprunghöhen der Treppenfunktionen zweiter Art an den von 0 und 1 verschiedenen Sprungstellen ergeben sich aus (7.5), (7.9) auf gleiche Weise, wie in § 6 die Sprunghöhen erster Art in (6.1), (6.3):

$$(8.1)\qquad a(x) = \frac{L_r^{r+1}}{T_r^{r+1}(x)} \quad [p = 2r+1],$$

$$(8.2)\qquad a(x) = \frac{L_r^r}{T_r^r(x)} \quad [p = 2r].$$

Dabei ist

$$(8.3)\qquad T_\beta^{\alpha+1}(x, x) = \Delta x^{\beta-\alpha} \cdot T_\beta^{\alpha+1}(x)$$

gesetzt worden[30]); und aus (7.7) finden wir die Darstellung

$$(8.4)\qquad T_\beta^{\alpha+1}(x) = (1-x)\cdot\begin{vmatrix} \Delta_{\beta-\alpha} & \dots & \Delta_{\beta-1} & x^{\beta-\alpha} & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot & 2x \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{\beta+1} & \dots & \Delta_{\beta+\alpha} & x^{\beta+1} & (\alpha+1)\, x^\alpha \end{vmatrix}.$$

Diese Sprünge sind, wie die erster Art, immer positiv für $0 < x < 1$.

---

[30]) Man hat außerdem $T_\beta^1(x) = \Delta x^\beta$ zu setzen, $T_\beta^{\alpha+1}(x)$ ist dann für $0 \leqq \alpha \leqq \beta$ erklärt.

Die Sprunggrößen der Sonderfunktion zweiter Art zu p finde ich, indem ich sie als Treppenfunktion erster Art zu p, zweiter Art zu p oder zweiter Art zu $p-1$ behandle. So wird bei ungeradem $p = 2r+1$ der Sprung bei $x = 0$, indem ich die Sonderfunktion als Treppenfunktion zu $2r+1$ ansehe, nach (8.1)

$$a(0) = \frac{L_r^{r+1}}{L_{r+1}^r} \quad [p = 2r+1]. \tag{8.5}$$

Der Sprung bei 1 ergibt sich unter Beachtung der leicht zu bestätigenden Beziehung $S_\beta^\alpha(1) = M_{\beta-1}^{\alpha-1}$, indem ich die Sonderfunktion zweiter Art zu p als Treppenfunktion erster Art zu p auffasse:

$$a(1) = \frac{K_r^{r+1}}{M_{r-1}^r} \quad [p = 2r], \tag{8.6}$$

$$a(1) = \frac{K_{r+1}^{r+1}}{M_r^r} \quad [p = 2r+1]. \tag{8.7}$$

Bei der Berechnung des Sprunges der Treppenfunktion zweiter Art zu $p = 2r$ bei $x = 0$ versagt (8.2). Aber wie oben (6.6) aus (6.5) abgeleitet wurde, so finden wir hier aus (8.5):

$$a(0) = \frac{x \cdot Q_{r-1}^r}{Q_r^{r-1}} \quad [p = 2r]. \tag{8.8}$$

Als Argument x ist dabei irgendeine von 0 und 1 verschiedene Sprungstelle einzusetzen.

Auch für die Bestimmung des bei 1 liegenden Sprunges der Treppenfunktion zweiter Art sind (8.1), (8.2) unbrauchbar. Es sei $p = 2r+1$. Die zu p gehörige Treppenfunktion zweiter Art fasse ich als Sonderfunktion zweiter Art zu $p+1$ auf: sie hat also nach (8.6) bei 1 die Sprunggröße $\frac{1}{w} = \frac{K_{r+1}^{r+2}}{M_r^{r+1}}$, so daß $\begin{vmatrix} \mu_0 & \dots & \mu_{r+1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{r+1} & \dots & \mu_{2r+2} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & w \end{vmatrix} = 0$. Dabei ist μ_{2r+2} nach (7.1) durch $Q_r^{r+1} = 0$ bestimmt, d. h. durch

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \dots & \mu_{r+1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{r+1} & \dots & \mu_{2r+2} & x^{r+1} \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus beiden Determinanten eliminiere ich die Spalte mit μ_{2r+2}, es bleibt

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \dots & \mu_r & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{r+1} & \dots & \mu_{2r+1} & x^{r+1} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & w \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$w \cdot P_r^{r+1} + \begin{vmatrix} \mu_0 & \dots & \mu_r & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{r+1} & \dots & \mu_{2r+1} & x^{r+1} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In dieser Determinante ziehe ich von der ersten die zweite, ..., von der drittletzten die vorletzte Zeile ab, entwickle nach der letzten Spalte, ziehe von der ersten die zweite, ..., von der drittletzten die vorletzte Spalte ab, entwickle nach der letzten Zeile und finde so

$$a(1) = -\frac{(1-x)\,P_r^{r+1}(x)}{R_{r-1}^r(x)} \quad [p = 2r+1]; \tag{8.9}$$

darin ist x irgendeine der Sprungstellen außer 0 und 1. — Wenn $p = 2r$, so finde ich ähnlich

$$a(1) = -\frac{(1-x)\,P_r^r(x)}{R_{r-1}^{r-1}(x)} \quad [p = 2r]. \tag{8.10}$$

Damit sind alle Sprünge der Treppen- und Sonderfunktionen zweiter Art berechnet.

§ 9.

Ableitung einiger Hilfsgleichungen.

Um die Gleichungen (4. 6), (4. 7), (7. 6), (7. 9) anwenden zu können, muß man wissen, welche Werte man der einen Sprungstelle x geben darf, ohne daß die daraus berechneten Werte y der anderen Sprungstellen z. T. außerhalb des Intervalls [0, 1] fallen. Für die Antwort im § 10 seien hier einige Formeln abgeleitet.

Es sei $A = |a_{\alpha\beta}|$ $[\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n]$ eine Determinante. Die nach Streichung der i-ten, ..., j-ten Zeile und der k-ten, ..., l-ten Spalte $(i < \dots < j,\ k < \dots < l)$ übrigbleibende Unterdeterminante werde mit $A_{i\dots j,\,k\dots l}$ bezeichnet. Dann besteht die Beziehung[31]):

$$\begin{vmatrix} A_{i,k} & A_{i,l} \\ A_{j,k} & A_{j,l} \end{vmatrix} = A \cdot A_{ij,\,kl}. \tag{9.1}$$

[31]) G. Kowalewski: Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909, S. 80, Satz 28. Vgl. auch Kaluza, a. a. O.[3]), S. 167.

Als A wählen wir die Determinante $P_r^{r+1}(x)$. Mit $i=0, j=r+1, k=r, l=r+1$ erhalten wir $A=P_r^{r+1}$, $A_{i,k}=P_r^r$, $A_{i,l}=K_{r+1}^{r+1}$, $A_{j,k}=P_{r-1}^r$, $A_{j,l}=K_r^{r+1}$, $A_{ij,kl}=K_r^r$, also

$$P_r^r(x)\,K_r^{r+1}-P_r^{r+1}(x)\,K_r^r=P_{r-1}^r(x)\,K_{r+1}^{r+1}. \tag{9.2}$$

Zweitens wählen wir $A=S_r^{r+1}(x,y)$ in der Form (5.1)[32]) mit $i=0$, $j=1$, $k=0$, $l=r+1$; das gibt nach Multiplikation mit x

$$K_r^{r+1}S_r^r(x,y)+P_r^r(x)\,P_{r-1}^r(y)=K_r^r\cdot x\cdot S_r^{r+1}(x,y). \tag{9.3}$$

Wir vertauschen x mit y und bilden die Differenz:

$$P_{r-1}^r(x)\,P_r^r(y)-P_r^r(x)\,P_{r-1}^r(y)=(y-x)\,K_r^r\,S_r^{r+1}(x,y). \tag{9.4}$$

Schreibt man die linke Seite als Determinante, zieht die x-Spalte von der y-Spalte ab, dividiert durch $(y-x)$ und geht zur Grenze $y\to x$ über, so findet man

$$P_{r-1}^r(x)\,P_r^{r\prime}(x)-P_r^r(x)\,P_{r-1}^{r\prime}(x)=K_r^r\,S_r^{r+1}(x); \tag{9.5}$$

dabei soll der Strich die Ableitung nach dem Argument anzeigen. Wenn wir (9.4) mit K_{r+1}^{r+1} multiplizieren, links (9.2) anwenden und durch K_r^r kürzen, erhalten wir

$$P_r^r(x)\,P_r^{r+1}(y)-P_r^{r+1}(x)\,P_r^r(y)=(y-x)\,K_{r+1}^{r+1}\,S_r^{r+1}(x,y). \tag{9.6}$$

Wie (9.5) aus (9.4), so folgt aus (9.6) die Gleichung

$$P_r^r(x)\,P_r^{r+1\prime}(x)-P_r^{r+1}(x)\,P_r^{r\prime}(x)=K_{r+1}^{r+1}\,S^{r+1}(x). \tag{9.7}$$

Gibt man in (9.4) der Veränderlichen y den Wert 1, dann entsteht

$$P_{r-1}^r(x)\,L_r^r-P_r^r(x)\,L_{r-1}^r=K_r^r\,Q_{r-1}^r(x). \tag{9.8}$$

Nach dieser Formel ersetze ich in der Identität

$$L_{r-1}^r\,P_r^r(x)\,P_r^r(y)=L_{r-1}^r\,P_r^r(y)\,P_r^r(x)$$

links und rechts das Produkt der beiden ersten Faktoren; dann ordne ich um, so daß links K_r^r und rechts L_r^r ausgeklammert werden kann. Rechts benutze ich (9.4) und kürze darauf durch K_r^r:

$$Q_{r-1}^r(x)\,P_r^r(y)-P_r^r(x)\,Q_{r-1}^r(y)=(y-x)\,L_r^r\,S_r^{r+1}(x,y). \tag{9.9}$$

---

[32]) Diese Formel, und damit alle weiteren dieses Paragraphen, läßt sich statt aus (5.1) auch aus (4.5) ableiten. Doch konnte ich (6.1), (6.4) und (8.1), (8.2) nur aus (5.1) erhalten, wogegen es mir bei (4.6), (4.8) und (7.6), (7.10) nicht möglich war, sofort auf die Form (5.1) zu kommen. Der ganze § 5 hat also nur den Zweck, den Zusammenhang der in (4.6), ... auftretenden Funktion $S(x,y)$ mit der in (6.1), ... vorkommenden $S(x)$ herauszustellen und außerdem für die numerische Berechnung dieser letzteren Funktion die bequemere Form (6.3) zu gewähren.

Daraus folgt

$$(9.\ 10) \qquad Q_{r-1}^{r}(x)\, P_r^{r\,\prime}(x) - P_r^r(x)\, Q_{r-1}^{r\,\prime}(x) = L_r^r\, S_r^{r+1}(x).$$

Wir multiplizieren (9. 9) mit L_{r-1}^r, wenden links (9. 8) an und kürzen durch L_r^r. Für $y \to x$ folgt dann

$$(9.\ 11) \quad Q_{r-1}^{r}(x)\, P_{r-1}^{r\,\prime}(x) - P_{r-1}^{r}(x)\, Q_{r-1}^{r\,\prime}(x) = L_{r-1}^{r}\, S_r^{r+1}(x).$$

Diese Gleichung werde mit x^2 multipliziert, dann gibt der Übergang von μ_k zu μ_{k+1} die Gleichung

$$(9.\ 12) \qquad Q_r^r(x)\, P_r^{r\,\prime}(x) - P_r^r(x)\, Q_r^{r\,\prime}(x) = L_r^r\, x\, S_{r+1}^{r+1}(x).$$

In (9. 6) setze man $y = 1$ und wende das Ergebnis auf die linke Seite der Gleichung (9. 9) an, nachdem man sie mit L_r^{r+1} multipliziert hat. Dann kürze man durch L_r^r:

$$(9.\ 13) \quad Q_{r-1}^{r}(x)\, P_r^{r+1}(y) - P_r^{r+1}(x)\, Q_{r-1}^{r}(y) = (y - x)\, L_r^{r+1}\, S_r^{r+1}(x, y),$$

$$(9.\ 14) \quad Q_{r-1}^{r}(x)\, P_r^{r+1\,\prime}(x) - P_r^{r+1}(x)\, Q_{r-1}^{r\,\prime}(x) = L_r^{r+1}\, S_r^{r+1}(x).$$

Multiplizieren wir (9. 13) mit $x\,y$ und setzen μ_{k+1} an Stelle von μ_k, so finden wir die Gleichungen

$$(9.\ 15) \quad Q_r^r(x)\, P_{r+1}^{r+1}(y) - P_{r+1}^{r+1}(x)\, Q_r^r(y) = (y - x)\, L_{r+1}^{r+1}\, S_{r+1}^{r+1}(x, y),$$

$$(9.\ 16) \quad Q_r^r(x)\, P_{r+1}^{r+1\,\prime}(x) - P_{r+1}^{r+1}(x)\, Q_r^{r\,\prime}(x) = L_{r+1}^{r+1}\, x\, S_{r+1}^{r+1}(x).$$

Man ersetze in der Identität

$$y \cdot x \cdot K_r^r \cdot S_r^{r+1}(x, y) = x \cdot y \cdot K_r^r \cdot S_r^{r+1}(x, y)$$

beiderseits das Produkt der drei letzten Faktoren nach (9. 3), ordne dann um, so daß rechts die Glieder mit S hinkommen, und setze $y = 1$:

$$(9.\ 17) \qquad L_r^r\, x\, P_{r-1}^r(x) - L_{r-1}^r\, P_r^r(x) = K_r^{r+1}\, Q_{r-1}^{r-1}(x).$$

Jetzt multipliziere man (9. 15) mit L_r^{r+1}, wende links (9. 17) an und kürze durch L_{r+1}^{r+1}. Nach Division mit $(y - x)$ lasse man y gegen x rücken:

$$(9.\ 18) \quad Q_r^r(x)\,(x\, P_r^{r+1}(x))' - x\, P_r^{r+1}(x)\, Q_r^{r\,\prime}(x) = L_r^{r+1}\, x\, S_{r+1}^{r+1}(x).$$

Durch den Übergang von μ_k zu $\Delta\mu_k$ gewinnt man noch aus (9. 5) und (9. 7) die beiden Formeln

$$(9.\ 19) \quad Q_{r-1}^{r}(x)\, Q_r^{r\,\prime}(x) - Q_r^r(x)\, Q_{r-1}^{r\,\prime}(x) = L_r^r(1 - x)\, T_r^{r+1}(x),$$

$$(9.\ 20) \quad Q_r^r(x)\, Q_r^{r+1\,\prime}(x) - Q_r^{r+1}(x)\, Q_r^{r\,\prime}(x) = L_{r+1}^{r+1}(1 - x)\, T_r^{r+1}(x).$$

§ 10.

Beweis, daß jede Stelle des Intervalls (0, 1) entweder Sprungstelle einer Treppenfunktion erster oder zweiter Art oder einer Sonderfunktion ist.

Im Falle $p = 1$ (vgl. § 2) wird das Intervall [0, 1] durch die Sprungstellen der zu p gehörigen Sonderfunktionen so in $p + 1$ Abschnitte zerlegt, daß in jedem Abschnitt abwechselnd nur eine Treppenfunktion erster oder eine zweiter Art einen Sprung machen kann, so daß sich also Abschnitte erster und zweiter Art unterscheiden lassen. Umgekehrt gibt es auch wirklich zu jeder Stelle in einem Abschnitt erster (zweiter) Art *eine* Treppenfunktion erster (zweiter) Art, die dort einen Sprung hat. Es soll nunmehr gezeigt werden, daß das für alle p gilt.

In der Gleichung (9. 10) ist die rechte Seite nach der Schlußbemerkung von § 6 immer positiv. Daraus folgt, daß die Nullstellen von Q_{r-1}^r und P_r^r sich gegenseitig trennen, d. h. daß zwischen zwei benachbarten Nullstellen der einen Funktion stets genau eine Nullstelle der anderen liegt. Denn nach (9. 10) muß z. B. an zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von P_r^r das Produkt $P_r^{r\prime} Q_{r-1}^r$ gleiches Zeichen haben; da nun $P_r^{r\prime}$ sein Zeichen wechselt — die Nullstellen sind einfach und benachbart —, so auch Q_{r-1}^r; dazwischen muß Q_{r-1}^r also mindestens einmal verschwinden, und zwar genau einmal, weil sonst nach derselben Schlußweise auch noch Nullstellen von P_r^r dazwischen zu finden sein müßten[33]). Ebenso folgt aus (9. 18), daß die Nullstellen von Q_r^r und P_r^{r+1} einander trennen. Nach (4. 1), (4. 3), (7. 1), (7. 4) heißt das, daß bei jedem p die Sprungstellen der Sonderfunktion erster Art und die der von zweiter Art sich trennen.

Da jede allgemeine Treppenfunktion zu p als Sonderfunktion zu $p + 1$ aufgefaßt werden kann (mit geeignetem μ_{p+1}), so ersieht man weiter für gerades p aus den Gleichungen (9. 7), (9. 12), (9. 14) und (9. 19), für ungerades p aus (9. 5), (9. 11), (9. 16) und (9. 20), daß auch die Sprungstellen irgendeiner allgemeinen Treppenfunktion zu p und die einer beliebigen von den zwei Sonderfunktionen zu p einander trennen.

Die Sonderfunktion erster Art zu p hat $1 + \left[\frac{p}{2}\right]$ Sprungstellen, die zweiter Art $\left[\frac{p+3}{2}\right]$; zusammen sind es $p + 2$ Sprungstellen, die das Intervall [0, 1] in $p + 1$ Abschnitte teilen. Keine Treppenfunktion zu p kann in zwei benachbarten Abschnitten springen: dann lägen zwischen zwei Sprüngen einer Sonderfunktion zwei Sprünge der Treppenfunktion.

---

[33]) Das Vorbild dieser Schlußweise fand ich bei L. Bieberbach, Differentialgleichungen, Berlin 1930³, S. 156. — Dadurch wurde ich auch erst zur Aufstellung der Formeln des § 9 veranlaßt.

Da die Treppenfunktionen jeder Art eine stetige Gesamtheit bilden, so können in jedem Abschnitt nur Treppenfunktionen gleicher Art springen; es wechseln also die Abschnitte erster Art, in denen die Treppenfunktionen erster Art springen, mit den Abschnitten zweiter Art, in denen die Treppenfunktionen zweiter Art springen. Da im letzten Abschnitt wegen des stetigen Überganges zu den Sonderfunktionen nur die Treppenfunktionen erster Art springen können, so sieht man, daß Abschnitte erster Art links von einem Sprung der Sonderfunktion erster Art zu p begrenzt werden und rechts von einem Sprung der Sonderfunktion zweiter Art, während es bei den Abschnitten zweiter Art umgekehrt liegt.

Für ungerades p (z. B. $p = 5$) liegen die Sprungstellen der Sonderfunktionen und Treppenfunktionen zu p demnach so, wie Fig. 2 zeigt:

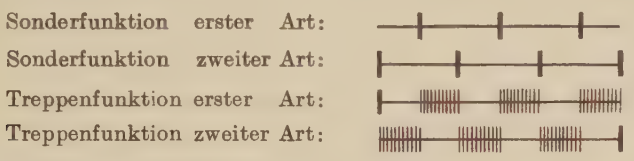


Fig. 2.

Dicke Striche bezeichnen festliegende Sprungstellen. Schraffiert sind die Gebiete, die von einer Sprungstelle bei Veränderung von μ_{p+1} bestrichen werden[34]).

Für gerades p (z. B. $p = 6$) ist die Lage so, wie Fig. 3 andeutet:

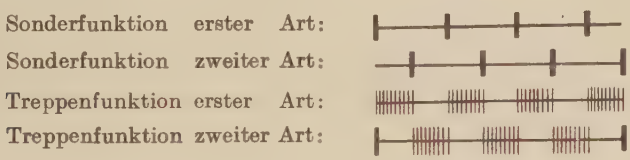


Fig. 3.

In jedem Punkte des Intervalls [0, 1] springt entweder eine Treppenfunktion erster oder eine zweiter Art. Die zu p gehörige, an der Stelle x springende Treppenfunktion ist also auch dann schon eindeutig bestimmt, wenn man ihre Art noch nicht kennt. Es ist erwünscht, zu der Sprung-

[34]) Jede allgemeine Treppenfunktion zu p hat ein bestimmtes μ_{p+1}; und andererseits gehört zu jedem μ_{p+1} (aus dem nach § 1 erlaubten Intervall) je eine allgemeine Treppenfunktion zu p beider Arten (als Sonderfunktionen zu $p+1$). Es läßt sich auch leicht zeigen, daß dieser Zusammenhang monoton ist in folgendem Sinne: Mit wachsendem μ_{p+1} rücken alle Sprungstellen der Treppenfunktion erster Art zu p monoton nach rechts, alle Sprungstellen der zweiten Art monoton nach links, abgesehen von den festliegenden Sprungstellen bei $x = 0$ und $x = 1$.

stelle x die Art der Treppenfunktion bestimmen zu können, ohne erst alle Sprungstellen der Sonderfunktionen zu ermitteln.

Es sei $p = 2r$. Die Sprungstellen der Sonderfunktionen sind durch $P_r^r = 0$, $Q_{r-1}^r = 0$ bestimmt. Das Produkt $P_r^r Q_{r-1}^r$ wechselt an jeder Sprungstelle einer Sonderfunktion das Vorzeichen (und nur da), hat also in Abschnitten gleicher Art gleiches Vorzeichen. Für $x > 1$ ist es negativ, wie aus dem Zeichen des höchsten Gliedes ersichtlich. Im letzten Abschnitt vor 1 (der immer erster Art ist) ist es daher positiv. Wir haben damit die Regel:

x liegt in einem Abschnitt erster oder zweiter Art zu $p = 2r$, je nachdem $P_r^r Q_{r-1}^r$ positiv oder negativ ist. Wenn $P_r^r = 0$, so ist x Sprungstelle der Sonderfunktion erster Art; wenn $Q_{r-1}^r = 0$, ist x Sprungstelle der Sonderfunktion zweiter Art.

Für ungerades p findet man ebenso:

x liegt in einem Abschnitt erster oder zweiter Art zu $p = 2r + 1$, je nachdem $P_r^{r+1} Q_r^r$ positiv oder negativ ist. Wenn $P_r^{r+1} = 0$, so ist x Sprungstelle der Sonderfunktion erster Art; wenn $Q_r^r = 0$, ist x Sprungstelle der Sonderfunktion zweiter Art.

Für jedes p läßt sich zu jedem x allerdings sowohl die Sprunggröße erster wie die zweiter Art berechnen. Über ihre gegenseitige Größe kann man aussagen, daß sie an den innerhalb $(0, 1)$ gelegenen Sprungstellen der Sonderfunktion erster und zweiter Art zu p denselben Wert geben müssen. Bei $p = 2r$ muß also die Determinante $L_r^r S_r^{r+1} - K_r^{r+1} T_r^r$ an den Nullstellen von $\frac{1}{x} P_r^r \cdot \frac{1}{1-x} Q_{r-1}^r$ verschwinden. Da diese Determinante wie dies Produkt beide Funktionen $2r$-ten Grades von x sind, da ferner die Koeffizienten von x^{2r} übereinstimmen[35]), so müssen beide einander gleich sein:

$$x(1-x) \begin{vmatrix} L_r^r & T_r^r \\ K_r^{r+1} & S_r^{r+1} \end{vmatrix} = P_r^r Q_{r-1}^r .$$

Ebenso findet man für $p = 2r - 1$:

$$x(1-x) \begin{vmatrix} L_{r-1}^r & T_{r-1}^r \\ K_r^r & S_r^r \end{vmatrix} = P_{r-1}^r Q_{r-1}^{r-1} .$$

Je nachdem, ob in diesen beiden Gleichungen die rechte Seite positiv oder negativ ist, also je nachdem x in einem Abschnitt erster oder zweiter Art liegt, ist die Sprunggröße erster oder zweiter Art die kleinere.

---

[35]) Um das einzusehen, vergleiche man etwa die höchsten Koeffizienten in (9. 17). — Für $p = 2r - 1$ setze man zu gleichem Zwecke in (9. 2) $x = 1$.

§ 11.

Zusammenstellung der Formeln für die Berechnung der Randkurven $v_p(x)$, $w_p(x)$. Die Randkurven für $p = 1, 2, 3$. – Ein Beispiel.

Es sei an die Bedeutung von K, L, M (§ 1); P (4. 2), Q (7. 2), R (7. 3); S (4. 5), (5. 1), (6. 2), (6. 3); T (7. 7), (7. 8), (8. 3), (8. 4) erinnert.

A. Um den Gesamtverlauf der Randkurven zu bestimmen, genügt in der Regel die Bestimmung der Punkte, in denen sie von den Sonderfunktionen erreicht werden. Man hat also die Sonderfunktionen zu berechnen.

Die Sprungstellen der Sonderfunktion erster Art ergeben sich

für $p = 2r$: aus $0 = P_r^r(x)$, für $p = 2r+1$: aus $0 = P_r^{r+1}(x)$;

sie seien der Reihe nach

für $p = 2r$: $0, x_1, \ldots, x_r$, für $p = 2r+1$: $x_0, x_1, \ldots, x_r$.

Die zugehörigen Sprünge sind

für $p = 2r$: $a(x) = \dfrac{K_r^r}{S_r^r(x)}$, für $p = 2r+1$: $a(x) = \dfrac{K_r^{r+1}}{S_r^{r+1}(x)}$;

dazu kommt der Sprung bei $x = 0$

für $p = 2r$: $a(0) = \dfrac{K_r^{r+1}}{K_{r+1}^r}$.

Die Sprungstellen der Sonderfunktion zweiter Art ergeben sich

für $p = 2r$: aus $0 = Q_{r-1}^r(x)$, für $p = 2r+1$: aus $0 = Q_r^r(x)$;

sie seien der Reihe nach

für $p = 2r$: $x_1, \ldots, x_r, 1$, für $p = 2r+1$: $0, x_1, \ldots, x_r, 1$.

Die zugehörigen Sprünge sind

für $p = 2r$: $a(x) = \dfrac{L_{r-1}^r}{T_{r-1}^r(x)}$, für $p = 2r+1$: $a(x) = \dfrac{L_r^r}{T_r^r(x)}$;

dazu kommt der Sprung bei $x = 1$

für $p = 2r$: $a(1) = \dfrac{K_r^{r+1}}{M_{r-1}^r}$, für $p = 2r+1$: $a(1) = \dfrac{K_{r+1}^{r+1}}{M_r^r}$

und der Sprung bei $x = 0$

für $p = 2r+1$: $a(0) = \dfrac{L_r^{r+1}}{L_{r+1}^r}$.

Man kann sich die Berechnung *eines* beliebigen Sprunges der Sonderfunktion ersparen, da die Summe aller Sprünge Sprünge μ_0 ergeben muß; man kann diese Beziehung aber auch zur Kontrolle der Rechnung verwenden.

An jeder Sprungstelle x erhalten wir durch Addition aller Sprünge links von x ausschließlich des bei x liegenden $w_p(x)$, durch Addition aller einschließlich des bei x liegenden $v_p(x)$. Statt dessen kann man auch die Summe aller rechts von x liegenden Sprünge von μ_0 abziehen, um $v_p(x)$ zu erhalten; wird davon noch der Sprung bei x abgezogen, so hat man $w_p(x)$.

B. Es handle sich um die Bestimmung des genauen Wertes der Schranken $v_p(x)$, $w_p(x)$ an einer Stelle x, die nicht Sprungstelle einer Sonderfunktion zu p ist. Dann hat man für $p \geqq 4$ (für $p = 1, 2, 3$ werden die fertigen Formeln unten angegeben) folgendermaßen vorzugehen. Zunächst stelle man fest, ob x in einem Abschnitt erster Art zu p liegt (wenn die Sprungstellen der Sonderfunktionen schon bekannt sind, muß die x links benachbarte unter ihnen zur Sonderfunktion erster Art gehören; für $p = 2r$ muß $P_r^r(x)\, Q_{r-1}^r(x)$, für $p = 2r+1$ $P_r^{r+1}(x)\, Q_r^r(x)$ positiv sein) oder in einem Abschnitt zweiter Art zu p (links benachbart ein Sprung der Sonderfunktion zweiter Art, $P_r^r Q_{r-1}^r$ bzw. $P_r^{r+1} Q_r^r$ negativ), ob also eine Treppenfunktion erster oder eine zweiter Art in Frage kommt.

Wenn es sich um die bei x springende Treppenfunktion erster Art zu p handelt, so bestimme man die anderen Sprungstellen y dieser Treppenfunktion

für $p = 2r$: aus $0 = S_r^{r+1}(x, y)$, für $p = 2r+1$: aus $0 = S_{r+1}^{r+1}(x, y)$;

die gesamten Sprungstellen seien der Reihe nach

für $p = 2r$; $x_0, \ldots, x_r$, für $p = 2r+1$: $0, x_0, \ldots, x_r$.

Die zugehörigen Sprünge sind

$$\text{für } p = 2r: \quad a(x) = \frac{K_r^{r+1}}{S_r^{r+1}(x)}, \qquad \text{für } p = 2r+1: \quad a(x) = \frac{K_{r+1}^{r+1}}{S_{r+1}^{r+1}(x)};$$

dazu kommt der Sprung bei $x = 0$

$$\text{für } p = 2r+1: \quad a(0) = \frac{x\, P_{r-1}^{r+1}(x)}{P_{r+1}^{r-1}(x)},$$

wo für x irgendeine der Sprungstellen $x_0, \ldots x_r$ einzusetzen ist.

Wenn es sich hingegen um die bei x springende Treppenfunktion zweiter Art zu p handelt, so bestimme man die anderen Sprungstellen y dieser Treppenfunktion

für $p = 2r$: aus $0 = T_r^r(x, y)$, für $p = 2r+1$: aus $0 = T_r^{r+1}(x, y)$.

Die gesamten Sprungstellen seien der Reihe nach

für $x = 2r$: $0, x_1, \ldots, x_r, 1$, für $p = 2r+1$: $x_0, \ldots, x_r, 1$.

Die zugehörigen Sprünge sind

$$\text{für } p = 2r\text{: } a(x) = \frac{L_r^r}{T_r^r(x)}, \qquad \text{für } p = 2r+1\text{: } a(x) = \frac{L_r^{r+1}}{T_r^{r+1}(x)};$$

dazu kommt der Sprung bei $x = 1$

$$\text{für } p = 2r\text{: } a(1) = \frac{(1-x)\,P_r^r(x)}{-R_{r-1}^r(x)}, \quad \text{für } p = 2r+1\text{: } a(1) = \frac{(1-x)\,P_r^{r+1}(x)}{-R_{r-1}^r(x)}$$

und der Sprung bei $x = 0$

$$\text{für } p = 2r\text{: } a(0) = \frac{x\,Q_{r-1}^r(x)}{Q_r^{r-1}(x)};$$

in den Formeln für $a(0)$, $a(1)$ ist für x irgendeine der von 0 und 1 verschiedenen Sprungstellen einzusetzen.

Daraus bestimmt man dann $v_p(x)$, $w_p(x)$ wie oben unter A. bei den Sonderfunktionen.

C. Verlangt man nicht die Randkurven selbst zu kennen, sondern nur ihre Differenz an einer Stelle x, das ist die Genauigkeit, mit der die Belegungsfunktion durch ihre Momente nullter bis p-ter Ordnung bestimmt ist, so brauchen nicht erst Sprungstellen berechnet zu werden. Ist $x = 0$ oder $= 1$, so ist nach Satz 4 die gesuchte Differenz gleich dem dort liegenden Sprunge der Sonderfunktion zu p (siehe oben unter A.). Weiß man für $0 < x < 1$ irgendwoher, daß x Sprungstelle einer Sonderfunktion zu p ist, so ist nach Satz 4 die Differenz ebenfalls gleich dem Sprunge der Sonderfunktion (siehe oben unter A.). Weiß man, daß x in einem Abschnitt erster bzw. zweiter Art liegt (siehe oben unter B.), so ist die Differenz nach Satz 3 gleich dem Sprunge $a(x)$ der bei x springenden Treppenfunktion erster bzw. zweiter Art (siehe oben unter B.). Weiß man aber nichts Näheres über die Lage von x, so berechne man die Sprunggröße erster Art und die Sprunggröße zweiter Art (siehe oben unter B.) und nehme die kleinere von beiden; sie ist gleich der Differenz der Randfunktionen.

D. Für $p = 1, 2, 3$ werden die Randkurven $v_p(x)$, $w_p(x)$ rationale Funktionen:

$$p = 1.$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(x) &= \frac{\Delta_0}{1-x} \\ w_1(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\mu_1}{\mu_0},$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(x) &= \mu_0 \\ w_1(x) &= \mu_0 - \frac{\mu_1}{x} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \frac{\mu_1}{\mu_0} \leqq x \leqq 1.$$

$$p = 2.$$

$$\left.\begin{aligned} v_2(x) &= \frac{K_1^2}{\mu_0 x^2 - 2\mu_1 x + \mu_2} \\ w_2(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\Delta_1}{\Delta_0},$$

$$\left.\begin{aligned} v_2(x) &= \mu_0 - \frac{\mu_2 - \mu_1 x}{1-x} \\ w_2(x) &= \Delta_0 - \frac{\Delta_1}{x} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \leqq x \leqq \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

$$\left.\begin{aligned} v_2(x) &= \mu_0 \\ w_2(x) &= \frac{(\mu_0 x - \mu_1)^2}{\mu_0 x^2 - 2\mu_1 x + \mu_2} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \frac{\mu_2}{\mu_1} \leqq x \leqq 1.$$

$$p = 3.$$

$$\left.\begin{aligned} v_3(x) &= \frac{L_1^3}{(1-x)(\Delta_0 x^2 - 2\Delta_1 x + \Delta_2)} \\ w_3(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq x_1,$$

$$\left.\begin{aligned} v_3(x) &= \mu_0 - \frac{(\mu_2 - \mu_1 x)^3}{(\mu_3 - \mu_2 x)(\mu_1 x^2 - 2\mu_2 x + \mu_3)} \\ w_3(x) &= \frac{K_1^3 x^2 - (\mu_0\mu_3 - \mu_1\mu_2)x + K_2^3}{x(\mu_3 x - \mu_3)} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

$$\left.\begin{aligned} v_3(x) &= \mu_0 + \frac{K_1^3 x^2 - (\mu_0\mu_3 - \mu_1\mu_2)x + K_2^3}{(1-x)(\Delta^2\mu_0 x - \Delta^2\mu_1)} \\ w_3(x) &= \frac{(\Delta_0 x - \Delta_1)^3}{(\Delta_0 x^2 - 2\Delta_1 x + \Delta_2)(\Delta^2\mu_0 x - \Delta^2\mu_1)} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \leqq x \leqq x_2,$$

$$\left.\begin{aligned} v_3(x) &= \mu_0 \\ w_3(x) &= \mu_0 - \frac{K_2^3}{x(\mu_1 x^2 - 2\mu_2 x + \mu_3)} \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad x_2 \leqq x \leqq 1;$$

dabei ist x_1 die kleinere und x_2 die größere Wurzel der Gleichung

$$K_1^3 x^2 - (\mu_0\mu_3 - \mu_1\mu_2) + K_2^3 = 0.$$

Für $p = 4$ dagegen ist z. B. im dritten Abschnitt $w_4(x)$ irrational.

E. Zum Beispiel seien gegeben: $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = \frac{2}{3}$, $\mu_2 = \frac{1}{2}$, $\mu_3 = \frac{2}{5}$, $\mu_4 = \frac{1}{3}$, $\mu_5 = \frac{2}{7}$, $\mu_6 = \frac{1}{4}$. Das ist ein Anfangsstück einer vollmonotonen Momentenfolge, da z. B. die Funktion $\chi(x) = x^2$ diese Momente hat.

Die nach A. berechneten Koordinaten der Ecken der Sonderfunktionen sind:

$p = 1.$	x:	0	0.667	1				
	$\chi(x)$:	0	0.333	1				
$p = 2.$	x:	0	0.500	0.750	1			
	$\chi(x)$:	0	0.111	0.667	1			
$p = 3.$	x:	0	0.355	0.600	0.845	1		
	$\chi(x)$:	0	0.056	0.364	0.750	1		
$p = 4.$	x:	0	0.276	0.456	0.724	0.877	1	
	$\chi(x)$:	0	0.028	0.230	0.488	0.833	1	
$p = 5.$	x:	0	0.212	0.369	0.590	0.773	0.912	1
	$\chi(x)$:	0	0.017	0.140	0.325	0.599	0.867	1
$p = 6.$	x:	0	0.173	0.295	0.500	0.653	0.827	0.930	1
	$\chi(x)$:	0	0.010	0.094	0.214	0.450	0.662	0.900	1

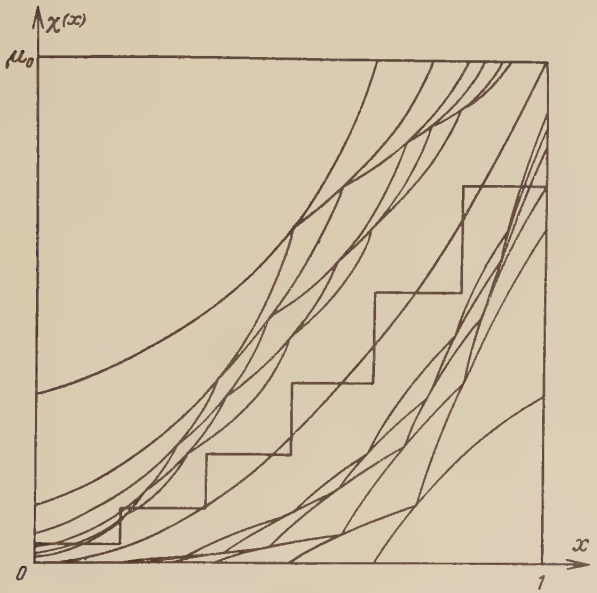


Fig. 4.

In Fig. 4 sind die Randkurven für $p = 0, \ldots, 6$ gezeichnet, außerdem die Funktion $\chi(x) = x^2$ und die Hausdorffsche Näherungsfunktion zu $p = 6$. Man sieht, daß diese in der Mitte des Intervalls weniger schwankt, als den zu 6 gehörigen Belegungsfunktionen nach dem Verlauf von $v_6(x)$, $w_6(x)$ möglich ist; an den Enden des Intervalls verhält es sich umgekehrt.

Aus dem Verlauf der Hausdorffschen Näherungsfunktion läßt sich also in keiner Weise ein Schluß darauf ziehen, wie weit sie der Grenzfunktion (die nicht $\chi(x) = x^2$ zu sein braucht!) schon nahe gekommen ist[36]).

Anmerkung.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Sonderfunktionen erster Art identisch sind mit den Stieltjesschen Näherungsfunktionen, und daß auch die Sonderfunktionen zweiter Art sich aus einer Kettenbruchentwicklung finden lassen. Somit haben wir einen Weg zu den Stieltjesschen Treppenfunktionen gefunden (und dadurch zu seinem Näherungsverfahren für die Belegungsfunktionen), der von der Theorie der Kettenbrüche unabhängig ist und auch sonst keine Hilfsmittel der Funktionentheorie benutzt, sondern nur die reelle Analysis und die Theorie der Stieltjesschen Integrale. Nimmt man hinzu, daß durch die in § 11 A zusammengestellten Formeln die praktische Anwendung der Stieltjesschen Näherungsfunktionen sehr erleichtert wird, so dürfte damit das Übergewicht der Hausdorffschen Methode über die Stieltjessche an Einfachheit der Herleitung und des Gebrauchs soweit ausgeglichen sein, wie das überhaupt möglich ist.

---

[36]) Das hat nichts damit zu tun, daß die Hausdorffschen Näherungsfunktionen sich sehr leicht auch für große p berechnen lassen, sondern die Frage ist, ob das Verhältnis ihrer Sprünge zu denen der zu p gehörigen Treppenfunktionen an der gleichen Stelle x nach oben und nach unten hinreichend stark beschränkt ist, so daß man doch aus der Sprunggröße der Näherungsfunktion auf den Grad ihrer Annäherung an die Grenzfunktion schließen kann.

(Eingegangen am 24. April 1935.)

Verallgemeinerung einer Formel von Hacks.

Von

Otto Hölder in Leipzig.

§ 1.

Herleitung der Formel.

Im 38. Band dieser Zeitschrift habe ich eine Formel verallgemeinert und symmetrischer gestaltet, die Dirichlet in seiner Abhandlung „Über ein die Division betreffendes Problem" gegeben hat. Es gibt dazu eine Parallelformel von Hacks, aus der Hacks eine große Zahl interessanter Ergebnisse gefolgert hat[1]). Auch diese Parallelformel kann verallgemeinert und entsprechend gestaltet werden.

Eine reelle Funktion $z = f(y)$ soll für $\alpha \leqq y \leqq \alpha'$ endlich, eindeutig und stetig definiert sein und (im Sinne der Vorzeichen) beständig zunehmen, während y von α bis α' wächst. Diese Funktion hat dann eine Umkehrung $y = g(z)$, die gleichfalls immer wächst, wenn ihr Argument $f(\alpha)$ bis $f(\alpha')$ zunimmt[2]).

Ich denke mir nun noch zwei Folgen von reellen Zahlgrößen

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

und

(2) $$b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

deren Glieder beständig — natürlich mit Rücksicht auf das Vorzeichen — wirklich wachsen und schließlich gegen $+\infty$ gehen. Es sind also von jeder der Folgen in einem endlichen Zahlenintervall nur endlich viele Glieder enthalten[3]). Jede der beiden Folgen ist von der anderen gänzlich unabhängig; im besonderen Fall können sie auch teilweise oder ganz übereinstimmen. Den Gliedern der Folgen sollen noch gewisse Werte

---

[1]) Acta Math. 10 (1887), S. 16.

[2]) Der Unterschied gegen den anderen Fall beruht darin, daß in der Formel von Dirichlet die Funktion $f(z)$ mit zunehmendem Argument abnimmt. Es scheint, daß das neue Ergebnis nicht unmittelbar aus dem alten hergeleitet werden kann, obwohl die alte Beweisführung, die sich auf eine ursprünglich von Lipschitz herrührende Anordnung (Acta 2, S. 301) stützt, analog übertragen werden kann.

[3]) Diese Eigenschaft ist die wesentliche. Man könnte, falls sie besteht, die Folgen auch abbrechen lassen, da im Endergebnis (17) die Zahlen a, die jenseits des Intervalls $\alpha \ldots \alpha'$, und die Zahlen b, die jenseits des Intervalls $f(\alpha) \ldots f(\alpha')$ liegen, keine Rolle spielen.

$\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ zugeordnet und ihre summatorischen Funktionen mit Φ und Ψ bezeichnet werden, so daß also

$$\Phi(x) = \sum_{a \leqq x} \varphi(a), \quad \Psi(x) = \sum_{b \leqq x} \psi(b)$$

ist.

Aus den beiden Folgen (1) und (2) bilde ich jetzt ein Schema von Zahlenpaaren

$$\begin{array}{llllll} a_\mu, & b_1 & a_\mu, & b_2 & a_\mu, & b_3 \quad . \quad . \\ a_{\mu+1}, & b_1 & a_{\mu+1}, & b_2 & a_{\mu+1}, & b_3 \quad . \quad . \\ a_{\mu+2}, & b_1 & a_{\mu+2}, & b_2 & a_{\mu+2}, & b_3 \quad . \quad . \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \quad . \quad . \\ a_\nu, & b_1 & a_\nu, & b_2 & a_\nu, & b_3 \quad . \quad ., \end{array} \tag{3}$$

in dem jede Zeile von einer Zahlgröße a und jede Spalte von einer Zahlgröße b beherrscht wird. a_μ soll dabei die erste Zahl der Reihe (1) sein, die $> \alpha$, und a_ν die letzte Zahl der Folge, die $\leqq^r \alpha'$ ist, so daß also von vornherein die Zeilen dabei weggelassen sind, in denen $a \leqq \alpha$ und $a > \alpha'$ ist. Außerdem sollen aber noch alle die Stellen des Schemas gelöscht werden, in denen nicht

$$b \leqq f(a) \tag{4}$$

ist.

Auf jede Stelle a, b, die nunmehr noch übriggeblieben ist, wird, ohne Änderung der Ordnung der Stellen, das Produkt $\varphi(a) \cdot \psi(b)$ gesetzt, und es soll nun die Summe der Produkte

$$\begin{array}{llll} \varphi(a_\mu) \times \psi(b_1) & \varphi(a_\mu) \times \psi(b_2) & \varphi(a_\mu) \times \psi(b_3) & . \quad . \\ \varphi(a_{\mu+1})\ \psi(b_1) & \varphi(a_{\mu+1})\ \psi(b_2) & \varphi(a_{\mu+1})\ \psi(b_3) & . \quad . \\ \varphi(a_{\mu+2})\ \psi(b_1) & \varphi(a_{\mu+2})\ \psi(b_2) & \varphi(a_{\mu+2})\ \psi(b_3) & . \quad . \\ & & & . \quad . \\ \varphi(a_\nu) \times \psi(b_1) & \varphi(a_\nu) \times \psi(b_2) & \varphi(a_\nu) \times \psi(b_3) & . \quad . \end{array} \tag{5}$$

über die nicht gelöschten Stellen berechnet werden. Summiert man zunächst in der durch ein bestimmtes a beherrschten Zeile, so kommt

$$\varphi(a)\,\{\psi(b_1) + \psi(b_2) + \ldots\}.$$

Man muß in der Klammer aufhören, unmittelbar ehe $b > f(a)$ geworden ist. Die Summe in der Zeile ergibt also

$$\varphi(a)\,\Psi(f(a)).$$

Sollte gar kein b vorhanden sein, das kleiner oder gleich dem betreffenden $f(a)$ wäre, so würde die Formel doch stimmen, da

$$\Psi(f(a)) = 0$$

wäre. *Die Summe aller Produkte* aus *allen Zeilen von* (5) *ist*

$$\sum_{\alpha < a \leqq \alpha'} \varphi(a)\ \Psi((f(a)). \tag{6}$$

Jetzt soll zuerst in den Spalten summiert werden. Die Glieder der ϱ-ten Spalte des Schemas (3) sind dann, wenn $b_\varrho \leqq f(\alpha)$ ist, alle vorhanden, da die Zahlgrößen $a_\mu, a_{\mu+1}, \ldots a_\nu$ alle $> \alpha$, und also die $f(a_\mu)$, $f(a_{\mu+1}), \ldots f(a_\nu)$ alle $> f(\alpha)$ und somit $> b_\varrho$ sind. Die Summe, welche die Produkte aus dieser Spalte von (5) ergeben, ist somit

$$\psi(b_\varrho)\{\varphi(a_\mu) + \varphi(a_{\mu+1}) + \ldots + \varphi(a_\nu)\} = \psi(b_\varrho)\,(\Phi(\alpha') - \Phi(\alpha)).$$

Aus allen den Spalten, deren $b \leqq f(\alpha)$ *ist, kommt so die Summe*

$$\Psi(f(\alpha))\,(\Phi(\alpha') - \Phi(\alpha)). \tag{7}$$

Betrachten wir nun die σ-te Spalte, wobei $b_\sigma > f(\alpha)$ sein soll. Die Summe der Produkte aus dieser Spalte, falls überhaupt Glieder in dieser Spalte stehen, ist

$$\psi(b_\sigma)\{\varphi(\bar{a}) + \ldots + \varphi(a_{\nu-1}) + \varphi(a_\nu)\}. \tag{8}$$

Dabei bedeutet $\bar{a}, b_\sigma$ das erste nicht gelöschte Zahlenpaar in der σ-ten Spalte in (3), d. h. es ist $\bar{a}$ die erste von den Zahlgrößen

$$a_\mu, a_{\mu+1}, \ldots a_\nu, \tag{9}$$

für die $b_\sigma \leqq f(a)$ ist. Um die letzte Ungleichung umkehren zu können, müssen wir erst erkennen, daß b_σ in dem Intervall liegt, in dem die Umkehrfunktion $z = g(y)$ der Funktion $y = f(z)$ definiert ist. Wenn nun für ein a aus (9) gilt, daß $b_\sigma \leqq f(a)$ ist, so hat man für dieses a

$$f(\alpha) < b_\sigma \leqq f(a) \leqq f(\alpha'). \tag{10}$$

Es liegt also in der Tat b_σ in dem fraglichen Intervall $f(\alpha) \ldots f(\alpha')$ und man erhält durch Umkehrung aus der Ungleichung (10)

$$\alpha < g(b_\sigma) \leqq a \leqq \alpha'. \tag{11}$$

Aus der letzten Ungleichung ergibt sich, daß die Summe (8) der aus der σ-ten Spalte herrührenden Produkte in der Form

$$\psi(b_\sigma) \sum_{g(b_\sigma) \leqq a \leqq \alpha'} \varphi(a) \tag{12}$$

geschrieben werden kann. Nun muß man unterscheiden, ob für die oben definierte Zahlgröße $\bar{a}$ die Ungleichung $b_\sigma < f(\bar{a})$ oder die Gleichung $b_\sigma = f(\bar{a})$ gilt. Im ersten Fall ist $g(b_\sigma) < \bar{a}$, d. h. wirklich kleiner als alle die Zahlen a, die in die Summe von (8) eingehen, Der Ausdruck (8) bzw. (12) ist dann also gleich

$$\psi(b_\sigma) \sum_{g(b_\sigma) < a \leqq \alpha'} \varphi(a) = \psi(b_\sigma)\,(\Phi(\alpha') - \Phi(g(b_\sigma))). \tag{13}$$

Im anderen Fall ist aber $g(b_\sigma) = \bar{a}$, was wir jetzt a_σ nennen wollen. In diesem Fall enthält der Ausdruck (12) ein Glied mehr als (13), nämlich das Glied

$$\psi(b_\sigma)\,\varphi(a_\sigma). \tag{14}$$

Man hat nun *die Ergebnisse aus den Spalten, in denen* $b > f(\alpha)$ *ist*, zusammenzufassen. Dazu muß man zunächst in (13) über b_σ unter der Bedingung $f(\alpha) < b \leqq f(\alpha')$, die sich aus (10) ergibt, summieren. Dadurch erhält man

$$\sum_{f(\alpha) < b \leqq f(\alpha')} \psi(b)\,\big(\Phi(\alpha') - \Phi(g(b))\big)$$

oder, wenn man über die beiden Teile einzeln summiert,

$$\Phi(\alpha')\,\big(\Psi(f(\alpha')) - \Psi(f(\alpha))\big) - \sum_{f(\alpha) < b \leqq f(\alpha')} \psi(b)\,\Phi(g(b)). \tag{15}$$

Dazu treten aber unter Umständen noch Glieder der Form (14) hinzu. Die Summe dieser Glieder kann mit

$$\sum_{b = f(a),\ \alpha < a \leqq \alpha'} \varphi(a)\,\psi(b) \tag{16}$$

bezeichnet werden.

Der bei der Summation nach Zeilen erhaltene Ausdruck (6) muß nun gleich der Summe der anderen in den Spalten erzielten Ergebnisse, also gleich der Summe von (7) und (15) sein, wozu dann unter Umständen noch der Ausdruck (16) hinzukommt. *Man erhält so als Schlußergebnis:*

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha < a \leqq \alpha'} \varphi(a)\,\Psi(f(a)) + \sum_{f(\alpha) < b \leqq f(\alpha')} \psi(b)\,\Phi(g(b)) \\ &\quad = \Phi(\alpha')\,\Psi(f(\alpha')) - \Phi(\alpha)\,\Psi(f(\alpha)) + \sum_{b = f(a),\ \alpha < a \leqq \alpha'} \varphi(a)\,\psi(b). \end{aligned} \tag{17}$$

Bezeichnet man die Enden des oben von z *beschriebenen Intervalls gleichzeitig noch mit* β *und* β', *so ist*

$$f(\alpha) = \beta, \quad f(\alpha') = \beta', \quad \alpha = g(\beta), \quad \alpha' = g(\beta'),$$

und man erkennt nach Einführung der auf β *und* β' *zurückgeführten Summationsgrenzen, daß die Formel* (17) *tatsächlich ganz symmetrisch gebaut ist.* Das letzte Glied auf der rechten Seite ist nichts anderes als die Summe

$$\Sigma\,\varphi(a)\,\psi(b)$$

über alle die Zahlenpaare a, b, die durch die Relation $b = f(a)$, bzw. $a = g(b)$, *gebunden* sind und dem Intervall $\alpha < a \leqq \alpha'$, bzw. $f(\alpha) < b \leqq f(\alpha')$, angehören. Solche gebundenen Zahlenpaare aus den Folgen (1) und (2) brauchen aber nicht vorhanden zu sein.

§ 2.

Beispiele.

Um ein einfaches Beispiel zu bekommen, will ich zunächst $\varphi(a) = 1$ und $\psi(b) = 1$, außerdem $y = f(z) = z$ setzen. Wenn dann $[\xi]'$ die Anzahl der Zahlen a der Folge (1) und $[\xi]''$ die Anzahl der Zahlen b der Folge (2) bedeutet, die $\leqq \xi$ sind, so folgt aus der Formel (17), daß

$$\sum_{\alpha < a \leqq \alpha'} [a]'' + \sum_{\alpha < b \leqq \alpha'} [b]' = [\alpha']'\,[\alpha']'' - [\alpha]'\,[\alpha]'' + \mathsf{P}$$

ist, wobei P die Anzahl der mit Zahlen b zusammenfallenden Zahlen a im Intervall $\alpha < a \leqq \alpha'$ bedeutet.

Nehmen wir jetzt weiter an, daß keine Zahl a mit einer Zahl b zusammenfällt, und daß alle diese Zahlen positiv sind, so ergibt sich mit $\alpha = 0$ und $\alpha' = x > 0$ die Gleichung

$$\sum_{a \leqq x} [a]'' + \sum_{b \leqq x} [b]' = [x]'\,[x]''. \tag{18}$$

Sollen jetzt noch die Zahlen a und b *ganze* positive Zahlen sein und zusammen die sämtlichen natürlichen Zahlen ausmachen, so ist $[n]' + [n]''$ gleich der Gesamtzahl aller natürlichen Zahlen $\leqq n$, also für jedes ganze n

$$n = [n]' + [n]'',$$

und somit

$$\sum_{a \leqq x} [a]' + \sum_{a \leqq x} [a]'' + \sum_{b \leqq x} [b]' + \sum_{b \leqq x} [b]'' = \sum_{n \leqq x} n = \frac{[x]\,([x]+1)}{2}. \tag{19}$$

Nun ist auch

$$[x] = [x]' + [x]'',$$

und man erhält, wenn man so $[x]$ auf der rechten Seite von (19) ersetzt und dann von der resultierenden Gleichung (18) subtrahiert

$$\sum_{a \leqq x} [a]' + \sum_{b \leqq x} [b]'' = \tfrac{1}{2}\,([x]'^2 + [x]''^2 + [x]' + [x]''). \tag{20}$$

Die Gleichungen (18) und (20) sind z. B. dann anwendbar, wenn die a bzw. die b die natürlichen Zahlen ungerader bzw. gerader Zusammensetzung bedeuten[4]).

Für ein zweites Beispiel will ich jede der Folgen (1) und (2) mit der Gesamtheit der natürlichen Zahlen übereinstimmen lassen, also $a = b = n$ setzen. Außerdem soll wieder $y = f(z) = z$, aber jetzt

$$\varphi(n) = \psi(n) = \lambda(n)$$

---

[4]) Ich verstehe unter einer Zahl ungerader bzw. gerader Zusammensetzung eine solche, die ein Produkt aus einer ungeraden bzw. geraden Anzahl von (gleichen oder ungleichen) Primfaktoren ist.

sein, wo $\lambda(n)$ die bekannte zahlentheoretische Funktion bedeutet, die für die Zahlen gerader Zusammensetzung gleich $+1$ und für die anderen gleich -1 ist. Die summatorische Funktion der $\lambda(n)$ werde in der üblichen Weise mit $L(x)$ bezeichnet:

$$L(x) = \sum_{n \leqq x} \lambda(n).$$

Die Formel (17) gibt dann mit $\alpha = 0$ und $\alpha' = x > 0$

$$2 \sum_{n \leqq x} \lambda(n) L(n) = (L(x))^2 + [x], \tag{21}$$

da ja das letzte Glied von (17) eine Summe aus lauter Größen $\lambda^2(n) = +1$ ist in der Anzahl $[x]$.

Die Gleichung (21) ist aber nicht etwa für die zahlentheoretische Funktion $\lambda(n)$ charakteristisch, sie gilt für jede Funktion, welche den natürlichen Zahlen die Werte $+1$ und -1 nach irgendeinem Gesetz zuteilt, wenn nur $L(x)$ die zu derselben Funktion gehörende summatorische Funktion bedeutet. Die Gleichung läßt sich auch leicht unmittelbar einsehen, wenn man den Übergang von x in $x+1$ überdenkt.

(Eingegangen am 10. Mai 1935.)

Über konvexe Funktionen.

Von

M. Krafft in Marburg.

1. W. Blaschke und G. Pick[1]) haben den ersten und, soviel mir bekannt ist, auch den einzigen Beweis für folgenden von Ph. Frank vermuteten Satz[2]) geliefert:

Unter allen positiven normierten konvexen Funktionen $\varphi(x)$ *macht entweder*

$$\varphi(x) = x\sqrt{3}$$

oder

$$\varphi(x) = (1-x)\sqrt{3}$$

(oder beide diese Funktionen) die Größe

$$(\varphi(x),\ h(x)) = \int_0^1 \varphi(x)\, h(x)\, dx$$

zu einem Minimum, wenn $h(x)$ *eine beliebige gegebene positive konvexe Funktion bedeutet.*

„Normiert" bedeutet hier, wie gebräuchlich, $\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx = 1$, „konvex" (genauer: „von oben konvex"), daß immer

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \varphi(x_1) \\ 1 & x_2 & \varphi(x_2) \\ 1 & x_3 & \varphi(x_3) \end{vmatrix} \leqq 0 \tag{1}$$

wird, sofern nur $x_1 < x_2 < x_3$ ist[3]).

Zum Beweise benutzen Blaschke und Pick eine bemerkenswerte Darstellung der konvexen Funktionen durch Stieltjesintegrale. Diese ist im Grunde eine Darstellung mit Hilfe der Greenschen Funktion des Differentialausdrucks $D\langle y\rangle = y''$.

---

[1]) W. Blaschke und G. Pick, Distanzschätzungen im Funktionenraum II, Math. Annalen **77** (1916), S. 277—300.

[2]) a. a. O. S. 300.

[3]) a. a. O. S. 278. „Konvex" bedeutet hier also gerade das, was bei Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre leurs valeurs moyennes, Acta math. **30** (1906), S. 175—201, „konkav" genannt wird. Für die Theorie der konvexen Funktionen vgl. außer dieser Arbeit von Jensen noch F. Bernstein und G. Doetsch, Zur Theorie der konvexen Funktionen, Math. Annalen **76** (1915), S. 514—526.

Im folgenden soll nun eine sehr weitreichende Verallgemeinerung des angegebenen Satzes von Blaschke und Pick mit viel einfacheren Hilfsmitteln und wesentlich kürzer bewiesen werden. Die Voraussetzung der Konvexität von $h(x)$ ist nämlich völlig entbehrlich, es genügt die Integrierbarkeit von $h(x)$[4]). Die soeben erwähnte Integraldarstellung der konvexen Funktionen tritt beim Beweis nur in sehr starker Zurückbildung und Verkümmerung auf als Approximation konvexer Funktionen durch konvexe Polygone — der Grenzübergang, der, sofort ausgeführt, zur Integraldarstellung führen würde, wird ganz an das Ende des Beweises verschoben.

2. Zur Bequemlichkeit des Lesers sollen zunächst die später benutzten Eigenschaften der konvexen Funktionen zusammengestellt werden. Alle diese Eigenschaften können ohne besondere Schwierigkeiten aus (1) hergeleitet werden. Wir legen als Definitionsintervall unserer Funktionen stets das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ zugrunde.

Ist $\varphi(x)$ konvex, so existiert in jedem inneren Punkt des Intervalls $\langle 0,1 \rangle$ die rechtsseitige und linksseitige Ableitung $\varphi'_+(x)$ und $\varphi'_-(x)$. Ist $0 < x < \xi < 1$, so gilt, wie sich beim Beweis der Existenz von $\varphi'_+(x)$ und $\varphi'_-(x)$ ergibt,

$$\varphi'_-(x) \geqq \varphi'_+(x) \geqq \frac{\varphi(\xi) - \varphi(x)}{\xi - x} \geqq \varphi'_-(\xi) \geqq \varphi'_+(\xi). \tag{2}$$

Das bedeutet, daß $\varphi'_-(x)$ und $\varphi'_+(x)$ monotone nicht zunehmende Funktionen von x sind, ebenso der Differenzenquotient $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ mit $h = \text{const} > 0$.

Die Existenz der einseitigen Ableitungen enthält die Stetigkeit von $\varphi(x)$ für $0 < x < 1$. Ist $\varphi(x)$ überdies nach unten beschränkt (das wird hier allein gebraucht, da später $\varphi(x) \geqq 0$ vorausgesetzt wird), so folgt, daß $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ und $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$ existieren. Wir dürfen daher später ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\varphi(x)$ sogar für $0 \leqq x \leqq 1$ stetig ist.

Bedeutet $\varphi'(x)$ die „mittlere Ableitung" von $\varphi(x)$, d. h.

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2}(\varphi'_+(x) + \varphi'_-(x)) \tag{3}$$

(auch $\varphi'(x)$ ist, wie man sofort sieht, monoton nicht zunehmend), und ist $0 < \xi < 1$, so liest man aus (2) sofort die für alle x aus $\langle 0,1 \rangle$ gültige Ungleichung ab:

$$\varphi(\xi) - \varphi(x) + \varphi'(\xi)(x - \xi) \geqq 0. \tag{4}$$

---

[4]) Dies ist für die naheliegenden Anwendungen, z. B. auf Fourierreihen, wichtig.

(4) bedeutet, daß die Gerade $y = \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)(x - \xi)$ Stützgerade an die Kurve $y = \varphi(x)$ ist.

Aus (4) und der Monotonie von $\varphi'(\xi)$ erhält man weiter

$$\lim_{\xi \to 0} \xi \varphi'(\xi) = \lim_{\xi \to 1} (1 - \xi) \varphi'(\xi) = 0. \tag{5}$$

Unter den positiven normierten konvexen Funktionen nehmen eine ausgezeichnete Stellung die abteilungsweise linearen Funktionen ein, insbesondere die von Frank, Pick und Blaschke mit $\hat{\varphi}(x, t)$ bezeichneten Funktionen. Diese sind definiert durch

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x, 0) &= \sqrt{3}(1 - x), \\ \hat{\varphi}(x, t) &= \begin{cases} \sqrt{3}\,\dfrac{x}{t} & \text{für } x \leqq t \\ \sqrt{3}\,\dfrac{1-x}{1-t} & \text{für } x \geqq t \end{cases} \quad (0 < t < 1), \\ \hat{\varphi}(x, 1) &= \sqrt{3}\,x. \end{aligned} \tag{6}$$

Für alle diese Funktionen ist (Normierung)

$$\int_0^1 \hat{\varphi}^2(x, t)\, dx = 1 \tag{6'}$$

und

$$\int_0^1 \hat{\varphi}(x, t)\, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{6''}$$

3. $h(x)$ sei eine im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktion, die folgende Voraussetzungen erfüllt:

(V)
1. $h(x) \geqq 0$ für $0 \leqq x \leqq 1$,
2. $h(x)$ L-integrierbar in $\langle 0{,}1 \rangle$,
3. $\int_0^1 h(x)\, dx > 0$.

Es wird — darauf sei zur Vermeidung von Irrtümern hingewiesen — *nicht* vorausgesetzt, daß $h(x)$ konvex ist. Die Voraussetzung (V_3) dient nur der Ausscheidung eines trivialen Falles, den mitzuschleppen lästig wäre. Wir beweisen jetzt folgende Verallgemeinerung des Satzes von Blaschke und Pick:

Ist $h(x)$ eine beliebige gegebene Funktion mit den Eigenschaften (V) *und durchläuft $\varphi(x)$ alle positiven normierten konvexen Funktionen, so gehören die $\varphi(x)$, welche*

$$\int_0^1 h(x)\, \varphi(x)\, dx$$

zum Minimum machen, sämtlich zu den Funktionen $\hat{\varphi}(x, t)$.

Zum Beweis betrachten wir zunächst die mit $h(x)$ und den Funktionen $\hat{\varphi}(x, t)$ gebildete Hilfsfunktion

$$H(t) = \int_0^1 h(x)\,\hat{\varphi}(x, t)\,dx \tag{7}$$

oder ausführlich geschrieben

$$H(0) = \sqrt{3}\int_0^1 h(x)(1-x)\,dx,$$

$$H(t) = \frac{\sqrt{3}}{t}\int_0^t h(x)\,x\,dx + \frac{\sqrt{3}}{1-t}\int_t^1 h(x)(1-x)\,dx \quad (0<t<1), \tag{8}$$

$$H(1) = \sqrt{3}\int_0^1 h(x)\,x\,dx.$$

Aus (6) sieht man unmittelbar, daß $H(t)$ für $0 < t < 1$ stetig ist. $H(t)$ ist aber sogar für $0 \leqq t \leqq 1$ stetig. Es genügt, das für $t = 0$ zu beweisen, da man den Fall $t = 1$ durch Spiegelung an $t = \frac{1}{2}$ auf jenen zurückführen kann. Da $\hat{\varphi}(x, t)$ als Funktion zweier Veränderlicher im Quadrat $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ beschränkt und abgesehen von den Ecken $(0, 0)$ und $(1, 1)$ stetig ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus (V_2).

Nach dem Satz von Weierstraß über stetige Funktionen gibt es ein $t = t^*$, für welches $H(t)$ zu einem Minimum wird. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß es mehrere t-Werte gibt, für die $H(t)$ sein Minimum annimmt, das zeigt schon das einfachste Beispiel $h(x) = \text{const}$. Tritt das ein, so ist t^* irgendeiner dieser t-Werte.

Es sei jetzt $\varphi(x)$ *kein* $\hat{\varphi}(x, t)$. Wenn wir zeigen können, daß dann

$$\int_0^1 h(x)\,\varphi(x)\,dx > \int_0^1 h(x)\,\hat{\varphi}(x, t^*)\,dx \tag{9}$$

ist, so ist unser Satz bewiesen. Um (9) zu beweisen, approximieren wir zunächst $\varphi(x)$ durch ein einbeschriebenes Polygon. Wir schreiben die Abszissen der Ecken dieses Polygons

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = 1 \tag{10}$$

so vor, daß

$$t_n = 1 - t_1 \tag{10'}$$

ist und daß

$$t_{j+1} - t_j \leqq t_1 \text{ für } j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{10''}$$

Die Koordinaten der Ecken sind also $(t_j, \varphi(t_j))$. Die zur Abszisse x gehörige Ordinate dieses Polygons soll $p_n(x)$ heißen.

Im Intervall $t_j \leqq x \leqq t_{j+1}$ ist $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$

$$0 \leqq \varphi(x) - p_n(x) \leqq (\varphi'(t_j) - \varphi'(t_{j+1}))(t_{j+1} - t_j). \tag{11}$$

Die linke Seite dieser, anschaulich-geometrisch übrigens völlig trivialen, Ungleichung ist nur eine andere Form von (1), die rechte erhält man aus der Gleichung der Polygonseite und (3) unter Berücksichtigung der Monotonie von $\varphi'(x)$. Wegen dieser Monotonie und (10′), (10″) kann man (11) sofort ersetzen durch

$$0 \leqq \varphi(x) - p_n(x) \leqq (\varphi'(t_1) - \varphi'(1 - t_1))\, t_1. \tag{12}$$

Im Intervall $0 \leqq x \leqq t_1$ gilt

$$p_n(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi(t_1) - \varphi(0)}{t_1} x \geqq \varphi(0) + \varphi'(t_1)\, x$$

und wegen (4)

$$\varphi(x) \leqq \varphi(t_1) + \varphi'(t_1)(x - t_1),$$

also

$$0 \leqq \varphi(x) - p_n(x) \leqq (\varphi(t_1) - \varphi(0)) - t_1 \varphi'(t_1) \tag{12′}$$

und ebenso im Intervall $1 - t_1 = t_n \leqq x \leqq 1$

$$\begin{aligned} 0 \leqq \varphi(x) - p_n(x) &\leqq (\varphi(t_n) - \varphi(1)) - (1 - t_n)\varphi'(t_n) \\ &= (\varphi(1 - t_1) - \varphi(1)) - t_1 \varphi'(1 - t_1). \end{aligned} \tag{12″}$$

Weil $\varphi(x)$ bei $x = 0$ und $x = 1$ stetig ist (vgl. Abschnitt 2) und weil (5) gilt, so haben wir mit (12), (12′), (12″) bewiesen, daß $p_n(x)$ für $0 \leqq x \leqq 1$ gleichmäßig gegen $\varphi(x)$ strebt, wenn $t_1 \to 0$ geht.

Die Funktion $p_n(x)$ läßt sich nun durch die $\hat{\varphi}(x, t)$ darstellen in der Form

$$p_n(x) = \sum_0^{n+1} c_j^{(n)}\, \hat{\varphi}(x, t_j), \tag{13}$$

wobei die Konstanten $c_j^{(n)} \geqq 0$ sind. Man braucht nur die $c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, \ldots$ so zu bestimmen, daß in $p_n(x) - c_j^{(n)} \hat{\varphi}(x, t_j)$ die Ecke des Polygons bei t_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ in Fortfall kommt. Das ist nur mit $c_j^{(n)} \geqq 0$ möglich.

$$p_n(x) - \sum_1^n c_j^{(n)}\, \hat{\varphi}(x, t_j)$$

ist dann eine lineare Funktion, die für $x = 0$ und $x = 1$ sicher nicht negativ ist, sich also durch $\hat{\varphi}(x, 0)$ und $\hat{\varphi}(x, 1)$ linear homogen mit positiven Koeffizienten darstellen läßt.

(13) und (7) ergeben nun

$$\int_0^1 h(x)\, p_n(x)\, dx = \sum_j c_j^{(n)} H(t_j) \geqq H(t^*) \sum_j c_j^{(n)}, \tag{14}$$

(13) und (6″)

$$\int_0^1 p_n(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_j c_j^{(n)}. \tag{15}$$

Wir führen nun noch die zu (7) analoge Funktion

$$\Phi(t) = \int_0^1 \varphi(x)\,\hat{\varphi}(x,t)\,dx \tag{16}$$

ein. Da $\varphi(x)$ die Voraussetzungen (V) erfüllt, weil dies jede positive normierte konvexe Funktion tut, so ist $\Phi(t)$ stetig, es gibt daher ein $t = t^{**}$ so, daß

$$\Phi(t^{**}) = \text{Maximum } \Phi(t) \tag{16'}$$

ist. Es ist

$$\Phi(t^{**}) < 1. \tag{16''}$$

Dies folgt daraus, daß $\varphi(x)$ kein $\hat{\varphi}(x,t)$ ist, also

$$\int_0^1 (\varphi(x) - \hat{\varphi}(x,t))^2\,dx > 0$$

ist, zusammen mit der Normierung von $\varphi(x)$ und $\hat{\varphi}(x,t)$. Mit (16) erhalten wir

$$\int_0^1 \varphi(x)\,p_n(x)\,dx = \sum c_j^{(n)}\,\Phi(t_j) \leqq \Phi(t^{**}) \sum_j c_j^{(n)}. \tag{17}$$

Nun machen wir in (14), (15), (17) den Grenzübergang $\lim t_1 = 0$. Dann besagt (15)

$$\lim_{t_1 \to 0} \sum_j c_j^{(n)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \varphi(x)\,dx \text{ existiert,}$$

und (17) wegen der Normierung von $\varphi(x)$

$$\Phi(t^{**}) \lim \sum_j c_j^{(n)} \geqq 1, \tag{17*}$$

d. h. wegen (16″)

$$\lim \sum_j c_j^{(n)} > 1. \tag{16*}$$

Dies eingesetzt in (14) nach dem Grenzübergang gibt schließlich

$$\int_0^1 h(x)\,\varphi(x)\,dx > H(t^*) = \int_0^1 h(x)\,\hat{\varphi}(x,t^*)\,dx. \tag{9}$$

Unser Satz ist damit bewiesen.

4. Der Satz von Blaschke und Pick geht insofern über unsern Satz hinaus, als er das t^*, welches das Minimum liefert, wirklich angibt. Auch das können wir in weiterem Umfang als Blaschke und Pick leisten. Wir zeigen nämlich:

Ist $h(x)$ monoton steigend (fallend), so gilt dasselbe für $H(t)$, es ist also $t^* = 0$ ($t^* = 1$). — Ist $h(x)$ konvex, so gilt dasselbe für $H(t)$, es ist also $t^* = 0$ oder $t^* = 1$, unter Umständen sind beide Werte möglich.

Zum Beweis bilden wir die Ableitung von $H(t)$, wobei wir allerdings $h(x)$ eine weitere Bedingung auferlegen:

Ist $h(x)$ von beschränkter Schwankung (dies ist z. B. der Fall, wenn $h(x)$ monoton oder wenn $h(x)$ konvex ist), so ist für $0 < t < 1$ das $H(t)$ differenzierbar, und es ist

$$H'(t) = -\frac{\sqrt{3}}{t^2}\int_0^t h(x)\,x\,dx + \frac{\sqrt{3}}{(1-t)^2}\int_t^1 h(x)\,(1-x)\,dx. \tag{18}$$

Wir brauchen dies nur für monotones $h(x)$ zu zeigen.

Schwierigkeiten machen nur die möglichen Sprungstellen von $h(x)$. In diesen existieren aber die Grenzwerte $h(x+0)$ und $h(x-0)$. Da die rechte Ableitung von $\int_0^t h(x)\,x\,dx$ gleich $h(t+0)\,t$, die von $\int_t^1 h(x)\,(1-x)\,dx$ gleich $-h(t+0)\,(1-t)$ ist, und entsprechendes für die linke Ableitung gilt, so ergibt (8) sofort (18). $H'(t)$ ist stetig für $0 < t < 1$ [5]).

Durch Substitution neuer Integrationsveränderlicher kann man (18) in die Form bringen

$$H'(t) = \sqrt{3}\int_0^1 \big(h(1-\xi(1-t)) - h(t\xi)\big)\,\xi\,d\xi. \tag{19}$$

Es ist nun $(1-\xi(1-t)) - \xi t = 1-\xi > 0$ und unabhängig von t.

Ist $h(x)$ monoton steigend (fallend), so ist damit der Integrand nie negativ (nie positiv), d. h. $H'(t) \geqq 0$ (bzw. $H'(t) \leqq 0$), also $H(t)$ ebenfalls monoton

[5]) Übrigens kann man auch $H'(0)$ und $H'(1)$ bilden. Es ist

$$H'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}h(+0) + \sqrt{3}\int_0^1 h(x)\,(1-x)\,dx,$$

$$H'(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}h(1-0) - \sqrt{3}\int_0^1 h(x)\,x\,dx$$

und $H'(t)$ ist sogar für $0 \leqq t \leqq 1$ stetig. Die Formel (19) gilt dann auch für $t = 0$ und $t = 1$, wenn unter $h(0)$ und $h(1)$ die Grenzwerte $h(+0)$ und $h(1-0)$ verstanden werden.

steigend (fallend). Dabei ist $H(t)$ konstant nur, wenn auch $h(x) = \text{const}$ für $0 < x < 1$.

Ist $h(x)$ aber konvex, so bilden wir mit $\tau > t$ die Differenz

$$H'(\tau) - H'(t)$$

$$(20) \qquad = \int_0^1 \left(\frac{h(1-\xi(1-\tau)) - h(\tau\xi)}{1-\xi} - \frac{h(1-\xi(1-t)) - h(t\xi)}{1-\xi} \right) (1-\xi)\,\xi\,d\xi.$$

Die Klammer ist die Differenz zweier Differenzenquotienten mit der gleichen Spanne $1 - \xi$. Da aber, wie im Anschluß an Formel (2) bemerkt, diese Differenzenquotienten monoton fallen und $\tau\xi \geqq t\xi$ ist, so ist der Integrand in (20) sicher nicht positiv, d. h.

$$H'(\tau) \leqq H'(t) \text{ für } \tau > t.$$

Die Monotonie der Ableitung ist aber hinreichend für die Konvexität von $H(t)$.

Königsberg i. Pr., Januar 1935.

(Eingegangen am 12. Mai 1935.)

Some Easier Waring's Problems.

By

K. Subba Rao in Vizianagram (India).

1. In Waring's Problem, $g(k)$ is defined as the least s such that every positive integer n can be expressed in the form

$$n = x_1^k + \ldots + x_s^k,$$

where x_i is positive or zero.

For given k, I define $\delta(k)$ as the least value of s such that a constant $c\,[= c(k) \neq 0]$ can be expressed in the form

$$c = a_1 x_1^k + \ldots + a_s x_s^k$$

infinitely often where $a_i = \pm 1$ and the x_i's are positive integers.

Also, I define $\varepsilon(k)$ as the least value of s such that zero can be expressed in the form

$$0 = a_1 x_1^k + \ldots + a_s x_s^k$$

infinitely often where $a_i = \pm 1$ and the x_i's are positive integers.

(I should add that solutions like

$$1 = 1^k + x^k - x^k$$

$$\text{or } 0 = x^k - x^k + y^k - y^k, \text{ etc.,}$$

are to be regarded as trivial.)

I prove

Theorem 1:

$$\delta(k) \leqq 2^k.$$

Theorem 2:

$$\varepsilon(k) \leqq 2^{k+1}.$$

We have [1])

$$\text{(I)} \qquad (x+k)^k - \binom{k}{1}(x+k-1)^k + \ldots + (-1)^k x^k = k!$$

and

$$\text{(II)} \qquad (x+k+1)^k - \binom{k+1}{1}(x+k)^k + \ldots + (-1)^{k+1} x^k = 0.$$

There are 2^k terms on the left hand side of (I) and 2^{k+1} terms on the left hand side of (II).

Hence the results stated follow.

2. These results can be considerably improved for particular values of k. I prove here

[1]) The results (I) and (II) are well known for the sums on the left hand sides of (I) and (II) are respectively the k^{th} and $(k+1)^{\text{th}}$ differences of x^k.

Theorem 3:

$$\delta(2) = 3,$$
$$\varepsilon(2) = 3.$$

We have

$$(3x+1)^3 - (5x+3)^2 + (4x+3)^2 = 1.$$

This proves

$$\delta(2) \leqq 3.$$

Now, since $c = x^2 \pm y^3$ has only a finite number of solutions, we see that $\delta(2)$ cannot be less than 3.

So

$$\delta(2) = 3.$$

Again, we have

$$(m^2 - n^2)^2 - (m^2 + n^2)^2 + (2mn)^2 = 0$$

which proves

$$\varepsilon(2) \leqq 3.$$

Since

$$0 = x^2 - y^2$$

is trivial and

$$0 = x^2 + y^2$$

is not possible for real x and y, we cannot have $\varepsilon(2)$ less than 3.

Thus

$$\varepsilon(2) = 3.$$

Theorem 4:

$$\delta(3) = 3,$$
$$\varepsilon(3) = 4.$$

We have

$$(6x^3+1)^3 - (6x^3-1)^3 - (6x^2)^3 = 2.$$

Hence

$$\delta(3) \leqq 3.$$

Since $c = x^3 \pm y^3$, has only a finite number of solutions, it follows that

$$\delta(3) = 3.$$

Again, the identity [2])

$$(6a^2 - 4ab + 4b^2)^3 - (3a^2 + 5ab - 5b^2)^3 - (4a^2 - 4ab + 6b^2)^3 - (5a^2 - 5ab - 3b^2)^3 = 0$$

proves that

$$\varepsilon(3) \leqq 4.$$

Since $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ is impossible in integers, it now follows that

$$\varepsilon(3) = 4.$$

Theorem 5:

$$\delta(4) \leqq 5,$$
$$\varepsilon(4) = 4.$$

---

[2]) Srinivasa Ramanujan's Collected Papers, p. 326.

We have the identity [3])

$$(5m^2+15n^2)^4 = (3m^2+9n^2)^4 + (2m^2+12mn-6n^2)^4 + (4m^2+12n^2)^4 + (2m^2-12mn-6n^2)^4 + (4m^2-12n^2)^4.$$

From the theory of the Pellian equation, it follows that $4m^2 - 12n^2 = 4$ has infinitely many solutions $m_r, n_r (r = 1, 2, 3, \dots)$.

Hence

$$4^4 = 256 = (5m_r^2+15n_r^2)^4 - (3m_r^2+9n_r^2)^4 - (2m_r^2+12m_rn_r-6n_r^2)^4 - (4m_r^2+12n_r^2)^4 - (2m_r^2-12m_rn_r-6n_r^2)^4.$$

Therefore

$$\delta(4) \leqq 5.$$

Since $c = x^4 \pm y^4$ has only a finite number of solutions,

$$\delta(4) \geqq 3.$$

Hence

$$3 \leqq \delta(4) \leqq 5.$$

Since, by Euler [4]),

$$A^4 + B^4 - C^4 - D^4 = 0$$

has infinitely many solutions,

$$\varepsilon(4) \leqq 4.$$

Moreover, since $x^4 + y^4 = z^4$ is impossible in integers, it follows that

$$\varepsilon(4) = 4.$$

Theorem 6:

$$\delta(5) \leqq 9,$$
$$\varepsilon(5) \leqq 6.$$

By making use of the identity [5])

$$2\cdot 5^5 = (50t^5+5)^5 + (20t^2)^5 + (12t^2)^5 + (9t^2)^5 + (6t^2)^5 - (50t^5-5)^5 - (50t^4)^5 - (25t^2)^5 - (2t^2)^5,$$

we prove

$$\delta(5) \leqq 9.$$

Since $c = x^5 \pm y^5$ has only a finite number of solutions, we must have

$$\delta(5) \geqq 3.$$

Thus

$$3 \leqq \delta(5) \leqq 9.$$

Again [6]),

$$(g^5+75n^5)^5 = (75n^5-g^5)^5 + (g^5+25n^5)^5 + (g^5-25n^5)^5 + (10g^3n^2)^5 + (50gn^4)^5,$$

gives

$$\varepsilon(5) \leqq 6.$$

---

[3]) See a paper by Martin, Proceedings of the International Congress, 1912.

[4]) See Dickson, History of the Theory of Numbers, Vol. 2, pp. 644—646.

[5]) See K. Subba Rao, "On Powers of Numbers", Math. student, Vol. II, 3, pp. 113—114.

[6]) S. Sastry, "On sums of powers", Journ. Lond. Math. Soc. 9 (1934), pp. 242—246.

Since $x^5 = y^5 + z^5$ is unpossible in integers, $\varepsilon(5) \geqq 4$.

Hence

$$4 \leqq \varepsilon(5) \leqq 6.$$

Again, if the conjecture of Euler, namely [7]),

$$(1) \overset{k}{=} (k-1), \qquad (k > 2)$$

is impossible, is true, then $\varepsilon(5)$ cannot be less than 6. Hence, if Euler's conjecture is true, then $\varepsilon(5) = 6$.

Theorem 7:

$$\delta(6) \leqq 12,$$
$$\varepsilon(6) \leqq 12.$$

We have [8])

$$c,\ a+3b,\ 2a-b-c,\ 4a+5b-3c,\ 5a+b-4c;\ 6a+4b-5c \overset{5}{=} b+c,\ a-b,\ 2a+4b-c,\ 4a-3c,\ 5a+5b-4c,\ 6a+3b-5c.$$

Putting $a = 3$, $b = c = 2$ in this identity, we get

$$17,\ 14,\ 12,\ 6,\ 4,\ 1 \overset{5}{=} 16,\ 16,\ 9,\ 9,\ 2,\ 2.$$

From this, we have

$$(x+17)^6 + (x+14)^6 + (x+12)^6 + (x+6)^6 + (x+4)^6 + (x+1)^6 - 2(x+16)^6 - 2(x+9)^6 - 2(x+2)^6 = 17^6 + 14^6 + 12^6 + 6^6 + 4^6 + 1^6 - 2\cdot 16^6 - 2\cdot 9^6 - 2\cdot 2^6 = c \neq 0,$$

which proves that

$$\delta(6) \leqq 12.$$

We have [9])

$$22^6 + 19^6 + 3^6 = 23^6 + 15^6 + 10^6$$

whence

$$(22x)^6 + (19x)^6 + (3x)^6 + 23^6 + 15^6 + 10^6 - (23x)^6 - (15x)^6 - (10x)^6 - 22^6 - 19^6 - 3^6 = 0.$$

This proves

$$\varepsilon(6) \leqq 12.$$

Theorem 8:

$$\delta(7) \leqq 14,$$
$$\varepsilon(7) \leqq 16.$$

---

[7]) $(1) \overset{k}{=} (k-1)$ means that 'one k^{th} power is equal to the sum of $(k-1)$ k^{th} powers'.

[8]) $a_1, a_2, \ldots \overset{k}{=} a'_1, a'_2, \ldots$ means that

$$a_1^n + a_2^n + \ldots = a_1'^n + a_2'^n + \ldots \qquad (n = 1, 2, \ldots k).$$

This notation is much used. See Dickson, History of the Theory of Numbers, Vol. 2, Chap. 24.

[9]) See K. Subba Rao, „On sums of sixth pawers", Journ. Lond. Math. Soc. 9 (1934), pp. 172—173.

We have the identity[10])

$$(7t^7+1)^7-(7t^7-1)^7=2(7t^6)^7+168070(t^4)^7+2058(t^2)^7+2.$$

Now

$$2058=3^7-2^7-1^7,$$

and

$$168070=8^7+2^7-2\cdot 7^7-6^7-3^7-1^7.$$

Substituting these values in the above identity, we have

$$\begin{aligned}&(7t^7+1)^7+2(7t^4)^7+(6t^4)^7+(3t^4)^7+(t^4)^7+(2t^2)^7+(t^2)^7\\&=(7t^7-1)^7+2(7t^6)^7+(8t^4)^7+(2t^4)^7+3t^2)^7+2\end{aligned}$$

from which it follows that

$$\delta(7)\leqq 14.$$

Writing the above identity in the form

$$\begin{aligned}&(7t^7+1)^7+2(7t^4)^7+(6t^4)^7+(3t^4)^7+(t^4)^7+2t^2)^7+(t^2)^7\\&-(7t^7-1)^7-2(7t^6)^7-(8t^4)^7-(2t^4)^7-(3t^2)^7-2\cdot 1^7=0,\end{aligned}$$

we have

$$\varepsilon(7)\leqq 16.$$

Theorem 9:

$$\delta(8)\leqq 16,$$
$$\varepsilon(8)\leqq 16.$$

We have, with the same notation as above,

$$1,\ 5,\ 10,\ 24,\ 28,\ 42,\ 47,\ 51 \overset{7}{=} 2,\ 3,\ 12,\ 21,\ 31,\ 40,\ 49,\ 50.$$

From this, we have

$$\begin{aligned}&(x+1)^8+(x+5)^8+(x+10)^8+(x+24)^8+(x+28)^8+(x+42)^8\\&+(x+47)^8+(x+51)^8-(x+2)^8-(x+3)^8-(x+12)^8-(x+21)^8\\&-(x+31)^8-(x+40)^8-(x+49)^8-(x+50)^8\\&=1^8+5^8+\ldots+51^8-2^8-3^8-\ldots-50^8=c\neq 0.\end{aligned}$$

Hence $$\delta(8)\leqq 16.$$

Again, we have[11])

$$\begin{aligned}&(1^8+2^8)(16t^8+1)^8+(16^8+15^8+2^8)\{(2t^5)^8+(t^3)^8\}\\&=\{(16t^8-1)^8+(16t^7)^8+(2t)^8\}(1^8+2^8)+17^8\{(2t^5)^8+(t^3)^8\}\end{aligned}$$

which proves that

$$\varepsilon(8)\leqq 16.$$

Theorem 10:

$$\varepsilon(9)\leqq 28.$$

We have

$$21^9+15^9=2\cdot 19^9+17^9+16^9+7^9+4^9+2\cdot 3^9+4\cdot 2^9$$

---

[10]) K. Subba Rao, „On sums of like powers", to appear in Math. Zeitschr.

[11]) S. Sastry, loc. cit.

from which we deduce

$$21^9 + 15^9 + 2(19x)^9 + (17x)^9 + (16x)^9 + (7x)^9 + (4x)^9 + 2\cdot(3x)^9 + 4\cdot(2x)^9 = 2\cdot 19^9 + 17^9 + 16^9 + 7^9 + 4^9 + 2\cdot 3^9 + 4\cdot 2^9 + (21x)^9 + (15x)^9,$$

whence we have

$$\varepsilon(9) \leqq 28.$$

Theorem 11:

$$\delta(10) \leqq 40.$$

We have, with the above notation,

$$b,\ a-3b+2c,\ 2a+2b-5c,\ 2a+4b-7c,\ 3a-6b+c,\ 3a-4b-c,$$
$$4a-b-6c,\ 4a+4b-11c,\ 5a-9b,\ 6a+5b-16c,\ 8a-11b-4c,$$
$$9a+3b-20c,\ 10a-10b-9c,\ 10a-5b-14c,\ 11a-2b-19c,$$
$$11a-21c,\ 12a-10b-13c,\ 12a-8b-15c,\ 13a-3b-22c,$$
$$14a-7b-20c\ ^{9}\ c,\ a+3b-4c,\ 2a-5b+2c,\ 2a-3b,\ 3a+2b-7c,$$
$$3a-4b-9c,\ 4a-7b,\ 4a-2b-5c,\ 5a+5b-14c,\ 6a-10b-c,$$
$$8a+4b-19c,\ 9a-11b-6c,\ 10a-4b-15c,\ 10a+b-20c,$$
$$11a-10b-11c,\ 11a-8b-13c,\ 12a-3b-20c,\ 12a-b-22c,$$
$$13a-9b-16c,\ 14a-6b-21c.$$

Putting $a = 6$, $b = 2$, $c = 1$ in this identity, we have

$$2, 2, 7, 9, 11, 12, 13, 16, 21, 22, 30, 31, 36, 39, 40, 41, 43, 45, 50, 50\ ^{9}\ 1, 4, 6, 8, 10, 15, 15, 15, 17, 26, 26, 35, 37, 37, 37, 42, 44, 46, 48, 51.$$

From this, we have

$$(x+1)^{10} + (x+4)^{10} + \ldots + (x+51)^{10} - 2(x+2)^{10} - \ldots - 2(x+50)^{10} = 1^{10} + 4^{10} + \ldots + 51^{10} - 2\cdot 2^{10} - \ldots - 2\cdot 50^{10} = c \neq 0.$$

Hence Theorem 11 is proved.

3. The results of Theorems 1 and 2 can be improved by finding more suitable identities[12]). Suppose we have an identity of the type

$$\text{(A)} \qquad \sum_{i=1}^{i\,(=j(k))} \{(x+a_i)^k - (x+a_i')^k\} = Cx + D \qquad (C \neq 0).$$

By successive differentiation we obtain

$$\text{(a)} \qquad \delta(k-1) \leqq 2j(k),$$

$$\text{(b)} \qquad \varepsilon(k-2) \leqq 2j(k).$$

But Wright has shown that if we have found an identity of the type (A) with $k = k_0$, $j = j_0$, then

$$\text{(c)} \qquad 2j(k) = O\left((2j_0)^{\frac{k}{k_0-1}}\right) \qquad \text{as } k \to \infty.$$

---

[12]) In the rest of my paper, I closely follow Wright. See E. Maitland Wright, „An Easier Waring's Problem", Journ. Lond. Math. Soc. 9 (1934), pp. 267—272.

Hence from (a), (b) and (c), we have

$$\delta(k) = O\left((2j_0)^{\frac{k}{k_0 - 1}}\right)$$

$$\varepsilon(k) = O\left((2j_0)^{\frac{k}{k_0 - 1}}\right)$$

As Wright has not published his identity for $k_0 = 20$, I give below the following results:

Since $\delta(8) \leqq 16$[13]), it follows that

$$\delta(k) = O\left((16)^{\frac{k}{7}}\right) = O\left(2^{\frac{4k}{7}}\right) = O(2^{\cdot 571\, k}).$$

Again, from the identity[14])

2, 2, 7, 9, 11, 12, 13, 16, 21, 22, 30, 31, 36, 39, 40, 41, 43, 45, 50, 50
1, 4, 6, 8, 10, 15, 15, 15, 17, 26, 26, 35, 37, 37, 37, 42, 44, 46, 48, 51

we deduce that $\varepsilon(9) \leqq 40$.

Hence

$$\varepsilon(k) = O\left((40)^{\frac{k}{8}}\right) = O(2^{\cdot 665\, k}).$$

---

[13]) See Theorem 9.

[14]) See Theorem 11.

(Eingegangen am 17. Februar 1935.)

On the theory of non-linear differential Equations of Parabolic type. II.

By

M. Raziuddin Siddiqi, Hyderabad-Deccan, India.

§ 1.

In a previous paper published in this journal[1]), the writer has considered the Equations

$$\text{I.} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, u) = \sum_{r=2}^{\infty} p_r(x, t)\, u^r,$$

$$\text{II.} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = P\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \sum_{r,s=1}^{\infty} p_{r,s}(x, t)\, u^r \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^s,$$

for the boundary conditions:

A. $\quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad$ for all $t \geqq 0$,

B. $\quad u(x, 0) = f(x) \quad$ for all x in $0 \leqq x \leqq \pi$,

and has proved that one and only one solution of each of the two equations I and II exists, which satisfies the boundary conditions A. and B. and which can be expanded in a Fourier Series.

The object of the present paper is to consider the more general equations

$$\text{III.} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - \frac{\partial u}{\partial t} = u^2,$$

$$\text{IV.} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

for the same boundary conditions A. and B. We shall prove that one and only one solution of each of these two equations III. and IV. exists which satisfies the conditions A. and B. and which can be expanded in a series of Sturm-Liouville Eigenfunctions.

§ 2.

Let $p(x)$ be an essentially positive function > 1, defined in the interval $0 \leqq x \leqq \pi$, and let $p(x)$. $\frac{dp}{dx}$ and $\frac{d^2p}{dx^2}$ be continuous and uniformly bounded in the whole interval:

$$(1) \qquad |p(x)| \leqq M, \quad \left|\frac{dp}{dx}\right| \leqq M, \quad \left|\frac{d^2p}{dx^2}\right| \leqq M,$$

where M is a positive constant.

[1]) M. R. Siddiqi: „Zur Theorie der nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typus". Math. Zeitschr. 35 (1932), 464—484.

Let us try to determine a solution of the equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - \frac{\partial u}{\partial t} = u^2 \tag{2}$$

which is regular in the domain

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq t, \tag{3}$$

and which satisfies the boundary conditions:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \qquad \text{for all } t \geqq 0, \tag{4}$$

$$u(x, 0) = f(x) \qquad \text{for all } x \text{ in } 0 \leqq x \leqq \pi. \tag{5}$$

Let $\lambda_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ be the *Eigenvalues* and $\Phi_n(x)$ the corresponding *Eigenfunctions* of the Sturm-Liouville differential equation

$$\frac{d}{dx}\left\{p(x)\frac{dy}{dx}\right\} + \lambda y = 0, \tag{6}$$

with the boundary conditions

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{7}$$

We assume[2]) that $f(x)$ can be expanded in a series of $\Phi_n(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x), \tag{8}$$

and that the series[3]) $\sum_n \lambda_n |c_n|$ is convergent:

$$\sum_n \lambda_n |c_n| = c, \tag{9}$$

where c is a positive constant.

For a solution of the differential equation (1) we set:

$$u(x, t) = \sum_n v_n(t)\, \Phi_n(x), \tag{10}$$

with

$$v_n(0) = c_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Then since $\Phi_n(x)$ is a complete set of normalised orthogonal functions, we have:

$$u^2(x, t) = \sum_n Z_n(t)\, \Phi_n(x), \tag{12}$$

where

$$Z_n(t) = \sum_{k,l} a_{k,l}^{(n)} v_k(t)\, v_l(t), \tag{13}$$

---

[2]) The question of the expansibility of a function $f(x)$ in a series of $\Phi_n(x)$ has been considered by L. Lichtenstein: „Zur Analysis der unendlich vielen Variablen". Palermo Rendiconti 38 (1913).

[3]) Unless otherwise stated, the summation is to be taken from 1 to ∞ throughout this paper.

and

$$a_{k,l}^{(n)} = \int_0^{\pi} \Phi_k(x)\, \Phi_l(x)\, \Phi_n(x)\, dx. \tag{14}$$

Assuming for the present that the series

$$\sum_n \lambda_n v_n(t)\, \Phi_n(x) \quad \text{and} \quad \sum_n \frac{dv_n}{dt}\, \Phi_n(x)$$

are absolutely and uniformly convergent, we get on substituting (10) and (12) in (2):

$$-\sum_n \lambda_n v_n(t)\, \Phi_n(x) - \sum_n \frac{dv_n}{dt}\, \Phi_n(x) = \sum_n Z_n(t)\, \Phi_n(x), \tag{15}$$

so that for all $n \geqq 1$ we have

$$\frac{dv_n}{dt} + \lambda_n v_n(t) = -Z_n(t). \tag{16}$$

The solution of this differential equation with $v_n(0) = c_n$ is

$$\begin{aligned} v_n(t) &= c_n e^{-\lambda_n t} - \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} Z_n(y)\, dy \\ &= c_n e^{-\lambda_n t} - \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} a_{k,l}^{(n)} v_k(y)\, v_l(y)\, dy. \end{aligned} \tag{17}$$

We set for all $n \geqq 1$:

$$w_n(t) = \lambda_n v_n(t), \quad \gamma_n = \lambda_n c_n. \tag{18}$$

Then the equation (17) becomes:

$$w_n(t) = \gamma_n e^{-\lambda_n t} - \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k \lambda_l}\, w_k(y)\, w_l(y)\, dy. \tag{19}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

This is an infinite system of non-linear integral equations for the determination of $w_n(t)$, and we solve this by a method of successive approximations.

For further treatment we need the convergence of the series $\sum_n \frac{|a_{k,l}^{(n)}|}{\lambda_k \lambda_l}$, and this we shall establish in the following

Lemma. The series $\sum_n \frac{|a_{k,l}^{(n)}|}{\lambda_k \lambda_l}$ is uniformly convergent for all $k, l \geqq 1$.

The asymptotic expansions of λ_n and $\Phi_n(x)$ are known to be[4]):

$$\lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{a^2} + 0(1), \qquad a = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\, dx,$$

$$\Phi_n(x) = d_n \frac{\sin n q(x)}{\{p(x)\}^{1/4}} + 0\left(\frac{1}{n}\right), \qquad q(x) = \frac{\pi}{a} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\, dx, \tag{20}$$

$$\frac{d\Phi_n}{dx} = d_n \frac{n\pi}{a} \frac{\cos n q(x)}{\{p(x)\}^{1/5}} + 0(1), \qquad \frac{1}{d_n^2} = \int_0^\pi \frac{\sin^2 n q(x)}{\sqrt{p(x)}}\, dx.$$

Now from the definitions of $p(x)$ and $q(x)$ it is easily seen that $\frac{1}{d_n^2}$ does not approach zero whatever n may be. We deduce that $\frac{1}{d_n}$ is different from zero and therefore d_n bounded for all n. Consequently $\Phi_n(x)$ and $\frac{1}{n}\frac{d\Phi_n}{dx}$ are also bounded for all n. Thus we can write on selecting a proper constant B:

$$|\Phi_n(x)| < B, \qquad \left|\frac{1}{n}\frac{d\Phi_n}{dx}\right| < B, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

From

$$a_{k,l}^{(n)} = \int_0^\pi \Phi_k(x)\, \Phi_l(x)\, \Phi_n(x)\, dx$$

we get, on integrating by parts twice, and remembering that $\Phi_n(x)$ satisfies the equations (6), (7):

$$\begin{aligned} a_{k,l}^{(n)} &= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi \Phi_k(x)\, \Phi_l(x) \cdot \frac{d}{dx}\left\{p \frac{d\Phi_n}{dx}\right\} \cdot dx, \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi \Phi_n(x) \frac{d}{dx}\left\{p \frac{d}{dx}[\Phi_k(x)\, \Phi_l(x)]\right\} dx, \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi \Phi_n(x) \left[\frac{d}{dx}\left\{p \frac{d\Phi_k}{dx}\right\} \Phi_l(x) + \frac{d}{dx}\left\{p \frac{d\Phi_l}{dx}\right\} \Phi_k(x) \right. \\ &\qquad \left. + 2p \frac{d\Phi_k}{dx} \frac{d\Phi_l}{dx}\right] dx, \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi \Phi_n(x) \left[-(\lambda_k + \lambda_l)\, \Phi_k(x)\, \Phi_l(x) + 2p \frac{d\Phi_k}{dx} \frac{d\Phi_l}{dx}\right] dx. \end{aligned} \tag{22}$$

---

[4]) cf. Courant-Hilbert: „Methoden der mathematischen Physik". Vol. I, p. 291.

We write

$$b_{k,l}^{(n)} = \int_0^1 p(x) \frac{1}{\lambda_k} \frac{d\Phi_k}{dx} \frac{1}{\lambda_l} \frac{d\Phi_l}{dx} \Phi_n(x)\, dx, \tag{23}$$

so that

$$\frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k \lambda_l} = \frac{1}{\lambda_n} \left| \frac{\lambda_k + \lambda_l}{\lambda_k \lambda_l} a_{k,l}^{(n)} - 2 b_{kl,}^{(n)} \right|. \tag{24}$$

Since λ_l and $\lambda_k > 1$ for all l, k, we have:

$$\frac{|a_{k,l}^{(n)}|}{\lambda_k \lambda_l} \leqq \frac{2}{\lambda_n} \{ |a_{k,l}^{(n)}| + |b_{k,l}^{(n)}| \}. \tag{25}$$

But from the equations (14) and (23), we see that $|a_{k,l}^{(n)}|$ and $|b_{k,l}^{(n)}|$ are uniformly bounded:

$$|a_{k,l}^{(n)}| < \pi B^5, \qquad |b_{k,l}^{(n)}| < \pi M B^5. \tag{26}$$

Moreover, from (20), we see that $\sum_n \frac{1}{\lambda_n} < \sum_n \frac{1}{n^2}$ and is convergent, consequently $\sum \frac{|a_{k,l}^{(n)}|}{\lambda_k \lambda_l}$ is also uniformly convergent, so that we can write

$$\sum_n \frac{|a_{k,l}^{(n)}|}{\lambda_k \lambda_l} = A, \tag{27}$$

where A is a constant,

From the equation (25), it is not difficult to prove that even the series $\sum_n \sqrt{\lambda_n} \frac{|a_{k,l}^{(n)}|}{\lambda_k \lambda_l}$ is uniformly convergent[5]).

We return now to the solution of the infinite system of non-linear integral equations (19). For the successive approximations we write:

$$w_n^{(0)}(t) = \gamma_n e^{-\lambda_n t}, \tag{28}$$

and for all $m \geqq 1$

$$w_n^{(m)}(t) = \gamma_n e^{-\lambda_n t} - \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k \lambda_l} w_k^{(m-1)}(y)\, w_l^{(m-1)}(y)\, dy. \tag{29}$$

Now for all $t > 0$ and all $n \geqq 1$, we have

$$\left| \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)}\, dy \right| = \left| e^{-\lambda_n t} \int_0^t e^{\lambda_n y} \cdot dy \right| = \left| \frac{1}{\lambda_n} \frac{e^{\lambda_n t} - 1}{e^{\lambda_n t}} \right| < \frac{1}{\lambda_n}, \tag{30}$$

---

[5]) M. R. Siddiqi: „On an infinite series of Integrals involving Sturm-Liouville Eigenfunctions". Bull. Acad. of Sciences, u. P., vol. 3 (1933).

therefore from (27) and (30) we get:

$$\sum_n \lambda_n \cdot \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)}\, dy \cdot \frac{|a_{k,l}^{(n)}|}{\lambda_k \lambda_l} < \sum_n \lambda_n \cdot \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{|a_{k,l}^{(n)}|}{\lambda_k \lambda_l} < A. \tag{31}$$

Thus if $\sum_n |w_n^{(m-1)}(t)|$ converges uniformly for all n and all t, we get from (29) and (9)

$$\sum_n |w_n^{(m)}(t)| \leqq c + A\,(\sum_n |w_n^{(m-1)}(t)|)^2. \tag{32}$$

From (28) we get for all t

$$\sum_n |w_n^{(0)}(t)| \leqq \sum_n |\gamma_n| = \sum_n \lambda_n |c_n| = c. \tag{33}$$

Substituting this in (32) for $m = 1$, we get

$$\sum_n |w_n^{(1)}(t)| \leqq c + A\,c^2$$

we assume that

$$c < \frac{1}{4A}, \tag{34}$$

so that we get

$$\sum_n |w_n^{(1)}(t)| < 2c.$$

Substituting this again in (32) for $m = 2$, we get

$$\sum_n |w_n^{(2)}(t)| < c + A \cdot 4c^2, < 2c,$$

on account of (34). Thus by an easy induction we get for all $m \geqq 1$:

$$\sum_n |w_n^{(m)}(t)| < 2c. \tag{35}$$

We shall prove now that the double series

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |w_n^{(m+1)}(t) - w_n^{(m)}(t)|$$

is also uniformly convergent for all t.

We have

$$\begin{aligned} w_n^{(m+1)}(t) - w_n^{(m)}(t) = & -\lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k \lambda_l} \\ & \{w_k^{(m)}(y)\, w_l^{(m)}(y) - w_k^{(m-1)}(y)\, w_l^{(m-1)}(y)\}\, dy \\ = & -\lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k \lambda_l} \\ & \cdot \{w_k^{(m)}(y)\,[w_l^{(m)}(y) - w_l^{(m-1)}(y)] \\ & + w_l^{(m-1)}(y)\,[w_k^{(m)}(y) - w_k^{(m-1)}(y)]\}\, dy. \end{aligned}$$

Therefore we have from (31) and (35):

$$\sum_n |w_n^{(m+1)}(t) - w_n^{(m)}(t)| < A \cdot 2 \cdot 2c \cdot \sum_n |w_n^{(m)}(t) - w_n^{(m-1)}(t)|. \tag{36}$$

Repeating this inequality (36) m times, we get:

$$\sum_n |w_n^{(m+1)}(t) - w_n^{(m)}(t)| < (4Ac)^m \cdot \sum_n |w_n^{(1)}(t) - w_n^{(0)}(t)|.$$

Thus

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_n |w_n^{(m+1)}(t) - w_n^{(m)}(t)| < \sum_{m=0}^{\infty} (4Ac)^m \cdot \sum_n |w_n^{(1)}(t) - w_n^{(0)}(t)|. \tag{37}$$

Since from (34), $4Ac < 1$, therefore

$$\sum_{m=0}^{\infty} (4Ac)^m = \frac{1}{3-4Ac}.$$

Also

$$w_n^{(1)}(t) - w_n^{(0)}(t) = -\lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k \lambda_l} w_k^{(0)}(y)\, w_l^{(0)}(y)\, dy,$$

therefore

$$\sum_n |w_n^{(1)}(t) - w_n^{(0)}(t)| \leqq Ac^2,$$

so that

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |w_n^{(m+1)}(t) - w_n^{(m)}(t)| < \frac{Ac^2}{1-4Ac}. \tag{38}$$

From this we conclude that all the limits

$$w_n(t) = \lim_{m \to \infty} w_n^{(m)}(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{39}$$

exist, and that $w_n(t)$ is continuous. Moreover, for all t

$$\sum_n |w_n(t)| < 2c, \tag{40}$$

and

$$w(t) = \sum_n w_n(t) = \lim_{m \to \infty} \sum_n w_n^{(m)}(x). \tag{41}$$

From (29) on making $m \to \infty$ we get

$$w_n(t) = \gamma_n e^{-\lambda_n t} - \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k \lambda_l} w_k(y)\, w_l(y)\, dy. \tag{42}$$

Now, we write again

$$v_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} w_n(t), \qquad c_n = \frac{\gamma_n}{\lambda_n}, \tag{43}$$

and get from (42)

$$v_n(t) = c_n e^{-\lambda_n t} - \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} a_{k,l}^{(n)} v_k(y)\, v_l(y)\, dy. \tag{44}$$

Thus for all $n \geqq 1$, $v_n(t)$ satisfies the Integral equation (17) and therefore the differential equation (16). We have proved in (40) that $\sum_n |w_n(t)| = \sum_n \lambda_n |v_n(t)|$ is uniformly convergent, and it is not difficult to see that $\sum_n |Z_n(t)|$ is also uniformly convergent. Then on account of (15), $\sum_n \left| \frac{dv_n}{dt} \right|$ is also uniformly convergent.

Thus

$$u(x,t) = \sum_n v_n(t)\, \Phi_n(x) \tag{45}$$

is the required solution of the equation (2) which satisfies the conditions (4) and (5).

We have to prove now that this is the only solution of its kind. Obviously, it is enough for this purpose to show that $w_n(t)$ in (39) is the only solution of the integral equation (19) which is such that $\sum_n |w_n(t)| < 2c$.

If possible, suppose that $\overline{w}_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ is another such solution, i. e.

$$\sum_n |\overline{w}_n(t)| < 2c. \tag{46}$$

Then we have

$$\begin{aligned} \overline{w}_n(t) - w_n^{(m)}(t) &= -\lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k \lambda_l} \\ &\quad \cdot \{\overline{w}_k(y)\, \overline{w}_l(y) - w_k^{(m-1)}(y)\, w_l^{(m-1)}(y)\}\, dy \\ &= -\lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k \lambda_l} \\ &\quad \{\overline{w}_k(y)\, [\overline{w}_l(y) - w_l^{(m-1)}(y)] + w_l^{(m-1)}(y)\, [\overline{w}_k(y) - w_k^{(m-1)}(y)]\}\, dy. \end{aligned}$$

Therefore from (31), (35) and (46), we get for all t:

$$\sum_n |\overline{w}_n(t) - w_n^{(m)}(t)| < A \cdot 2 \cdot 2c \cdot \sum_n |\overline{w}_n(t) - w_n^{(m-1)}(t)|.$$

Repeating this inequality m times we get:

$$\sum_n |\overline{w}_n(t) - w_n^{(m)}(t)| < (4Ac)^m \cdot \sum_n |\overline{w}_n(t) - w_n^{(0)}(t)|. \tag{47}$$

But

$$\overline{w}_n(t) - w_n^{(0)}(t) = -\lambda_n \int_0^t e^{-\lambda(t-y)} \sum_{k,l} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k \lambda_l} \overline{w}_k(y)\, \overline{w}_l(y)\, dy,$$

so that from (31) and (46) we get

$$\sum_n |\overline{w}_n(t) - w_n^{(0)}(t)| < A \cdot 4c^2.$$

Therefore

$$\sum_n |\overline{w}_n(t) - w_n^{(m)}(t)| < 4Ac^2 \cdot (4Ac)^m. \tag{48}$$

Now from (34) we have $4Ac < 1$, therefore

$$\lim_{m \to \infty} (4Ac)^m = 0.$$

Consequently

$$\lim_{m \to \infty} \sum_n |\overline{w}_n(t) - w_n^{(m)}(t)| = 0, \tag{49}$$

so that for all $n \geqq 1$:

$$\begin{aligned} \overline{w}_n(t) &= \lim_{m \to \infty} w_n^{(m)}(t) \\ &= w_n(t), \end{aligned} \tag{50}$$

which shows that the two solutions $\overline{w}_n(t)$ and $w_n(t)$ are identical. The uniqueness of the solution (45) is thus established.

§ 3.

If instead of the equation (2), we have to consider the equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right\} - \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{51}$$

for the same boundary conditions, then we shall have to make slight alterations in the treatment given above. Thus, instead of (9) we shall have to assume the uniform convergence of $\sum_n \lambda_n^{3/2} |c_n|$, and write

$$\sum_n \lambda_n^{3/2} |c_n| = c'. \tag{52}$$

For (12) we shall get:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_n Z'(t)\, \Phi_n(x), \tag{53}$$

where

$$Z_n'(t) = \sum_{k,l} a_{k,l}^{\prime(n)} v_k(t)\, v_l(t), \tag{54}$$

and

$$a_{k,l}^{\prime(n)} = \int_0^\pi \Phi_k(x) \frac{d\Phi_l}{dx} \Phi_n(x)\, dx. \tag{55}$$

Then in place of (27), we shall have to prove the following

Lemma: The series $\sum_n \sqrt{\lambda_n}\, \frac{|a'^{(n)}_{k,l}|}{\lambda_k^{3/2}\, \lambda_l^{3/2}}$ is uniformly convergent for all $k,\ l \geqq 1$.

We have

$$a'^{(n)}_{k,l} = \int_0^\pi \Phi_k \Phi'_l \Phi_n \, dx,$$

where dashes are used under the integral sign to denote derivatives with respect to x. Remenbering that $\Phi_n(x)$ satisfies the Sturm-Liouville differential equation (6) and the boundary conditions (7), we get

$$a'^{(n)}_{k,l} = \frac{-1}{\lambda_n} \int_0^\pi \Phi_k \Phi'_l (p \Phi'_n)' \, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi p \, \Phi'_n (\Phi_k \Phi'_l)' \, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi \Phi'_n \{p \Phi'_k \Phi' - \lambda_l \Phi_k \Phi_l - p' \Phi_k \Phi'_l\} \, dx.$$

Integrating again by parts, we have:

$$a'^{(n)}_{k,l} = -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi \Phi_n \{(p \Phi'_k \Phi'_l)' - \lambda_l (\Phi_k \Phi_l)' - (p' \Phi_k \Phi'_l)'\} \, dx$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi \Phi_n \{p' \Phi'_k \Phi'_l + p \Phi''_k \Phi'_l + p \Phi'_k \Phi''_l - \lambda_l \Phi'_k \Phi_l$$

$$- \lambda_l \Phi_k \Phi'_l - p'' \Phi_k \Phi'_l - p' \Phi'_k \Phi'_l - p' \Phi_k \Phi''_l\} \, dx$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi \Phi_n \Big\{\Phi'_l (-\lambda_k \Phi_k - p' \Phi'_k) + \Phi'_k (-\lambda_l \Phi_l - p' \Phi'_l)$$

$$- \lambda_l \Phi'_k \Phi_l - (\lambda_l + p'') \Phi_k \Phi'_l + \frac{p'}{p} (\lambda_l \Phi_l + p' \Phi'_l)\Big\} \, dx$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^\pi \Phi_n \Big\{\Phi_k \Phi_l \lambda_l \frac{p'}{p} + \Phi_k \Phi'_l \Big(-\lambda_k - \lambda_l - p'' + \frac{p'^2}{p}\Big)$$

$$- 2 \lambda_l \Phi'_k \Phi_l - 2 p' \Phi'_k \Phi'_l\Big\} \, dx.$$

Now we write

$$F_{k,l}^{(n)} = \int_0^\pi \frac{p'}{p} \Phi_k \Phi_l \Phi_n \, dx,$$

$$b_{k,l}^{(n)} = \int_0^\pi \left(2 + p'' + \frac{p'^2}{p}\right) \Phi_k \frac{\Phi_l'}{\sqrt{\lambda_l}} \Phi_n \, dx,$$

(56)

$$d_{k,l}^{(n)} = 2 \int_0^\pi \frac{\Phi_k'}{\lambda_k} \Phi_l \Phi_n \, dx,$$

$$e_{k,l}^{(n)} = 2 \int_0^\pi p' \frac{\Phi_k'}{\lambda_k} \frac{\Phi_l'}{\lambda_l} \Phi_n \, dx.$$

Then we have

$$\frac{|a_{k,l}^{'(n)}|}{\lambda_k \lambda_l^{3/2}} \leqq \frac{1}{\lambda_n} \{|F_{k,l}^{(n)}| + |b_{k,l}^{(n)}| + |d_{k,l}^{(n)}| + |e_{k,l}^{(n)}|\}. \tag{57}$$

Now the series $\sum_n \{F_{k,l}^{(n)}\}^2$, $\sum_n \{b_{k,l}^{(n)}\}^2$, $\sum_n \{d_{k,l}^{(n)}\}^2$ and $\sum_n \{e_{k,l}^{(n)}\}^2$ are convergent in consequence of Parseval's theorem[6]).

From (57) we get

$$\sqrt{\lambda_n} \frac{|a_{k,l}^{'(n)}|}{\lambda_k \lambda_l^{3/2}} \leqq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \{|F_{k,l}^{(n)}| + |b_{k,l}^{(n)}| + |d_{k,l}^{(n)}| + |e_{k,l}^{(n)}|\},$$

and therefore on account of Schwarz's inequality:

$$\left\{\sum_n \sqrt{\lambda_n} \frac{|a_{k,l}^{'(n)}|}{\lambda_k \lambda_l^{3/2}}\right\}^2 \leqq \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \cdot \sum_n \{|F_{k,l}^{(n)}| + |b_{k,l}^{(n)}| + |d_{k,l}^{(n)}| + |e_{k,l}^{(n)}|\}^2$$

$$< \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \cdot \sum_n \{4|F_{k,l}^{(n)}|^2 + 4|b_{k,l}^{(n)}|^2 + 4|d_{k,l}^{(n)}|^2 + 4|e_{k,l}^{(n)}|\},$$

where we have used the inequality $2ab < a^2 + b^2$. Since $\sum_n \frac{1}{\lambda_n}$, and all the series $\sum_n |F_{k,l}^{(n)}|^2$ etc. are convergent, therefore $\sum_n \sqrt{\lambda_n} \frac{|a_{k,l}^{'(n)}|}{\lambda_k \lambda_l^{3/2}}$ and with it $\sum_n \sqrt{\lambda_n} \frac{|a_{k,l}^{'(n)}|}{\lambda_k^{3/2} \lambda_l^{3/2}}$ are convergent, uniformly for all k, l. Thus we can write

$$\sum_n \sqrt{\lambda_n} \frac{a_{k,l}^{'(n)}}{\lambda_k^{3/2} \lambda_l^{3/2}} = A'. \tag{58}$$

[6]) I am indebted to Prof. G. H. Hardy for this remark.

Now, instead of the equation (18) we write

$$w_n'(t) = \lambda_n^{3/2} v_n(t), \quad \gamma_n' = \lambda_n^{3/2} c_n, \tag{59}$$

so that for the equation (19), we get the equation

$$w_n'(t) = \gamma_n' e^{-\lambda_n t} - \lambda_n^{3/2} \int_0^t e^{-\lambda_n (t-y)} \sum_{k,l} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\lambda_k^{3/2} \lambda_l^{3/2}} w_k'(y) w_l'(y)\, dy \tag{60}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

From this point on, if we replace c by c' and A by A' in the above treatment, we can argue word for word that one and only one solution of the equation (60) exists, and that the differential equation (51) has therefore one and only one solution of the form

$$u(x, t) = \sum_n v_n(t) \Phi_n(x)$$

which satisfies the given conditions (4) and (5).

(Eingegangen am 4. März 1935.)

On the summability (*C*. 1) of Fourier series.

Von

B. N. Prasad, Allahabad (India).

1. Let

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.1}$$

be the Fourier series associated with the function $f(x)$ which is periodic and integrable in the sense of Lebesgue over the interval $(-\pi, \pi)$. Writing

$$2\varphi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x),$$

we observe that the following three conditions are in descending order as regards their degrees of stringency, so that each will hold if the preceding one is satisfied, but not *vice-versa*:

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{\varphi(t)}{t} \right| dt \tag{A}$$

exists;

$$\int_0^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt \tag{B}$$

exists as a *non-absolutely* convergent integral, and

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(t)\, dt \tag{C}$$

is zero.

We know that when (A) holds, the Fourier series is convergent by Dini's condition, and hence also summable $(C, 1)$. When (B) is satisfied, it is known that the Fourier series is not necessarily convergent, but the question is, *if it is summable* $(C, 1)$ *in that case.* Hahn has investigated [1]) if at a point x, the holding of the condition (C) is a *sufficient* condition for the summability $(C, 1)$ of Fourier series and he has constructed an example to prove that the answer is in the negative. We now propose to take up the more delicate and far-reaching investigations as to the summability or non-summability of Fourier series, when the more string-

[1]) H. Hahn, *Über Fejérs Summierung der Fourierschen Reihe*, Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. **25** (1916), S. 359—366.

ent condition (B) is satisfied, and we show by constructing an example, that *even when the condition* (B) *is satisfied, the Fourier series, although summable* $(C, 1+\eta)$ *for every* $\eta > 0$, *is not necessarily summable* $(C, 1)$, and this, in virtue of Lemma α, covers the case considered by Hahn.

2. Theorem. *The existence of*

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\, dt$$

as a non-absolutely convergent integral at a point, is not sufficient for the summability $(C, 1)$ *of the Fourier series at that point*[2]).

In what follows we shall require the following lemmas:

Lemma α. *When the integral* (B) *exists, the limit* (C) *exists and is zero, but the converse is not true.*

This is the known criterion[3]) of Thomae for the differentiability of an integral function. To show that the converse is not true, if we take

$$\varphi(t) = \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-1}; \quad \varphi(0) = 0,$$

then for this, the limit (C) is zero, but the integral (B) does not exist.

Lemma β. *When the integral*

$$\int_0^\delta \frac{\Phi(t)}{t^2}\, dt \tag{2.1}$$

exists, the necessary and sufficient condition that the integral

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t}\, dt \tag{2.2}$$

may exist, is that the $\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{t}$ *is zero, where*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)\, du.$$

The proof of this lemma is given in a memoir of mine published in Liouville's Journal[4]).

---

[2]) For the corresponding result for the conjugate series, see a paper of mine *On the summability* $(C, 1)$ *of the conjugate series of a Fourier series*, Annali di Matematica, ser. IV, tome XI (1932—1933), pp. 207—214.

[3]) J. Thomae, Nachr. d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen (1893), S. 696—700; — For the generalized form of this lemma, see B. N. Prasad, *Contribution à l'étude de la série conjuguée d'une série de Fourier*, Journ. de Mathématiques Pures et Appliquées, t. XI (1932), p. 188, lemma 7.

[4]) B. N. Prasad, *Ibid*, p. 166, lemma 1.

Lemma γ. *If $U(x)$ be an integrable (L) function of x, then for large values of n, the integral*

$$\int_0^\delta U(x) \frac{\sin 2nx}{x} dx$$

will behave as the integral

$$\int_0^\delta U(x) \frac{\sin (2n+1)x}{x} dx.$$

The proof of this is quite straightforward and is therefore omitted.

3. We know that the Fourier series (1. 1) is summable $(C, 1)$ at x, if the integral

$$I_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\delta \varphi(t) \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2 dt$$

tends to zero as $n \to \infty$, where δ is a number such that $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$. Integrating the above by parts we get

$$(3.1) \qquad I_n = \left[\frac{1}{n\pi} \Phi(t) \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2\right]_0^\delta - \frac{1}{n\pi} \int_0^\delta \Phi(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2 dt.$$

The term in the square brackets in (3. 1) is $o(1)$, and hence the Fourier series will be summable $(C, 1)$, if each of the integrals

$$(3.2) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\Phi(t)}{t} \cdot \frac{\sin 2nt}{t} dt$$

and

$$(3.3) \qquad \frac{1}{n\pi} \int_0^\delta \frac{\Phi(t)}{t} \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2 dt$$

is $o(1)$.

Now in order to prove the theorem we shall choose $\varphi(t)$ in such a manner that the corresponding integral (2. 1) exists and also the $\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{t}$ is zero. Hence in virtue of the Lemma β, the integral (2. 2) will also exist. We shall show that for this $\varphi(t)$, although the integral (3. 3) is $o(1)$, the integral (3. 2) is *not* $o(1)$, but increases indefinitely as n has a certain sequence of integral values. Hence the corresponding Fourier series will not be summable $(C, 1)$, even though the integral

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

exists.

4. In order to prove the theorem we proceed to construct an auxiliary example of a continuous function corresponding to which the Fourier series is non-convergent. This example is a generalized form of Schwarz's example [5]).

Let

$$R_\mu = 1 \cdot 3^{1^3} \cdot 5^{2^3} \cdot 7^{3^3} \cdot \ldots \cdot (2\mu + 1)^{\mu^3}.$$

Let us divide the interval $(0, \delta)$ into the following sequence of diminishing sub-internals:

$$\left(\frac{\pi}{R_{\lambda_1}}, \frac{\pi}{R_{\lambda_1 + 1}}\right), \left(\frac{\pi}{R_{\lambda_1 + 1}}, \frac{\pi}{R_{\lambda_1 + 2}}\right), \ldots, \left(\frac{\pi}{R_{\mu - 1}}, \frac{\pi}{R_\mu}\right), \ldots,$$

where λ_1 is a fixed integer and we may suppose δ so chosen that $\frac{\pi}{R_{\lambda_1}} = \delta$. Now let us define a function $F(z)$, such that in $(0, \delta)$

$$F(z) = c_\mu \sin R_\mu z, \quad \text{where} \quad \frac{\pi}{R_\mu} \leqq z < \frac{\pi}{R_{\mu - 1}},$$

and

$$F(\delta) = 0 = F(0),$$

where

$$c_\mu = \{\log (2\mu + 1)^{\mu^3}\}^{-1/2}.$$

This function is continuous; it decreases when z approaches zero by presenting an infinite number of maxima and minima with decreasing amplitudes.

We shall show that the integral

$$\int_0^\delta F(z) \frac{\sin (2n + 1) z}{z} dz \tag{4.1}$$

will increase indefinitely, as n has successively the values of integers in the following sequence:

$$2n + 1 = 1 \cdot 3^{1^3} \cdot 5^{2^3} \cdot \ldots \cdot (2\mu + 1)^{\mu^3} = R_\mu.$$

Then the integral

$$\int_0^\delta F(z) \frac{\sin R_\mu z}{z} dz$$

---

[5]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. **25** (1880), S. 271. The proof of this generalization is on the lines of Hobson's treatment of Schwarz's example, as given in his book, the Theory of Functions of a Real Variable, Vol. II (1926), pp. 545 - 546.

may be written in the form

$$c_\mu \int_{\pi/R_\mu}^{\pi/R_{\mu-1}} \frac{\sin^2 R_\mu z}{z}\, dz + \sum_{\gamma=\lambda_1}^{\gamma=\mu-1} c_\gamma \int_{\pi/R_\gamma}^{\pi/R_{\gamma-1}} \frac{\sin R_\gamma z \cdot \sin R_\mu z}{z}\, dz + \sum_{\gamma=\mu+1}^{\infty} c_\gamma \int_{\pi/R_\gamma}^{\pi/R_{\gamma-1}} \frac{\sin R_\gamma z \cdot \sin R_\mu z}{z}\, dz = I_1 + I_2 + I_3.$$

Now

$$I_1 = \frac{1}{2} c_\mu \int_{\pi/R_\mu}^{\pi/R_{\mu-1}} \frac{1-\cos 2R_\mu z}{z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} c_\mu \left\{ \log \frac{\pi}{R_{\mu-1}} - \log \frac{\pi}{R_\mu} \right\} - \frac{1}{2} c_\mu \frac{R_\mu}{\pi} \int_{\pi/R_\mu}^{\xi} \cos 2R_\mu z\, dz \ldots \xi \leqq \frac{\pi}{R_{\mu-1}}$$

$$= \frac{1}{2} c_\mu \left[\log (2\mu+1)^{\mu^3} - \frac{R_\mu}{\pi} \cdot \frac{1}{2R_\mu} \sigma \right],$$

where σ is some number whose absolute value does not exceed 2. Therefore I_1 will become indefinitely great, as $\mu \to \infty$.

Again

$$I_2 = \sum_{\gamma=\lambda_1}^{\mu-1} c_\gamma \int_{\pi/R_\gamma}^{\pi/R_{\gamma-1}} \frac{1}{2} \frac{\cos\{R_\mu - R_\gamma\} z - \cos\{R_\mu + R_\gamma\} z}{z}\, dz$$

$$\leqq \sum_{\gamma=\lambda_1}^{\mu-1} c_\gamma \frac{R_\gamma}{\pi} \left\{ \frac{1}{R_\mu - R_\gamma} + \frac{1}{R_\mu + R_\gamma} \right\}$$

$$= \sum_{\gamma=\lambda_1}^{\mu-1} c_\gamma \frac{R_\gamma}{\pi} \cdot \frac{1}{R_{\mu-1}} \left\{ \frac{1}{(2\mu+1)^{\mu^3} - \frac{R_\gamma}{R_{\mu-1}}} + \frac{1}{(2\mu+1)^{\mu^3} + \frac{R_\gamma}{R_{\mu-1}}} \right\}$$

$$\leqq c_{\lambda_1} \frac{1}{\pi} \sum_{\gamma=\lambda_1}^{\mu-1} \frac{R_\gamma}{R_{\mu-1}} \cdot \frac{2(2\mu+1)^{\mu^3}}{\{(2\mu+1)^{\mu^3}\}^2 - 1}$$

$$\leqq \frac{2}{\pi} c_{\lambda_1} \frac{(2\mu+1)^{\mu^3}}{\{(2\mu+1)^{\mu^3}\}^2 - 1} \left[1 + \frac{1}{(2\mu-1)^{(\mu-1)^3}} + \frac{1}{(2\mu-1)^{(\mu-1)^3} (2\mu-3)^{(\mu-2)^3}} + \ldots \right]$$

$$\leqq \frac{2}{\pi} c_{\lambda_1} \frac{(2\mu+1)^{\mu^3}}{\{(2\mu+1)^{\mu^3}\}^2 - 1} K,$$

where K represents the sum of the series in the square brackets. Hence, $\lim_{\mu \to \infty} I_2 = 0$.

Finally

$$I_3 \leqq c_{\mu+1}\, \pi \sum_{\gamma=\mu+1}^{\infty} \left\{ \frac{R_\mu}{R_{\gamma-1}} - \frac{R_\mu}{R_\gamma} \right\} \leqq \frac{\pi}{\left\{ \log (2\mu+3)^{(\mu+1)^3} \right\}^{1/2}}.$$

Therefore $\lim_{\mu \to \infty} I_3 = 0$.

Thus it has been shown that the integral (4. 1) tends to ∞, when n takes this particular sequence of values.

5. It has been shown in § 3 that the Fourier series will be summable $(C, 1)$, if each of the integrals (3. 2) and (3. 3) is $o(1)$. Now let us take for $\Phi(t)/t$ the function $F(t)$ which has been defined in the preceding article, so that

$$\Phi(t) = t \left\{ \log (2\mu+1)^{\mu^3} \right\}^{-1/2} \sin R_\mu t \qquad \left(\frac{\pi}{R_\mu} \leqq t < \frac{\pi}{R_{\mu-1}} \right)$$

and

$$\Phi(0) = 0.$$

Then

$$\frac{d\,\Phi(t)}{d\,t} = c_\mu \sin R_\mu t + t\, c_\mu\, R_\mu \cos R_\mu t,$$

where

$$c_\mu = \left\{ \log (2\mu+1)^{\mu^3} \right\}^{-1/2},$$

is integrable. For, the first term on the right in the above is continuous and therefore integrable. Also

$$\sum_{\gamma=\lambda_1}^{\infty} \int_{\pi/R_\gamma}^{\pi/R_{\gamma-1}} |t \cdot c_\gamma R_\gamma \cos R_\gamma t|\, dt \leqq \sum_{\gamma=\lambda_1}^{\infty} c_\gamma R_\gamma \frac{\pi^2}{2} \left\{ \frac{1}{R_\gamma^2 - 1} - \frac{1}{R_\gamma^2} \right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \sum_{\gamma=\lambda_1}^{\infty} c_\gamma \frac{(2\gamma+1)^{\gamma^3}}{1 \cdot 3^{1^3} \cdot 5^{2^3} \cdot \ldots \cdot (2\gamma-1)^{(\gamma-1)^3}} - \frac{\pi^2}{2} \sum_{\gamma=\lambda_1}^{\infty} c_\gamma \frac{1}{R_\gamma},$$

$$< \text{a constant},$$

since both the series are convergent. Therefore $\Phi(t)$ is an indefinite integral.

Now $\Phi(t)/t$ is continuous and tends to zero with t, hence by Fejér's theorem for the summability $(C, 1)$ of Fourier series, the integral (3. 3) is $o(1)$. But taking the lemma γ and the result of § 4 into consideration, it follows that the condition (3. 2) is not satisfied.

Again for this case, the integral

$$\int_0^\delta \frac{\Phi(t)}{t^2}\, dt$$

exists. For

$$\sum_{\gamma=\lambda_1}^{\infty} c_\gamma \int_{\pi/R_\gamma}^{\pi/R_{\gamma-1}} \frac{\sin R_\gamma t}{t} dt = \sum_{\gamma=\lambda_1}^{\infty} c_\gamma \frac{R_\gamma}{\pi} \int_{\pi/R_\gamma}^{\eta} \sin R_\gamma dt \ldots \eta \leqq \frac{\pi}{R_{\gamma-1}}$$

$$\leqq \frac{2}{\pi} \sum_{\gamma=\lambda_1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^{3/2} \{\log(2\gamma+1)\}^{1/2}}$$

$$< \text{a constant.}$$

Hence applying the lemma β, it follows that the integral

$$\int_0^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

also exists, but the series is not summable $(C, 1)$. This completes the proof of the theorem.

(Eingegangen am 10. März 1935.)

Über die Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie in endlichen algebraischen Erweiterungen erster und zweiter Art.

Von

Heinrich Grell in Halle (Saale).

Wir wollen sagen, in einem Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ gelte die gewöhnliche Idealtheorie, wenn sich jedes vom Null- und Einheitsideal verschiedene Ideal eindeutig als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellen läßt und die Primideale von $\mathfrak{o}$ mit denjenigen Idealen identisch sind, die $\mathfrak{o}$ und nur $\mathfrak{o}$ als echten Teiler haben. Dann geht es um den Beweis des folgenden Satzes:

Gilt in $\mathfrak{o}$ die gewöhnliche Idealtheorie, so auch in der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ jeder endlichen algebraischen Erweiterung K des Quotientenkörpers k von $\mathfrak{o}$.

$\mathfrak{O}$ ist dabei erklärt als Gesamtheit der bezüglich $\mathfrak{o}$ ganzen Elemente aus K. Es ist also nicht wie bei den bisherigen Fassungen dieses Satzes[1]) notwendig, daß K Erweiterung erster Art (separable Erweiterung) von k ist oder daß weitere einschränkende Voraussetzungen[2]) über K gemacht werden.

Der Beweis soll in möglichster Anlehnung an van der Waerden, Moderne Algebra II, § 100 geführt werden. Demnach haben wir für $\mathfrak{O}$ zu zeigen:

1. *$\mathfrak{O}$ ist ganz-abgeschlossen in K.* Das folgt sofort aus dem Gesetz der Transitivität der Ganzheit[3]).

2. *Alle vom Nullideal verschiedenen Primideale von $\mathfrak{O}$ haben nur $\mathfrak{O}$ als echten Teiler.* Das folgt allein aus der Algebraizität der Elemente von $\mathfrak{O}$ bezüglich $\mathfrak{o}$ nach A, S. 95—96; denn von der in der Formulierung

---

[1]) Siehe van der Waerden, Moderne Algebra II (zitiert mit A) (Berlin 1931), S. 93—94 oder E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen 96 (1926), § 3, 1.

[2]) Siehe A, S. 94—95 (Kleindruck).

[3]) Siehe A, S. 90, Mitte.

des dortigen Satzes auftretenden $\mathfrak{R}$-Ordnung wird nicht deren Endlichkeit bezüglich $\mathfrak{R}$, sondern lediglich die Algebraizität ihrerElemente bezüglich $\mathfrak{R}$ benutzt, was auch in unserem Fall zutrifft. Gleichzeitig zeigt der erste Absatz des van der Waerdenschen Beweises, daß jedes Ideal $\mathfrak{M} \neq (0)$ aus $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{o}$ ein vom Nullideal verschiedenes Verengungsideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{o}$ besitzt, daß also für jedes Ideal $\mathfrak{M} \neq (0)$ aus $\mathfrak{O}$ bei geeignetem $\mathfrak{m}$ aus $\mathfrak{o}$ eine Beziehung $\mathfrak{O}\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{M}$ besteht. — Schließlich ist noch zu zeigen:

3. *In $\mathfrak{O}$ gilt der Teilerkettensatz für die Ideale.* Nach dem soeben bemerkten genügt der Nachweis, daß jede mit einem Ideal $\mathfrak{O}\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} \neq (0)$ aus $\mathfrak{o}$) beginnende Teilerkette im endlichen abbricht. Schärfer werden wir beweisen, daß im Restklassenring $\mathfrak{O}\,|\,\mathfrak{O}\mathfrak{m}$ der Teiler- und Vielfachenkettensatz für die $\mathfrak{o}$-Moduln gültig ist, oder was damit äquivalent ist, daß sich in $\mathfrak{O}\,|\,\mathfrak{O}\mathfrak{m}$ eine $\mathfrak{o}$-Modul-Kompositionsreihe endlicher Länge ziehen läßt. Da bei $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1^{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{p}_r^{\varrho_r}$ der Restklassenring $\mathfrak{O}\,|\,\mathfrak{O}\mathfrak{m} = \mathfrak{T}$ direkte Summe $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \ldots + \mathfrak{T}_r$ der r Ringe $\mathfrak{T}_i$ wird, die zu den Restklassenringen $\mathfrak{O}\,|\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{p}_i^{\varrho_i}$ ringisomorph sind, genügt bei beliebigem Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ der Beweis der Tatsache, daß $\overline{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}\,|\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{p}^{\varrho}$ endlicher $\mathfrak{o}$-Modul ist; denn dann folgt die Gültigkeit von Teiler- und Vielfachenkettensatz nach einem bekannten Verfahren[4]), und aus den endlichen Kompositionsreihen der $\mathfrak{T}_i$ ergibt sich sofort eine endliche für $\mathfrak{T}$.

Zunächst ist $\mathfrak{O}\,|\,\mathfrak{O}\,\mathfrak{p} = \mathfrak{O}^*$ von endlichem Rang in bezug auf $\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p} = \mathfrak{o}^*$, weil es in $\mathfrak{O}^*$ höchstens n bezüglich $\mathfrak{o}^*$ linear unabhängige Elemente geben kann, wenn $n = [K : k]$ den Grad von K über k angibt. Für $n+1$ Elemente $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ aus $\mathfrak{O}$ hat man nämlich mit nicht lauter verschwindenden Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{o}$ eine Beziehung $a_0\omega_0 + a_1 w_1 + \ldots + a_n\omega_n = 0$. Von den a_i darf man annehmen, daß sie nicht alle durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind; verwandelt man $\mathfrak{p}$ durch Multiplikation mit einem zu $\mathfrak{p}$ teilerfremden Ideal $\mathfrak{r}$ in ein Hauptideal $\mathfrak{o}p$ und ist $\mathfrak{p}^m$ die höchste in allen a_i aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}$, so wird bei $\mathfrak{o}\,a_i = \mathfrak{p}^m \cdot \mathfrak{a}_i$ gelten $\dfrac{a_i}{p^m} = \dfrac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{r}^m}$; erweitert man den Bruch rechts mit einem zu $\mathfrak{p}$ teilerfremden Ideal $\mathfrak{c}$ so, daß $\mathfrak{r}^m\mathfrak{c} = \mathfrak{o}c$ Hauptideal wird, so werden auch die $\mathfrak{a}_i\mathfrak{c} = \mathfrak{o}\,c\,p^{-m}a_i = \mathfrak{o}\,c_i$ Hauptideale, die nicht sämtlich durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein können; aus der Gleichung

$$a_0\omega_0 + a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n = 0$$

geht also durch Multiplikation mit cp^{-m} eine Beziehung mit wenigstens einem zu $\mathfrak{p}$ teilerfremden Koeffizienten hervor. Geht man nun zu Restklassen nach $\mathfrak{O}\,\mathfrak{p}$ über, so ergibt sich eine wirkliche lineare Abhängigkeit. Weil $\mathfrak{o}^*$ Körper ist, gibt es also eine endliche $\mathfrak{o}^*$-Basis $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_g^*$ von $\mathfrak{O}^*$.

[4]) Siehe die in Fußnote [1]) erwähnte Arbeit von E. Noether, § 2, Modulsatz.

Sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ beliebige Elemente der Restklassen $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_g^*$, so läßt sich wegen $\mathfrak{O}\mathfrak{p} = (\mathfrak{O}p, \mathfrak{O}\mathfrak{p}^\varrho)$ jedes Element ω aus $\mathfrak{O}$ modulo $\mathfrak{O}\mathfrak{p}^\varrho$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ durch die $\varrho \cdot g$ Elemente

$$\lambda_i \cdot p^\nu \; (i = 1, \ldots, g; \; \nu = 0, 1, \ldots, \varrho - 1)$$

darstellen. Also besitzt $\overline{\mathfrak{O}}$ die endliche $\mathfrak{o}$-Modulbasis aus den Restklassen $\overline{\lambda_i \cdot p^\nu}$. Damit ist unser Satz bewiesen.

Ist $\mathfrak{t}$ eine Zwischenordnung von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$, so läßt sich von jedem Ideal $\mathfrak{M} \neq (0)$ aus nach $\mathfrak{O}$ eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{o}$-Moduln, erst recht also von $\mathfrak{t}$-Moduln ziehen. Auch im Fall der Erweiterungen zweiter Art gilt demnach die in meiner Arbeit „Verzweigungstheorie in allgemeinen Ordnungen algebraischer Zahlkörper“ [5]) entwickelte Gradtheorie, die nach dem Vorbild der dort für den Verzweigungsmodul $\mathfrak{v}$ gegebenen Normendefinition leicht zu einer Normentheorie zu ergänzen wäre [6]).

---

[5]) Erscheint demnächst in dieser Zeitschrift.

[6]) Zusatz bei der Korrektur: Einer freundlichen Mitteilung von F. K. Schmidt verdanke ich den Hinweis, daß der hier bewiesene Satz mit Methoden der Bewertungstheorie von ihm schon 1927 in seinem Habilitationsvortrag abgeleitet wurde; das besondere der vorliegenden Note besteht also darin, daß sie zum gleichen Ergebnis auf Dedekindscher Grundlage gelangt. Inzwischen hat F. K. Schmidt zeigen können, daß es Ringe mit Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie gibt, über denen endliche algebraische Körpererweiterungen existieren, deren Hauptordnung keine endliche Modulbasis über dem Grundbereich hat; hingegen ist eine endliche Modulbasis immer vorhanden, wenn der Ausgangsring ein Polynomring ist.

Literatur.

[1] E. Artin und B. L. v. d. Waerden, Die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen, Nachr. d. Ges. d. Wissenschaften zu Göttingen 1926, Math.-phys. Klasse, S. 23—27.

[2] A. Ostrowski, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper. (Die Theorie der Teilbarkeit in allgemeinen Körpern), Math. Zeitschr. **39** (1935), S. 269—404.

[3] W. Krull, Ein Satz über primäre Integritätsbereiche. Math. Ann. **103** (1930), S. 450—465.

(Eingegangen am 15. März 1935.)

Some problems of Waring's type.

By

Inder Chowla (Lahore).

1. We write

$$(m)^k = (n)^k \tag{1}$$

when there exist positive integers $x_s (s \leqq m)$, $y_t (t \leqq n)$ such that

$$\sum_{s \leqq m} x_s^k = \sum_{t \leqq n} y_t^k \tag{2}$$

where

$$(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 1, \tag{3}$$

$$x_s (s \leqq m) \neq y_t (t \leqq n). \tag{4}$$

If (1) has infinitely many solutions we write[1])

$$(m)^k = (n)^k \text{ i. o.} \tag{5}$$

$\varepsilon(k)$ denotes the least value of $m + n$ such that (5) is true. Since it is trivial that

$$(k+1)^k = (k+1)^k \text{ i. o.}$$

we have $\varepsilon(k) \leqq 2k + 2$. It is not yet known whether $\varepsilon(k) \leqq 2k + 1$ for general k, though this has been proved for special values of k. From results due to Sastry[2]), Rao[3]) and S. Chowla[4a]) we easily deduce that

$$\varepsilon(5) \leqq 5, \quad \varepsilon(6) \leqq 12, \quad \varepsilon(7) \leqq 13, \quad \varepsilon(9) \leqq 17. \tag{6}$$

We also consider the function $\delta(k)$ defined as the least value of $m + n$ such that there exists a constant $c = c(k) \neq 0$ with the property that

$$c = \sum_{s \leqq m} x_s^k - \sum_{t \leqq n} y_t^k \qquad [m, n \geqq 1]$$

has infinitely many solutions in which x_s, y_t are subject to the restriction that

$$x_s (s \leqq m) > A, \quad y_t (t \leqq n) > A, \tag{7}$$

where A is any preassigned number. Without the last mentioned restriction it would be trivial that

$$\delta(k) \leqq \varepsilon(k) + 1 \leqq 2k + 3.$$

---

[1]) 'i. o.' $\equiv$ 'infinitely often'.

[2]) *Journ. London Math. Soc.* 9 (1934), pp. 242—246. [$E(5) \leqq 6$].

[3]) *Journ. London Math. Soc.* 9 (1934), pp. 172—173. [$E(6) \leqq 12$].

[4a]) *Proc. Ind. Acad. Sc.* (A), 1 (1935), pp. 590—591. [$E(7) \leqq 13$, $E(9) \leqq 17$]

It seems likely that for general k,

$$\delta(k) \leqq 2k, \quad \varepsilon(k) \leqq 2k,$$

but these results, if true, must lie very deep. However we can prove

Theorem 1[4b]).

$$\text{Min}\,[\delta(k),\ \varepsilon(k)] \leqq 2k.$$

Further

Theorem 2[5]).

$$\delta(5) \leqq 8, \quad \delta(10) \leqq 21.$$

Theorem 3[6]).

$$\delta(6) \leqq 12, \quad \delta(7) \leqq 13, \quad \delta(8) \leqq 16, \quad \delta(9) \leqq 17.$$

2. *Proof of* $\delta(5) \leqq 8$.

This is an immediate consequence of the identity[7]):

$$(10t^5+1)^5 + (10t^2)^5 + (9t^2)^5 + (t^2)^5 + (t^2)^5 - (10t^5-1)^5 - (10t^4)^5 - (11t^2)^5 = 2. \tag{8}$$

3. *Proof of* $\delta(10) \leqq 21$.

Let

$$a_1, \ldots, a_n \overset{k}{=} b_1, \ldots, b_n \tag{9}$$

signify that

$$\sum_a a^m = \sum_b b^m \ (1 \leqq m \leqq k). \tag{10}$$

Further let

$$(a_1, \ldots, a_n) \overset{k}{=} (b_1, \ldots, b_n) \tag{11}$$

signify that (10) holds, but that

$$\sum_a a^{k+1} \neq \sum_b b^{k+1}. \tag{12}$$

Then we have

Lemma 1[8]). *If*

$$a_1, \ldots, a_n \overset{k}{=} b_1, \ldots, b_n, \tag{13}$$

then

$$a_1, \ldots, a_n, b_1+x, \ldots, b_n+x \overset{k+1}{=} b_1, \ldots, b_n, a_1+x, \ldots, a_n+x. \tag{14}$$

An improved result is that

4b) This theorem is due to S. Chowla. A proof will appear elsewhere.

5) These results (proved in this paper) are improvements on Rao's $\delta(5) \leq 9$, $\delta(10) < 40$, communicated to *Math. Zeitschr.* **40**, pp. 477—483 before the writing of this paper. Rao omits the restriction (7). [Added Aug. 20, 1935. Since writing this paper I have proved that $\delta(5) \leqq 5$. See *Proc. Ind. Acad. Sc.* (A), 2 (1935), pp. 10—13.]

6) Of these four inequalities the first and third are proved by Rao in the paper quoted in the last footnote. The second and fourth inequalities are proved by me elsewhere.

7) See Rao, *Journ. London Math. Soc.* 9 (1934), 171.

8) This was remarked by Tarry. See Dickson, *History of the theory of numbers*, II, p. 710.

Lemma 2. *If*

$$(a_1, \ldots, a_n) \overset{k}{=\!=} (b_1, \ldots, b_n)^k \tag{15}$$

then, if $x \neq 0$,

$$(a_1, \ldots, a_n, b_1 + x, \ldots, b_n + x) \overset{k+1}{=\!=} (b_1, \ldots, b_n, a_1 + x, \ldots, a_n + x). \tag{16}$$

Proof. If

$$\sum_a a^{k+2} + \sum_b (x+b)^{k+2} = \sum_b b^{k+2} + \sum_a (x+a)^{k+2}$$

then, on account of (13), comparing coefficients of like powers of x,

$$(k+2)\, x \sum_b b^{k+1} = (k+2)\, x \sum_a a^{k+1},$$

which implies $x = 0$ on account of (12).

Lemma 3[9]).

$$a_1, \ldots, a_k \overset{k}{=\!=} b_1, \ldots, b_k$$

can not be true unless the $b_1, \ldots, b_k$ are a permutation of $a_1, \ldots, a_k$.

Lemma 4[10]).

$$1, 5, 10, 24, 28, 42, 47, 51 \overset{7}{=\!=} 2, 3, 12, 21, 31, 40, 49, 50.$$

Lemma 5.

$$(1, 5, 10, 24, 28, 42, 47, 51) \overset{7}{=\!=} (2, 3, 12, 21, 31, 40, 49, 50).$$

Proof. This follows immediately from lemmas 3 and 4.

Lemma 6.

$$(1, 5, 11, 24, 28, 30, 42, 47, 58, 59) \overset{8}{=\!=} (2, 3, 14, 19, 31, 33, 37, 50, 56, 60).$$

Proof. This follows by applying lemma 2, with $x = 9$, to lemma 5 as (15).

Now lemma 6 implies

$$\{\sum_a (x+a)^9\} - \{\sum_b (x+b)^9\} = c \qquad (c \neq 0) \tag{17}$$

where a runs through the values 1, 5, 11, 24, 28, 30, 42, 47, 58, 59, and b runs through the values 2, 3, 14, 19, 31, 33, 37, 50, 56, 60.

Integrating (17) with respect to x, we obtain

$$\sum_a (x+a)^{10} - \sum_b (x+b)^{10} = c\,x + d \qquad (c \neq 0). \tag{18}$$

Here put $x = (y^{10} - d + m)/c$. Hence

$$\sum_a (y^{10} - d + m + a\,c)^{10} - \sum_b (y^{10} - d + m + b\,c)^{10} - (c\,y)^{10} = c^{10}\, m. \qquad (c \neq 0). \tag{19}$$

Since $c \neq 0$ we find by taking any fixed $m \neq 0$ that (12) implies

$$\delta(10) \leqq 10 + 10 + 1 = 21.$$

---

[9]) See Dickson, *ibid*, II, p. 712 (bottom).

[10]) Tarry in Dickson, *ibid*, II, p. 710.

(Eingegangen am 24. März 1935.)

Über Ternionen in der Geometrie.

Von

H. Beck in Bonn.

Von den drei Typen irreduzibler Systeme komplexer Zahlen in drei Einheiten befolgen zwei das kommutative Gesetz der Multiplikation. Sind a, b, c, d vier Zahlen eines solchen Systems, so liefern die „linearen" Substitutionen

$$x' = (xc + d)^{-1}(xa + b)$$

beidemale eine *neun*parametrige Gruppe. Interessanter ist das dritte, nicht kommutative System, bei dem sich eine *elf*gliedrige Gruppe von einer Struktur ergibt, die in der Geometrie bei verschiedenen Gelegenheiten auftritt. So bei der Kollineationsgruppe eines speziellen linearen Komplexes, bei einer Cremonagruppe im Affinraum, bei der Gruppe der Laguerreschen Transformationen von Blättern (orientierten Ebenen), bei der Gruppe der gleichsinnigen Dehnungen eines vierdimensionalen Euklidischen Raumes, und auch sonst noch.

Daraus ergeben sich dann mehrere Möglichkeiten, die komplexen Zahlen dieses Systems geometrisch zu „deuten". Das kann geschehen im Geradengebüsch als gerade Linie, im Euklidischen R_3 als Blatt, im Euklidischen R_4 als Minimalraum, im affinen R_3 als (eigentlicher) Punkt.

§ 1.

Unter einer *Ternion* soll im folgenden eine höhere komplexe Zahl

$$X = X_0 E_0 + X_1 E_1 + X_2 E_2$$

mit der Multiplikationstafel

E_0	E_1	E_2
E_1	E_0	E_2
E_2	$-E_2$	0

verstanden werden[1]). Setzt man

$$\widetilde{A} = A_0 E_0 - A_1 E_1 - A_2 E_2, \quad N(A) = A_0^2 - A_1^2,$$

so wird

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = N(A) E_0.$$

[1]) Study, Math. Enzykl. I A 4, S. 167.

Der Faktor E_0 kann mit der skalaren Einheit identifiziert und daher weggelassen werden. Die „Norm“ $N(A)$ ist reduzibel. Nur für $N(A) \neq 0$ gilt

$$A^{-1} = \widetilde{A} : N(A).$$

§ 2.

Die Schar von Transformationen

$$X' = (XC + D)^{-1}(XA + B), \tag{1}$$

in der die vier Ternionen A, B, C, D der Bedingung

$$N(AD - BC) \neq 0$$

genügen, bildet eine Gruppe mit den Zusammensetzungsformeln

$$A'' = AA' + CB', \quad B'' = BA' + DB',$$
$$C'' = AC' + CD', \quad D'' = BC' + DD',$$
$$N(A''D'' - B''C'') = N(AD - BC) \cdot N(A'D' - B'C').$$

Die identische Transformation erhält man dann und nur dann, wenn

$$A = \widetilde{A} = D = \widetilde{D} \neq 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Daher hängt die Gruppe von *elf* wesentlichen Parametern ab; es kommt nur auf die Verhältnisse

$$A : B : C : D$$

an. Das soll heißen, daß die beiden Systeme von Ternionenquadrupeln

$$(A, B, C, D) \quad \text{und} \quad (\varrho A, \varrho B, \varrho C, \varrho D)$$

dieselbe Transformation liefern, wenn der Faktor ϱ von Null verschieden *und skalar* ist ($\varrho = \widetilde{\varrho} \neq 0$).

§ 3.

Einer Transformation der elfgliedrigen Gruppe (1) lassen sich daher zwölf homogene Koordinaten beilegen

$$A_0 : A_1 : A_2 : B_0 : B_1 : B_2 : C_0 : C_1 : C_2 : D_0 : D_1 : D_2.$$

Beachtet man, daß die Reduzibilität der Norm einer Ternion sich in den Formeln auswirkt:

$$(AB)_0 + (AB)_1 = (A_0 + A_1) \cdot (B_0 + B_1)$$
$$(AB)_0 - (AB)_1 = (A_0 - A_1) \cdot (B_0 - B_1),$$
$$N(AD - BC) = \{(A_0 + A_1)(D_0 + D_1) - (B_0 + B_1)(C_0 + C_1)\}$$
$$\cdot \{(A_0 - A_1)(D_0 - D_1) - (B_0 - B_1)(C_0 - C_1)\},$$

so erkennt man die Richtigkeit der Behauptung:

Die Gesamtheit der Transformationen der elfgliedrigen Gruppe (1) *läßt sich umkehrbar eindeutig auf die Punkte eines Raumes* R_{11} *beziehen, soweit diese nicht zwei quadratischen Mannigfaltigkeiten* M^2_{10} *vom Range vier* (*mit singulärem* R_7) *angehören.*

§ 4.

Die Gruppe (1) besteht aus birationalen Transformationen, deren skalare Formeln sich, wieder infolge der Reduzibilität der Ternionennorm so schreiben lassen:

$$X_0' + X_1' = \frac{(A_0 + A_1)(X_0 + X_1) + (B_0 + B_1)}{(C_0 + C_1)(X_0 + X_1) + (D_0 + D_1)},$$

$$X_0' - X_1' = \frac{(A_0 - A_1)(X_0 - X_1) + (B_0 - B_1)}{(C_0 - C_1)(X_0 - X_1) + (D_0 - D_1)},$$

$$\begin{aligned}(2)\quad &\{(C_0+C_1)(X_0+X_1)+(D_0+D_1)\}\cdot\{(C_0-C_1)(X_0-X_1)+(D_0-D_1)\}\cdot X_2' \\ &= \{A_2(X_0+X_1)+B_2\}\cdot\{(C_0-C_1)(X_0-X_1)+(D_0-D_1)\} \\ &\quad -\{C_2(X_0+X_1)+D_2\}\cdot\{(A_0-A_1)(X_0-X_1)+(B_0-B_1)\} \\ &\quad +\{(A_0-A_1)(D_0-D_1)-(B_0-B_1)(C_0-C_1)\}X_2.\end{aligned}$$

Die Unsymmetrie in der letzten Formel ist eine Folge der Nichtkommutativität des Ternionensystems. In der Liste der Cremonatransformationen von M. Noether liegt der zweite Typus vor[2]); vgl. § 17. Darin liegt aber nur *eine* Realisierung der Gruppe; wir wollen im folgenden eine Reihe anderer Deutungen vorführen, deren jede uns dann auch ein Verfahren gibt, die Ternion X zu interpretieren.

§ 5.

Holomorph zur Gruppe (1) ist die Gruppe *der automorphen Kollineationen einer geraden Linie im* R_3. Seien $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ homogene Punktkoordinaten im *projektiven* R_3, so bleibt die Gerade

$$\xi_0 = \xi_1 = 0$$

bei den Kollineationen der *kontinuierlichen* Gruppe

$$\begin{aligned}(3)\quad \xi_0' &= a_{00}\xi_0 + a_{01}\xi_1, \\ \xi_1' &= a_{10}\xi_0 + a_{11}\xi_1, \\ \xi_2' &= a_{20}\xi_0 + a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3, \\ \xi_3' &= a_{30}\xi_0 + a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3, \\ a_{00}a_{11} - a_{01}a_{10} &\neq 0, \\ a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} &\neq 0\end{aligned}$$

als Ganzes stehen. Sie ist singuläre Gerade eines speziellen linearen Geradenkomplexes (auch Geradengebüsch genannt), der ebenfalls als Ganzes bei den Transformationen der Gruppe (3) stehen bleibt (und noch bei einer Obergruppe von Kollineationen und Korrelationen, die hier aber nicht weiter interessiert).

[2]) D. M. V. 5 (1896), S. 68–69.

§ 6.

Bezeichnen wir Plückersche Strahlenkoordinaten im *projektiven* Raum (es wird später noch von einem anderen, *Euklidischen* dreidimensionalen Raum die Rede sein) durch

$$P_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i, \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

so wird die Gleichung des Gebüsches durch

$$P_{01} = 0$$

gegeben, und die Plückersche Relation reduziert sich auf

$$P_{02} P_{31} + P_{03} P_{12} = 0.$$

Daher lassen sich die Gebüschgeraden erschöpfend durch drei wesentliche Parameter

$$w, \quad h = h_1 : h_0, \quad n = n_1 : n_0$$

etwa so darstellen:

$$(4) \quad P_{01} = 0, \quad P_{02} = h_0 n_0, \quad P_{03} = h_0 n_1, \quad P_{23} = w, \quad P_{31} = -h_1 n_1, \quad P_{12} = h_1 n_0.$$

Rechnet man die Gruppe (3) auf diese Parameter um, so lautet sie

$$(5) \quad \begin{gathered} h' = \frac{a_{11} h + a_{10}}{a_{01} h + a_{00}}, \qquad n' = \frac{a_{33} n + a_{32}}{a_{23} n + a_{22}}, \\ w' = (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) w + (a_{20} h_0 + a_{21} h_1)(a_{32} n_0 + a_{33} n_1) \\ - (a_{30} h_0 + a_{31} h_1)(a_{22} n_0 + a_{23} n_1). \end{gathered}$$

§ 7.

Der Übergang von der Darstellung (5) der Gruppe zur Ternionendarstellung (2) vollzieht sich vermöge der Formeln:

$$\begin{gathered} h = X_0 + X_1, \quad n = X_0 - X_1, \quad w : h_0 n_0 = X_2; \\ a_{00} = D_0 + D_1, \quad a_{01} = C_0 + C_1, \\ a_{10} = B_0 + B_1, \quad a_{11} = A_0 + A_1, \\ a_{20} = -D_2, \quad a_{21} = -C_2, \quad a_{22} = D_0 - D_1, \quad a_{23} = C_0 - C_1, \\ a_{30} = -B_2, \quad a_{31} = -A_2, \quad a_{32} = B_0 - B_1, \quad a_{33} = A_0 - A_1. \end{gathered}$$

Damit ist eine erste geometrische Deutung der Ternion X nahegelegt: *Der Ternion X kann zugeordnet werden die Gerade des projektiven Raumes mit den Plückerschen Strahlenkoordinaten*

$$(6) \quad P_{01} : P_{02} : P_{03} : P_{23} : P_{31} : P_{12} = 0 : 1 : X_0 - X_1 : X_2 : -(X_0^2 - X_1^2) : X_0 + X_1.$$

Alle diese geraden Linien gehören einem speziellen linearen Komplex an; umgekehrt liefert nicht jede Komplexgerade eine Ternion; es fällt ein Bündelfeld ($P_{01} = P_{02} = 0$, $P_{03} P_{12} = 0$) aus (ein reduzibles Geradennetz). Die Umkehrungsformeln lauten:

$$(7) \quad X = \frac{P_{12} + P_{03}}{2 P_{02}} E_0 + \frac{P_{12} - P_{03}}{2 P_{02}} E_1 + \frac{P_{23}}{P_{02}} E_2.$$

§ 8.

Die elfgliedrige Gruppe unserer Struktur tritt in anderem Gewande auch im *Euklidischen* Raume auf, als Gruppe des *Minimalkomplexes*. Damit ist gemeint die Gesamtheit der *eigentlichen* Treffgeraden des absoluten Kegelschnitts. Nur diese sollen als Minimalgerade bezeichnet werden, also nicht die Tangenten und Bisekanten des absoluten Kegelschnitts.

Während wir homogene Punktkoordinaten im projektiven Raum durch $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ wiedergaben, soll im Euklidischen Raum vereinigte Lage des Punktes x und der Ebene v durch

$$v_\omega x_\omega + v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$$

wiedergegeben werden; dabei soll der absolute Kegelschnitt die Gleichungen

$$x_\omega = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

erhalten. Der Index Null ist hier vermieden, weil sich für ihn eine andere Verwendung bieten wird. Plückersche Strahlenkoordinaten sollen im Euklidischen Raum als

$$X_{\omega 1} : X_{\omega 2} : X_{\omega 3} : X_{23} : X_{31} : X_{12}$$

bezeichnet werden.

§ 9.

Die Gerade X ist Minimalgerade, wenn $X_{\omega 1}$, $X_{\omega 2}$, $X_{\omega 3}$ nicht gleichzeitig verschwinden, und wenn die beiden Gleichungen erfüllt sind:

$$X_{\omega 1}^2 + X_{\omega 2}^2 + X_{\omega 3}^2 = 0,$$

$$X_{\omega 1} X_{23} + X_{\omega 2} X_{31} + X_{\omega 3} X_{12} = 0.$$

Bei Benutzung der von Study eingeführten dualen Zahlen $a + b\varepsilon$ mit $\varepsilon^2 = 0$ lassen sich diese beiden Gleichungen zu einer einzigen zusammenfassen:

$$(X_{\omega 1} + \varepsilon X_{23})^2 + (X_{\omega 2} + \varepsilon X_{31})^2 + (X_{\omega 3} + \varepsilon X_{12})^2 = 0.$$

Dadurch wird die Parameterdarstellung nahegelegt:

$$X_{\omega 1} + \varepsilon X_{23} = \Xi_0^2 - \Xi_1^2, \; X_{\omega 2} + \varepsilon X_{31} = i(\Xi_0^2 + \Xi_1^2), \; X_{\omega 3} + \varepsilon X_{12} = -2\Xi_0 \Xi_1,$$

wo Ξ_0 und Ξ_1 duale Zahlen sind. Setzt man

$$\Xi_0 = \xi_0 + \varepsilon \xi_2, \quad \Xi_1 = \xi_1 + \varepsilon \xi_3,$$

so folgt

$$\begin{aligned} X_{\omega 1} &= \xi_0^2 - \xi_1^2, & X_{23} &= 2(\xi_0 \xi_2 - \xi_1 \xi_3), \\ X_{\omega 2} &= i(\xi_0^2 + \xi_1^2), & X_{31} &= 2i(\xi_0 \xi_2 + \xi_1 \xi_3), \\ X_{\omega 3} &= -2\xi_0 \xi_1, & X_{12} &= -2(\xi_0 \xi_3 + \xi_1 \xi_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Daß sich aus diesen Formeln bei gegebener Minimalgeraden die Verhältnisse der ξ *eindeutig* bestimmen, folgt aus

$$\frac{X_{\omega 2}X_{12}-X_{\omega 3}X_{31}}{X_{\omega 1}} = \frac{X_{\omega 3}X_{23}-X_{\omega 1}X_{12}}{X_{\omega 2}} = \frac{X_{\omega 1}X_{31}-X_{\omega 2}X_{23}}{X_{\omega 3}}$$
$$= 2i(-\xi_0\xi_3+\xi_1\xi_2).$$

Die Formeln (8) vermitteln daher eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Minimalgeraden des Euklidischen Raumes einerseits, den Punkten des projektiven Raumes andererseits, *soweit diese nicht der geraden Linie* $\xi_0 = \xi_1 = 0$ *angehören* (vgl. § 5). Die Gruppe (3) geht dabei in die Gruppe des Minimalkomplexes über.

Diese Abbildung ist es, die die sogenannte Geraden-Kugeltransformation vermittelt[3]).

§ 10.

Damit kann der Gedanke, der von § 5 zu § 6 führte, von neuem aufgenommen werden. Vermöge (8) entsprechen sich:

Projektiver Raum	Euklidischer Raum
Punkt ξ:	Minimalgerade X.
Gerade Punktreihe P im speziellen Komplex $P_{01} = 0$:	*Parallelbüschel von Minimalgeraden.*

Der Scheitel des Parallelenbüschels wird aus

(9) $$x_\omega : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 - h^2 : i(1 + h^2) : -2h$$

für

(10) $$h = P_{12} : P_{02} = -P_{31} : P_{03} \; (= \xi_1 : \xi_0 = \eta_1 : \eta_0)$$

gewonnen; für die Ebene des Büschels hat man

(11) $$v_\omega : v_1 : v_2 : v_3 = 2iP_{23} : P_{02} + P_{31} : i(P_{02} - P_{31}) : -P_{03} - P_{12}.$$

Hinzufügen wollen wir noch, daß der andere Schnittpunkt dieser Ebene mit dem absoluten Kegelschnitt aus der Darstellung

$$x_\omega : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 - n^2 : i(1 + n^2) : -2n$$

für

$$n = P_{03} : P_{02} = -P_{31} : P_{12}$$

gewonnen wird. Die Buchstaben h und n sind dann dieselben, die bereits in § 6, (4) auftraten.

§ 11.

Die Figur im Euklidischen Raum, die sich als Bild der Geraden P des speziellen linearen Komplexes $P_{01} = 0$ des projektiven Raumes er-

[3]) Münch. Akad. 1917, S. 68; D. M. V. 22 (1913), S. 237.

geben hat, besteht aus einer *eigentlichen* Ebene, in der das eine Büschel von Minimalgeraden bevorzugt ist. Eine Ebene üblicher Ausdrucksweise wird so mit zwei Blättern überdeckt, und es ist daher durchaus angebracht, die Bezeichnung *Blatt* zu gebrauchen, wo man sonst auch von einer orientierten Ebene redet. Dieselbe Quadratwurzel, die die Unterscheidung der beiden absoluten Punkte der Ebene als *Hauptpunkt* und *Nebenpunkt* ermöglicht, unterscheidet auch die beiden Richtungen auf der Normale.

Ein Blatt auf der Ebene v läßt sich durch fünf homogene Koordinaten

$$v_\omega : v_0 : v_1 : v_2 : v_3$$

mit

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

darstellen. Das soll das Blatt sein, deren Richtungskosinus gegen die Koordinaten eindeutig durch

$$\cos \varphi_1 = v_1 : v_0, \quad \cos \varphi_2 = v_2 : v_0, \quad \cos \varphi_3 = v_3 : v_0$$

gegeben sind. Jetzt haben wir noch volle Freiheit, zu erklären, welcher Punkt als Hauptpunkt bezeichnet werden soll. In

$$x_\omega : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 - m^2 : i(1 + m^2) : -2m$$

soll der Hauptpunkt durch

$$(12) \qquad m = m_1 : m_0 = -v_3 - v_0 : v_1 - iv_2 = v_1 + iv_2 : v_3 - v_0,$$

der Nebenpunkt daher durch

$$m = m_1 : m_0 = -v_3 + v_0 : v_1 - iv_2 = v_1 + iv_2 : v_3 + v_0$$

geliefert werden.

§ 12.

Einer Geraden P des linearen Komplexes $P_{01} = 0$ war in § 10 ein Parallelenbüschel von Minimalgeraden zugeordnet, und damit läßt sich ihr auch ein Blatt zuordnen. Das soll zum Hauptpunkt haben den Scheitel des Büschels. Wegen (10), (11), (12) ergibt sich so das Blatt

$$(13) \quad \begin{aligned} v_\omega : v_0 : v_1 : v_2 : v_3 &= 2iP_{23} : P_{03} - P_{12} : P_{02} + P_{31} \\ &: i(P_{02} - P_{31}) : -P_{03} - P_{12} \end{aligned}$$

oder nach (4), § 6

$$(14) \quad \begin{aligned} v_\omega : v_0 : v_1 : v_2 : v_3 &= 2iw : h_0 n_1 - h_1 n_0 : h_0 n_0 - h_1 n_1 \\ &: i(h_0 n_0 + h_1 n_1) : -h_0 n_1 - h_1 n_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt eine zweite geometrische Deutung der Ternion x. *Ihr kann zugeordnet werden das Blatt*

$$(15) \quad \begin{aligned} v_\omega : v_0 : v_1 : v_2 : v_3 &= 2iX_2 : -2X_1 : 1 - X_0^2 + X_1^2 \\ &: i(1 + X_0^2 - X_1^2) : -2X_0. \end{aligned}$$

Die Umkehrung liefert

$$X = \frac{(h_1 n_0 + h_0 n_1) E_0}{2 h_0 n_0} + \frac{h_1 n_0 - h_0 n_1 E_1}{2 h_0 n_0} + \frac{w E_2}{h_0 n_0}$$

$$= \frac{h+n}{2} E_0 + \frac{h-n}{2} E_1 + \frac{w}{h_0 n_0} E_2$$

oder auch

$$X = \frac{v_3}{-(v_1 - i v_2)} E_0 + \frac{v_0}{-(v_1 - i v_2)} E_1 + \frac{i v_\omega}{-(v_1 - i v_2)} E_2, \quad v_1 - i v_2 \neq 0.$$

Es fallen also die $2 \cdot \infty^2$ Blätter durch einen bestimmten (uneigentlichen) Punkt aus; ihnen sind keine Ternionen zugeordnet. Die Gruppe (3), § 5 oder also (5), § 6 geht über in die der *eigentlichen Laguerreschen* Blatttransformationen.

§ 13.

Um die Laguerresche Gruppe mit Hilfe von Blattkoordinaten v darzustellen, empfiehlt es sich, die Koeffizienten a in (3) durch andere zu ersetzen:

$$\begin{aligned}
a_{00} &= \delta_0 + i\delta_3, & a_{01} &= \delta_2 + i\delta_1, \\
a_{10} &= -\delta_2 + i\delta_1, & a_{11} &= \delta_0 - i\delta_3, \\
-2a_{20} &= \beta_0 + i\beta_3, & -2a_{21} &= \beta_2 + i\beta_1, \quad a_{22} = \alpha_0 + i\alpha_3, \quad a_{23} = \alpha_2 + i\alpha_1, \\
-2a_{30} &= -\beta_2 + i\beta_1, & -2a_{31} &= \beta_0 - i\beta_3, \quad a_{32} = -\alpha_2 + i\alpha_1, \quad a_{33} = \alpha_0 - i\alpha_3,
\end{aligned}$$

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0, \quad \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \neq 0.$$

So erhält man ein System

$$\begin{aligned}
v'_\omega &= c_{\omega\omega} v_\omega + c_{\omega 0} v_0 i + c_{\omega 1} v_1 + c_{\omega 2} v_2 + c_{\omega 3} v_3, \\
i v'_0 &= * \quad c_{00} v_0 i + c_{01} v_1 + c_{02} v_2 + c_{03} v_3, \\
v'_1 &= * \quad c_{10} v_0 i + c_{11} v_1 + c_{12} v_2 + c_{13} v_3, \\
v'_2 &= * \quad c_{20} v_0 i + c_{21} v_1 + c_{22} v_2 + c_{23} v_3, \\
v'_3 &= * \quad c_{30} v_0 i + c_{31} v_1 + c_{32} v_2 + c_{33} v_3.
\end{aligned} \tag{16}$$

Die Koeffizienten c_{ik} in den letzten vier Zeilen sind die einer eigentlichen quaternären orthogonalen Substitution (einer elliptischen Bewegung des R_3); sie hängen von den α und δ bilinear ab. Die β treten nur in den $c_{\omega 0}$, $c_{\omega 1}$, $c_{\omega 2}$, $c_{\omega 3}$ auf, neben den α! Schließlich hat $c_{\omega\omega}$ den Wert

$$c_{\omega\omega} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Bedeutet i, k, l irgendeins der Indizestripel

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2,$$

so hat man

$$
\begin{aligned}
c_{\omega i} &= -\alpha_0\beta_i + \alpha_i\beta_0 - \alpha_k\beta_l + \alpha_l\beta_k, \quad c_{i\omega} = 0,\\
c_{0i} &= \alpha_0\delta_i - \alpha_i\delta_0 + \alpha_k\delta_l - \alpha_l\delta_k, \quad c_{i0} = -\alpha_0\delta_i + \alpha_i\delta_0 + \alpha_k\delta_l - \alpha_l\delta_k,\\
(17)\quad c_{kl} &= \alpha_k\delta_l + \alpha_l\delta_k + \alpha_0\delta_i + \alpha_i\delta_0, \quad c_{lk} = \alpha_k\delta_l + \alpha_l\delta_k - \alpha_0\delta_i - \alpha_i\delta_0,\\
c_{ii} &= \alpha_0\delta_0 + \alpha_i\delta_i - \alpha_k\delta_k - \alpha_l\delta_l,\\
c_{00} &= \alpha_0\delta_0 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \alpha_3\delta_3,\\
c_{\omega 0} &= -(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3), \quad c_{0\omega} = 0.
\end{aligned}
$$

§ 14.

Die Formeln (16) legen die Substitution nahe:

$$u_\omega : u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = v_\omega : i v_0 : v_1 : v_2 : v_3. \tag{18}$$

Jetzt ist

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0, \tag{19}$$

und unsere Substitution deutet sich zwanglos als Abbildung der Blätter v auf die Minimalräume u eines Euklidischen R_4 (Minimalprojektion).

Die Gruppe (16) läßt sich dann einfacher schreiben:

$$u_j' = c_{jk} u_k, \qquad (j, k = \omega, 0, 1, 2, 3). \tag{20}$$

Damit hat man eine *dritte geometrische Deutung der Ternion X. Der Ternion X läßt sich zuordnen der Minimalraum*

$$u_\omega : u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = 2iX_2 : -2iX_1 : 1 - X_0^2 + X_1^2 : i(1 + X_0^2 - X_1^2) : -2X_0$$

des Euklidischen R_4. Die Umkehrung gibt

$$X = \frac{u_3}{-(u_1 - iu_2)} E_0 - \frac{iu_0}{-(u_1 - iu_2)} E_1 + \frac{iu_\omega}{-(u_1 - iu_2)} E_2;$$

es fallen also die Minimalräume durch einen festen Punkt des R_4 aus.

§ 15.

Die Formel (20) induziert eine Gruppe von Transformationen *beliebiger* Räume R_3 der R_4, wenn man die Bedingung (19) fallen läßt. Der Bau der Formeln (16) zeigt, daß dann eine *Affinität* des R_4 vorliegt. Die kontragrediente Transformation läßt sich dann mit Hilfe *inhomogener* Punktkoordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 darstellen. Bedient man sich Hamiltonscher Quaternionen

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,\\
\alpha &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,\\
\beta &= \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,\\
\delta &= \delta_0 e_0 + \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3
\end{aligned}
$$

mit

$$e_0^2 = e_0, \quad e_i^2 = -e_0, \quad e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \quad e_k e_l = -e_l e_k = e_i,$$

(vgl. § 13), so geht die Gruppe (20) über in

$$x' = \delta^{-1}(x\alpha + \beta).$$

Das ist aber die Gruppe der *gleichsinnigen* Dehnungen[4]) im R_2.

§ 16.

Die erste geometrische Deutung der Ternion (§ 7) hat den Vorteil, daß sie einer *reellen* Ternion X (d. i. X_0, X_1, X_2 reell) eine *reelle* Figur als Bild zuordnet. Sie zeigt den Übelstand, daß es im speziellen linearen Komplex ∞^2 gerade Linien gibt, die nicht durch Ternionen erfaßt werden können.

Dieser Übelstand, der sich entsprechend bei der zweiten und dritten geometrischen Deutung der Ternionen wiederfindet, läßt sich überwinden, wenn man homogen auch im Ternionenbereich arbeitet, d. i. einem der geometrischen Objekte statt einer Ternion das Verhältnis von zwei Ternionen zuordnet.

§ 17.

Es gibt aber noch eine vierte geometrische Deutung der Ternionen, die von diesem Übelstand frei ist bzw. gemacht werden kann.

Wir nehmen die Formeln (6), § 7 wieder auf:

$$P_{01} : P_{02} : P_{03} : P_{23} : P_{31} : P_{12} = 0 : 1 : X_0 - X_1 : X_2 : -(X_0^2 - X_1^2) : X_0 + X_1,$$

und schreiben die rechte Seite homogen

$$0 : X_3^2 : (X_0 - X_1) X_3 : X_2 X_3 : -(X_0^2 - X_1^2) : (X_0 + X_1) X_3.$$

Da die P auf den linken Seiten bei der elfgliedrigen Gruppe linear und homogen transformiert werden, gilt entsprechendes von den fünf quadratischen Formen rechts. Deutet man also die $X_0 : X_1 : X_2 : X_3$ irgendwie als homogene Punktkoordinaten eines projektiven R_3, so wird die vierparametrige Schar der Gebilde

$$0 = b_{02} X_3^2 + b_{03}(X_0 - X_1) X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{31} \cdot -(X_0^2 - X_1^2) + b_{12}(X_0 + X_1) X_3$$

in sich transformiert. Sie enthält alle Flächen zweiter Ordnung, die sich in den beiden Geraden

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 = \sigma_0 : \pm \sigma_0 : \sigma_2 : 0$$

der Ebene $X_3 = 0$ durchdringen. Damit ist gezeigt, daß die Cremonasche Gruppe (2), wie bereits gesagt, dem *zweiten* Noetherschen Typus angehört.

Den Punkten der Ebene $X_3 = 0$ sind nicht Ternionen zugeordnet; aber hier bietet sich ungezwungen ein Weg, diese Ausnahmen zu beseitigen, *indem man sich auf den Standpunkt der Affingeometrie stellt und die Ebene* $X_3 = 0$ *zur uneigentlichen Ebene ernennt.*

---

[4]) Study, Math. Enzykl. I A 4, S. 178.

§ 18.

So kann man etwa ansetzen

$$X_0 : X_3 = x, \quad X_1 : X_3 = y, \quad X_2 : X_3 = z,$$

und hat dann die Gesamtheit der Ternionen

$$X = xE_0 + yE_1 + zE_2$$

lückenlos umkehrbar eindeutig auf die *eigentlichen* Punkte (Vektoren) (x, y, z) eines affinen Raumes bezogen.

Dieser Raum hat dann eine besondere Struktur; in ihm ist ein Bündel von Parallelen ausgezeichnet. Nennt man die geraden Linien dieses Bündels vertikal, so sind noch unter den Vertikalebenen zwei Büschel ausgezeichnet. Zwei Ebenen desselben Büschels sind parallel. In jedem Büschel gibt es eine Ebene, die die Ternionen trägt, welche Teiler der Null sind, deren Norm also verschwindet. Ihre Schnittgerade spielt im Parallelenbündel eine Sonderrolle. Die ∞^4 Flächen zweiter Ordnung sind Paraboloide, vertikale Zylinder und Paare getrennter ausgezeichneter Ebenen.

Der Addition zweier Ternionen entspricht dann die Addition der zugehörigen Vektoren. Die Multiplikation

$$X' = XA, \quad A = aE_0 + bE_1 + cE_2, \quad N(A) = a^2 - b^2 \neq 0$$

also

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= bx + ay, \\ z' &= cx + cy + (a - b)z \end{aligned}$$

bedeutet eine Affinität, die sich durchaus übersichtlich vollzieht, wenn man beachtet, daß jede Ternion von nicht verschwindender Norm sich als Summe zweier Teiler der Null in ganz bestimmter Weise darstellen läßt.

Überraschend einfach gestaltet sich dann die Konstruktion $X' = X^{-1}$, einer *nicht affinen* involutorischen Transformation, bei der außer zwei Punkten noch alle Punkte zweier Vertikalgeraden in Ruhe bleiben. Über diese Konstruktionen soll an anderer Stelle berichtet werden.

§ 19.

Unser Ternionensystem ist imaginär-äquivalent zu dem System mit der folgenden Multiplikationstafel:

E_0^*	E_1^*	E_2^*
E_1^*	$-E_0^*$	iE_2^*
E_2^*	$-iE_2^*$	0.

Jetzt könnte man auf den Gedanken kommen, wie man das bei den Hamiltonschen Quaternionen tatsächlich getan hat, nicht nur E_0^* mit der Zahl 1 zu identifizieren, *sondern auch* E_1^* *mit* i.

Für $E_2^* = j$ würde dann die Multiplikationstafel herauskommen:

$$\begin{array}{ccc} 1 & i & j \\ i & -1 & ij \\ j & -ij & 0, \end{array}$$

die aber kein System von komplexen Zahlen bildet, weil jetzt das Produkt ij nicht mehr als definiert angesehen werden kann. Setzt man $ij = k$, so würde sich diese Tafel eindeutig zu der folgenden eines Systems in *vier* Einheiten[5]) erweitern lassen

$$\begin{array}{cccc} 1 & i & j & k \\ i & -1 & k & -j \\ j & -k & 0 & 0 \\ k & j & 0 & 0. \end{array}$$

Es ist also gezeigt, warum es auf diesem Wege unmöglich ist, von der üblichen Darstellung $x + iy$ in der Gaußschen Ebene zu einer Erweiterung $x + iy + jz$ auf den Raum mit drei Einheiten zu gelangen.

Bonn, 29. März 1935.

---

[5]) Blaschke, Zeitschr. für Math. u. Phys. 60 (1911), S. 69; Beck, Koordinatengeometrie S. 45.

(Eingegangen am 31. März 1935.)

Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

Willy Feller in Stockholm.

§ 1.

Problemstellung und Ergebnisse.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist, die *notwendige und hinreichende Bedingung* für die Gültigkeit des klassischen Laplace-Ljapounoffschen Grenzwertsatzes aufzustellen, und *ein Kriterium* dafür zu liefern, ob in einem konkreten Fall das sogenannte Exponentialgesetz erfüllt ist. Man kann bekanntlich das Problem rein analytisch (d. h. ohne Zuhilfenahme spezifisch wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriffe) folgendermaßen fassen:

Unter einer *Verteilungsfunktion* $V(x)$ werde eine für alle reellen x definierte monotone Funktion mit

$$\lim_{x \to -\infty} V(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} V(x) = 1$$

verstanden; in den etwaigen Unstetigkeitspunkten sei $V(x)$ stets etwa durch

$$V(x) = \lim_{\xi \to x+} V(\xi)$$

definiert. *Für eine vorgegebene Folge* $\{V_n(x)\}$ *von Verteilungsfunktionen bezeichnen wir im folgenden mit* $W_n(x)$ *immer die durch*

$$(1) \qquad W_1(x) = V_1(x), \quad W_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(x-y)\, d\, V_{n+1}(y)$$

definierten Faltungsfunktionen. Die verschiedenen Formulierungen des zentralen Grenzwertsatzes geben dann *hinreichende* Bedingungen dafür an, daß mit einer bestimmten Zahlenfolge $\{a_n\}$

$$(2) \qquad W_n(a_n x) \to \Phi(x)$$

strebt, wo $\Phi(x)$ wie üblich die Gaußsche Normalfunktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$$

bezeichnet. Dabei wird immer von vornherein angenommen, daß noch die zweiten Momente der $V_n(x)$ endlich sind, und die ersten verschwinden; betrachtet werden dann nur solche Normierungsfaktoren a_n, für welche

das zweite Moment von $W_n(a_n x)$ gleich 1 wird (vgl. § 5, (1) und (2), S. 541). Unter diesen Voraussetzungen hat bekanntlich neuerdings *Lindeberg*[1]) eine für den Grenzwertsatz hinreichende Bedingung angegeben, die alle bekannten als Spezialfall umfaßt, und die sich durch eine besondere Handlichkeit auszeichnet (eine Formulierung in § 5, S. 541). Die Frage, inwieweit die Lindebergsche Bedingung *wenigstens unter den angegebenen Einschränkungen auch notwendig* ist, wurde zwar aufgeworfen[2]), aber nicht abschließend beantwortet.

Nun ist zunächst zu bemerken, daß die Existenz irgendwelcher Momente ganz sicher unnötig ist, weil die Konvergenz nicht von dem infinitären Verhalten der einzelnen Komponenten $V(x)$ abhängen kann. Sobald nämlich $a_n \to \infty$ strebt — was natürlich immer vorausgesetzt wird —, gibt es, wie man leicht sieht, eine Zahlenfolge $\{\xi_n\}$ derart, daß die Beziehung (2) erhalten bleibt, wenn man $V_n(x)$ im Gebiete $|x| > \xi_n$ irgendwie abändert, etwa so, daß sämtliche Momente unendlich werden. Diese Voraussetzung ist also vom analytischen Gesichtspunkte aus sicher nicht naturgemäß.

Eine noch wesentlichere Einschränkung des Problems bedeutet aber die übliche Normierung von $W_n(a_n x)$ speziell auf das zweite Moment 1. Da nämlich die Momente im allgemeinen nicht mitkonvergieren, gibt es Folgen $\{V_n(x)\}$ (sogar mit endlichen Momenten beliebiger Ordnung), für die $W_n(a_n x)$ bei dieser Normierung überhaupt nicht konvergiert, aber bei passender Wahl der a_n gegen $\Phi(x)$ strebt. Aus der Betrachtung ausgeschlossen werden aber bereits auch solche Fälle, für welche $W_n(a_n x)$ bei der speziellen Normierung etwa gegen $\Phi(2x)$ strebt. Nicht nur für die Theorie sondern noch mehr für das ursprüngliche praktische Problem des Grenzwertsatzes ist es aber absolut gleichgültig, durch welche Normierungsfaktoren die Konvergenz gegen $\Phi(x)$ zustande kommt.

Wir gehen daher von der allgemeinen Frage aus: *Gibt es zu einer gegebenen Folge von Verteilungsfunktionen $\{V_n(x)\}$ zwei Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{c_n\}$ derart, daß $W_n(a_n x + c_n) \to \Phi(x)$ strebt, und wie kann man solche Zahlenfolgen gegebenenfalls berechnen?* Soll jedoch dabei der Charakter eines asymptotischen Grenzwertsatzes gewahrt werden, so muß man noch

---

[1]) J. W. Lindeberg: Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. 15 (1922). Ein anderer, auf der Theorie der charakteristischen Funktionen beruhender Beweis bei P. Lévy, Calcul des probalités, Paris, Gauthier-Villars, S. 242ff. Eine wesentlich andere Beweismethode, die den Zusammenhang mit anderen asymptotischen Sätzen erkennen läßt, bei A. Khintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Math. Bd. 2, Heft 4, Berlin 1933. Die im folgenden (S. 541) gegebene Formulierung unterscheidet sich rein formal etwas von der Lindebergschen, und steht so bei P. Lévy.

[2]) Vgl. etwa P. Lévy, a. a. O.

einen trivialen Konvergenzfall ausschließen, der übrigens bereits bei der üblichen speziellen Normierung auftritt. Die Verteilungsfunktion $W_n(a_n x)$ hängt bekanntlich symmetrisch von den $V_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, ab. Zum Problemkreis des Grenzwertsatzes gehört natürlich nur der Fall, daß mit wachsendem n der Einfluß der einzelnen Komponente $V_k(x)$ auf $W_n(a_n x)$ gegen Null geht, mit anderen Worten, daß die Konvergenz (2) nicht etwa durch den überwiegenden Einfluß einzelner Glieder zustande kommt, die selbst gegen $\Phi(x)$ streben. Die exakte Formulierung[3]) hiervon lautet natürlich: *Es soll für* $k = 1, \ldots, n$ *und* $n \to \infty$

$$V_k(a_n x) \to E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geqq 0 \end{cases} \tag{3}$$

streben. (Man denke sich etwa die $V_k(a_n x)$ in einer Folge geordnet: $V_1(a_1 x)$, $V_1(a_2 x), \ldots, V_{n-1}(a_{n-1} x)$, $V_1(a_n x), \ldots, V_n(a_n x), \ldots$; (3) besagt dann, diese Folge gegen $E(x)$ strebt, und die Konvergenz ist wegen der Monotonie und den Grenzbedingungen für $x \to \pm \infty$ außerhalb jeder Umgebung des Nullpunktes von selbst gleichmäßig.) In Wirklichkeit ist diese Bedingung gleichbedeutend mit der scheinbar weniger besagenden, daß für jedes *feste* k

$$\lim_{n \to \infty} V_k(a_n x) = \lim_{n \to \infty} V_n(a_n x) = E(x)$$

sein soll. Es zeigt sich (§ 2) wie zu erwarten war, daß die Bedingung (3) gleichbedeutend ist damit, daß nur solche Folgen $\{a_n\}$ in Betracht gezogen werden, für welche

$$a_n \to \infty \quad \text{und} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1 \tag{4}$$

strebt.

Von dieser Einschränkung gilt im allgemeinen wörtlich dasselbe wie bei der üblichen spezielleren Normierung[4]): Nur zwei wirklich vorkommende

---

[3]) Wahrscheinlichkeitstheoretisch bedeutet diese Bedingung das folgende: Es seien $x_1, x_2, \ldots$ statistische Variablen mit den Verteilungsfunktionen $V_k(x)$ — d. h. $V_k(x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der Wert von x_k kleiner oder gleich x ausfällt. Dann ist $W_n(a_n x)$ die Verteilungsfunktion der statistischen Variablen $\frac{1}{a_n}(x_1 + \ldots + x_n)$. (3) besagt dann genau, daß die Wahrscheinlichkeit dafür gegen Null geht, daß $\frac{x_\nu}{a_n}$ dem Betrage nach größer als eine Konstante $\eta > 0$ bleibt. Die Bedingung ergibt sich z. B. aus der Forderung, daß für ein gegebenes α, insbesondere etwa für $\alpha = -1$ auch die Folgen

$$\frac{1}{a_n}(x_1 + \ldots + x_{k-1} + (1+\alpha) x_k + x_{k+1} + \ldots + x_n)$$

mit $n \to \infty$ gegen eine normalverteilte Variable streben.

[4]) Vgl. etwa P. Lévy, a. a. O. S. 235–237.

Fälle werden aus der Betrachtung ausgeschlossen, die beide auch analytisch einen ganz anderen Charakter haben: 1. Wenn a_n beschränkt bleibt; dann hört (2) auf richtig zu sein, sobald eine Komponente $V_m(x)$ irgendwie abgeändert wird; man hat hierbei nicht mit einem asymptotischen Gesetz zu tun, sondern mit der Frage, wie man $\Phi(x)$ in Komponenten aufspalten kann (vgl. § 2, S. 531). 2. Wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha > 1$ bleibt (oder das für eine Teilfolge der Fall ist); dann muß mit passendem c_k bereits $V_k(c_k x) \to \Phi(x)$ streben, so daß auch hier die Konvergenz an dem Verhalten der einzelnen Komponenten liegt. Es gelingt übrigens auch in diesem Falle (wenn auch wenig handliche) notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen von (2) anzugeben, doch wird hier auf ihre Mitteilung verzichtet, da der Aufwand in keinem Verhältnis zu dem bedeutungslosen Problem steht. Nur anhangsweise wird an einem kurzen Beispiel gezeigt, daß die Bedingung $V_k(c_k x) \to \Phi(x)$ nicht hinreichend ist.

Wir untersuchen also die oben formulierte Frage nur mit Einschränkung (4), formulieren aber diese Einschränkung naturgemäßer durch die

Definition: *Die Folge von Verteilungsfunktionen $\{V_k(x)\}$ gehört (und zwar mit den Normierungsfaktoren $\{a_n\}$) zur Gaußschen Funktion $\Phi(x)$, wenn die beiden Relationen* (2) *und* (3) *bestehen.*

Natürlich sind die Normierungsfaktoren nur soweit eindeutig, als man die Folge $\{a_n\}$ durch solche und nur solche Folgen $\{a_n'\}$ ersetzen kann, für welche

$$\lim \frac{a_n}{a_n'} = 1$$

ist; zwei solche Folgen nennen wir *äquivalent*. Für alle Folgen $\{V_k(x + b_k)\}$ kommen (§ 2) nur äquivalente Normierungsfaktoren in Frage, und zwar gehört eine solche Folge gleichzeitig mit $\{V_k(x)\}$ dann und nur dann zu $\Phi(x)$, wenn

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = 0$$

ist. Die Frage lautet nun, ob es Konstanten b_ν gibt derart, daß $V_\nu(x + b_\nu)$ zu $\Phi(x)$ gehört.

Bei der Beantwortung stellen wir uns *zunächst* auf den Standpunkt, daß auch die Normierungsfaktoren gegeben sind, und sehen von der Möglichkeit ab, durch Verschiebungen Konvergenz zu erzeugen. Es gilt dann:

Die Folge von Verteilungsfunktionen $\{V_n(x)\}$ gehört dann und nur dann mit den Normierungsfaktoren $\{a_n\}$ zu $\Phi(x)$, wenn für jedes $\eta > 0$ gleichzeitig die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(I)} \qquad \lim \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>\eta a_n} d V_\nu(x) = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \lim \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} x^2 \, d V_\nu(x) - \left(\int_{|x|<\eta a_n} x \, d V_\nu(x) \right)^2 \right\} = 1,$$

$$\text{(III)} \qquad \lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<\eta a_n} x \, d V_\nu(x) = 0.$$

Diese Bedingungen sind noch ziemlich unhandlich; sie vereinfachen sich wesentlich, wenn man nur den Fall einer Art absoluter Konvergenz betrachtet. Es liegt von vornherein nahe, zu verlangen, daß (2) erhalten bleibt, wenn man irgendwelche Komponenten durch die symmetrischen [5]), d. h. irgendwelche $V_k(x)$ durch $1 - V_k(-x)$ ersetzt. Das führt uns zur neuen

Definition: *Die Folge $\{V_k(x)\}$ gehört im engeren Sinne zu $\Phi(x)$, wenn auch alle Folgen zu $\Phi(x)$ gehören, die aus $\{V_k(x)\}$ dadurch entstehen, daß man für eine Teilfolge von Stellen $\{n_k\}$ die Komponenten $V_{n_k}(x)$ durch $1 - V_{n_k}(-x)$ ersetzt.* Selbstredend kommen dabei immer nur die gleichen Normierungsfaktoren in Frage. Nun gilt:

Die Folge $\{V_n(x)\}$ gehört dann und nur dann mit den Normierungsfaktoren $\{a_n\}$ im engeren Sinne zu $\Phi(x)$, wenn für jedes $\eta > 0$ gleichzeitig die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(I')} \qquad \lim \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>\eta a_n} d V_\nu(x) = 0,$$

$$\text{(II')} \qquad \lim \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<\eta a_n} x^2 \, d V_\nu(x) = 1,$$

$$\text{(III')} \qquad \lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{|x|<\eta a_n} x \, d V_\nu(x) \right| = 0.$$

Diese Bedingungen sind eine unmittelbare Verallgemeinerung der Lindebergschen, die somit genau den Kern der Sache trifft. Bei endlichen zweiten Momenten und der üblichen Wahl der a_n ergibt sich *die Lindebergsche Bedingung* selbst. Diese *ist daher unter den genannten Voraussetzungen nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.* (In der

---

[5]) Die Forderung bedeutet, daß zusammen mit $\frac{1}{a_n}(x_1 + \ldots + x_n)$ auch alle Folgen $\frac{1}{a_n}(i_1 x_1 + \ldots + i_n x_n)$, wo i_k der Werte ± 1 fähig ist, gegen eine normalverteilte Variable streben, daß also die gegebene Folge absolut konvergiert.

Sprechweise von P. Lévy bedeutet das, daß sie notwendig und hinreichend ist dafür, daß die $V_n(x)$ eine famille normale bilden.) Dies scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, obwohl sich diese Notwendigkeit als eine unmittelbare Folge aus der Tschebycheffschen Ungleichung ergibt. Der Beweis erfordert nur einige Zeilen, und bei dem allgemeinen Interesse für die Lindebergsche Bedingung schien es daher angebracht, diesen Beweis unabhängig von dem etwas komplizierten allgemeinen auszuführen (vgl. § 5, S. 542 f).

Es zeigt sich nun weiter, daß die Bedingung (III) und sogar (III') ganz unwesentlich ist in dem Sinne, daß sie nur eine Festlegung der Koordinatennullpunkte für die einzelnen Komponenten bedeuten. Es besteht nämlich der Satz:

Es mögen die beiden Bedingungen (I) *und* (II) *erfüllt sein. Definiert man dann die Zahlen* b_k *durch*

$$\int_{|x|<a_k} (x - b_k)\, d\,V(x_k) = 0 \tag{5}$$

und setzt $V_k^*(x) = V_k(x + b_k)$, *so gehört die Folge* $V_k^*(x)$ *mit den Normierungsfaktoren* $\{a_n\}$ *zu* $\Phi(x)$, *und zwar im engeren Sinne.* Damit sind nachträglich die Bedingungen (I) bis (III) eliminiert, indem man ja durch (5) *jede zu* $\Phi(x)$ *gehörende Folge auf eine zurückführt, die im engeren Sinne zu* $\Phi(x)$ *gehört.*

Für die schließliche Beantwortung der eingangs gestellten Frage ist es nun ganz gleichgültig, ob wir von der gegebenen Folge $\{V_n(x)\}$ ausgehen oder von einer Folge $\{V_n(x + c_n)\}$ mit irgendwelchen c_n. Wir können also ohne Einschränkung der Allgemeinheit durch passende Wahl der c_n die Nullpunkte für die einzelnen Komponenten irgendwie festlegen. Wir tun das durch die Festsetzung, daß für alle k

$$\lim_{\xi \to 0-} \int_{-\infty}^{\xi} d\,V_k(x) \leqq \tfrac{1}{2} \qquad \lim_{\xi \to 0+} \int_{\xi}^{\infty} d\,V_k(x) \leqq \tfrac{1}{2} \tag{6}$$

sein soll. Dadurch ist der Nullpunkt natürlich eindeutig festgelegt. Es sei jedoch bemerkt, daß das folgende Kriterium *wörtlich* richtig bleibt, *wenn man in* (6) *auf den rechten Seiten* $\frac{1}{2}$ *durch irgendeine Zahl* $q < 1$ *ersetzt*: es kommt nur darauf an, daß die Nullpunkte nicht ganz exzentrisch zu dem eigentlichen Variationsbereich der $V_k(x)$ liegen, und speziell (6) wurde nur eingeführt, um eine eindeutige Vorschrift zu haben.

Wir definieren nun für jedes $\delta > 0$ *die Zahl* $p_n(\delta)$ *als kleinste Zahl mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>p_n(\delta)} d\,V_\nu(x) \leqq \delta$$

(unter dem Integral über ein Intervall $|x| > X$ verstehen wir stets den Limes der Integrale über $|x| > X + \varepsilon$ für $\varepsilon \to 0+$; daher existiert $p_n(\delta)$ stets).

Dann gilt das folgende Kriterium, das die Frage abschließend beantwortet.

Kriterium. *Hat man die Nullpunkte der $V_k(x)$ so festgelegt, daß* (6) *besteht, so ist dafür, daß es eine Zahlenfolge $\{b_k\}$ gibt derart, daß die Folge $\{V_k(x+b_k)\}$ zu $\Phi(x)$ gehört, notwendig und hinreichend, daß für jedes $\delta > 0$*

$$\lim \frac{1}{p_n^2(\delta)} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<p_n(\delta)} x^2 \, d\, V_\nu(x) = \infty$$

wird. Wenn das der Fall ist, so gibt es auch eine Nullfolge $\delta_n \to 0$, mit welcher ebenfalls

$$\lim \frac{1}{p_n^2(\delta_n)} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<p_n(\delta_n)} x^2 \, d\, V_\nu(x) = \infty$$

ist; setzt man dann

$$a_n^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \Big\{ \int_{|x|<p_n(\delta_n)} x^2 \, d\, V_\nu(x) - \Big(\int_{|x|<p_n(\delta_n)} x \, d\, V_\nu(x) \Big)^2 \Big\},$$

und definiert b_k durch (5), *so gehört die Folge $\{V_k(x+b_k)\}$ mit den Normierungsfaktoren $\{a_n\}$ zu $\Phi(x)$, und zwar im engeren Sinne.*

Die praktische Ausrechnung wird wesentlich vereinfacht durch die folgende etwas allgemeinere Fassung der hinreichenden Bedingung: *Ist $\{q_n\}$ irgendeine Zahlenfolge, mit welcher entweder*

$$(7) \quad \lim \frac{1}{q_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<q_n} x^2 \, d\, V_\nu(x) = \infty \quad \textit{und} \quad \lim \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>q_n} d\, V_\nu(x) = 0$$

oder

$$(8) \quad \underline{\lim} \frac{1}{q_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<q_n} x^2 \, d\, V_\nu(x) > 0 \quad \textit{und} \quad \lim \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>\eta q_n} d\, V_\nu(x) = 0$$

für jedes $\eta > 0$ ist, so liefert

$$a_n^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \Big\{ \int_{|x|<q_n} x^2 \, d\, V_\nu(x) - \Big(\int_{|x|<q_n} x \, d\, V_\nu(x) \Big)^2 \Big\}$$

eine Folge $\{a_n\}$ von Normierungsfaktoren für $\{V_n(x)\}$.

Die Beweise beruhen auf der Methode der charakteristischen Funktionen und schließen sich insofern am engsten dem Beweis an, den P. Lévy [1]) für den Lindebergschen Satz gegeben hat. Zur Vereinfachung der Beweise beginnen wir nach einigen Hilfssätzen (§ 2) über die charakteristischen Funktionen im § 3 mit der Untersuchung der Bedingungen (I) bis (III); die Resultate dieses Paragraphen ergeben dann vermöge des

nachträglich geführten Beweises, daß diese Bedingungen notwendig und hinreichend sind, die übrigen erwähnten Resultate, die daher in dieser Form nicht mehr vorkommen werden.

In § 8 geben wir einige Beispiele zur Illustrierung der verschiedenen möglichen Vorkommnisse. Ein etwas selbständigeres Interesse hat vielleicht das Beispiel einer *Folge mit lauter gleichen Komponenten* $V_n(x) = V(x)$. Wenn $V(x)$ ein (verschwindendes erstes und) endliches zweites Moment hat, so gehört die Folge nach Lindeberg und P. Lévy zu $\Phi(x)$. Andererseits haben die schönen Untersuchungen von Pólya [6]) und P. Lévy [7]) über die sogenannten exzeptionellen Fehlergesetze gezeigt, daß dies bei unendlichem zweiten Moment im allgemeinen nicht der Fall ist. Ein Spezialfall der erwähnten Resultate zeigt nun *genau den Schnitt zwischen den zu* $\Phi(x)$ *gehörigen und nicht gehörigen* $V(x)$.

Es sei zum Schluß noch ein Wort über den Zusammenhang mit der Praxis gestattet. Wie schon (u. a. von P. Lévy) vielfach betont wurde, kann man bereits in einem Spezialfall des Lindebergschen Satzes eine hinreichende Erklärung dafür erblicken, daß die in der Praxis vorkommenden Beobachtungsfehler so oft angenähert normalverteilt sind. In der Praxis kann man nämlich stets annehmen, daß die Variablen x_k (vgl. Fußnote [3])) nur Werte aus einem festen Intervall $|x| < X$ annehmen, so daß alle $V_k(x)$ für $|x| > X$ konstant sind. Den Grenzwertsatz für solche Folgen hat Lindeberg sogar schon in einer früheren Arbeit [8]) bewiesen. Andererseits ist es aber klar, daß ein solches Argument in einer wirklich theoretischen Naturbeschreibung keinen Platz hat. In der Argumentierung wird auch die zu beweisende Tatsache vorweggenommen, daß der Grenzwertsatz gegen „kleine Abänderungen" der $V_n(x)$ ebenso unempfindlich ist, wie es jede Praxis natürlich sein muß. Obwohl es unmöglich ist, dem Lindebergschen Satze praktisch bedeutsame Fälle hinzuzufügen, schien es daher wünschenswert, den notwendigen Parallelismus zwischen Theorie und Empirie wirklich durchzuführen. Das hier gegebene Kriterium läßt sich unmittelbar anschaulich deuten, und es gehen darin nur praktisch meßbare Größen ein.

Die Fertigstellung dieser Arbeit wurde mir ermöglicht durch eine freundliche Einladung an das Institut für mathematische Statistik in Stockholm. Es sei mir gestattet, dem Direktor des Instituts, *Professor H. Cramér*, auch an dieser Stelle für das mir entgegengebrachte Interesse und die großzügige Gastfreundschaft verbindlich zu danken.

---

[6]) G. Pólya, Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung, Math. Zeitschr. 18 (1923).

[7]) A. a. O., S. 252 ff.

[8]) J. W. Lindeberg, Ann. Acad. Sci. Fennicae A 16 (1920).

§ 2.

Vorbereitende Hilfssätze.

Unter der *charakteristischen Funktion* einer Verteilungsfunktion $F(x)$ versteht man nach P. Lévy[9]) ihre Fouriertransformierte

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x).$$

Im folgenden werden die charakteristischen Funktionen nur für reelle Werte von t betrachtet. Wir beginnen mit der Zusammenstellung der bekannten Rechenregeln, die wir später benutzen werden.

$f(t)$ ist für alle t stetig und es ist

$$f(0) = 1, \quad |f(t)| \leqq 1.$$

Die Verteilungsfunktion $F(ax+b)$ hat $e^{-\frac{bt}{a}i} f\left(\frac{t}{a}\right)$ zur charakteristischen Funktion; ist $F(x)$ die Faltungsfunktion zweier Verteilungsfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$, d. h.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x-y)\, dF_1(y),$$

so gilt für die entsprechenden charakteristischen Funktionen

$$f(t) = f_1(t) f_2(t).$$

Die charakteristische Funktion der Normalfunktion $\Phi(x)$ ist

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

diejenige der Funktion

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$$

ist konstant $= 1$. Die Bedeutung der charakteristischen Funktionen für unsere Untersuchung beruht auf dem folgenden grundlegenden Satz[10]):

$F(x)$ und $F_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, seien Verteilungsfunktionen mit den charakteristischen Funktionen $f(t)$ bzw. $f_n(t)$. Damit die Folge $\{F_n(x)\}$

---

[9]) A. a. O. S. 161. Dort findet man auch die im folgenden angegebenen Rechenregeln.

[10]) S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932, S. 70 („notwendig") und S. 72 („hinreichend"). Der Bochnersche Satz ist noch etwas allgemeiner als der im Texte angegebene. Einen etwas spezielleren (unter Voraussetzung der Endlichkeit der zweiten Momente) gibt P. Lévy, a. a. O. S. 195 und 197. Eine Vereinfachung dieses Beweises, durch welche die Verwendung bedingt konvergenter Integrale vermieden wird, bei H. Cramér, On composition of elementary errors, Skandin. Actuarie Tidskr. 1928. (Dort übrigens auch bemerkenswerte Restabschätzungen für den zentralen Grenzwertsatz.)

gegen $F(x)$ konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß $f_n(t) \to f(t)$ strebt, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervall.

Wir betrachten nun eine Folge von Verteilungsfunktionen $V_n(x)$ mit den charakteristischen Funktionen $v_n(t)$, und definieren die Faltungsfunktionen $W_n(x)$ wie in der Einleitung (1). Für die zugehörigen charakteristischen Funktionen hat man dann

$$w_n(t) = \prod_{\nu=1}^{n} v_\nu(t). \tag{1}$$

$W_n(a_n x) \to \Phi(x)$ ist gleichbedeutend mit $w_n\left(\frac{t}{a_n}\right) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, und ebenso $V_\nu(a_n x) \to E(x)$ (vgl. Einleitung (4)) mit $v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right) \to 1$. Beide Übergänge sind gleichmäßig in jedem endlichen Intervall. Letzteren kann man offenbar auch in der Form schreiben:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{\frac{i x t}{a_n}})\, d V_\nu(x) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir haben daher das folgende Kriterium:

Die Folge $\{V_n(x)\}$ gehört dann und nur dann mit den Normierungsfaktoren $\{a_n\}$ zu $\Phi(x)$, wenn erstens

$$w_n\left(\frac{t}{a_n}\right) = \prod_{\nu=1}^{n} v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right) \to e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{α}$$

strebt, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervall, und wenn es ferner zu jedem $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ ein $N = N(\varepsilon, T)$ gibt derart, daß für $n > N$ und $|t| < T$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{x t}{a_n}\right) d V_\nu(x) \right| < \varepsilon, \qquad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\frac{x t}{a_n}\, d V_\nu(x) \right| < \varepsilon \tag{β}$$

wird[11]*, $\nu = 1, \ldots, n$.*

Wir untersuchen nun zuerst, welchen Einschränkungen die Normierungsfaktoren unterliegen, und in welchen Fällen (α) ohne (β) bestehen kann.

Dafür, daß mit zwei positiven Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{a_n'\}$ gleichzeitig mit (α) auch

$$w_n\left(\frac{t}{a_n'}\right) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

strebt, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die beiden Folgen äquivalent sind, d. h. daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n'} = 1$$

---

[11]) Die zweite der Ungleichungen (β) folgt übrigens vermöge der Schwarzschen Ungleichung aus der ersten.

ist. Nun sieht man zunächst leicht, daß für (α) keine oszillierenden Zahlenfolgen $\{a_n\}$ in Frage kommen. Weil nämlich $e^{-\frac{t^2}{2}}$ monoton fällt und $|v_\nu(t)| \leqq 1$ ist, folgt aus (α) unmittelbar, daß bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für $n > N'(\varepsilon)$ und alle $k > 0$

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} > 1 - \varepsilon \tag{2}$$

wird. Daher gibt es zu jeder positiven Zahlenfolge $\{a_n\}$, mit welcher (α) besteht, eine äquivalente monoton wachsende Folge, und man könnte sich bei allen folgenden Überlegungen auf monotone Folgen $\{a_n\}$ beschränken (was jedoch keine Vereinfachung mit sich bringt).

Wir betrachten nun zunächst den Fall, daß a_n beschränkt bleibt, daß also $\lim a_n = a$ existiert. Dann kann (β) unmöglich erfüllt sein. Falls (α) erfüllt ist, so ergibt sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz unmittelbar

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} v_\nu\left(\frac{t}{a}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Wenn also bei beschränkten a_n überhaupt $W_n(a_n x) \to \Phi(x)$ strebt, so entsteht die Folge $V_n(a x)$ durch sukzessives Aufspalten von $\Phi(x)$ in Komponenten. Diese haben bekanntlich notwendig endliche Streuungen, und die Konvergenz ist nur mit der üblichen Normierung möglich. Sie wird durch die Fortlassung jedes einzelnen Gliedes gestört, sofern dieses nicht zufällig $= E(x)$ ist. Dieser Fall gehört überhaupt nicht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Es werde also vorausgesetzt, daß $a_n \to \infty$ strebt. Bestehen dann die beiden Beziehungen (α) und (β), so ist $\lim v_n\left(\frac{t}{a_n}\right) = 1$ und daher folgt aus

$$w_{n+1}\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right) = w_n\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right) v_{n+1}\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right) \tag{3}$$

unmittelbar

$$\lim w_n\left(\frac{t}{a_n}\right) = \lim w_n\left(\frac{t}{a_{n+1}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

und hieraus wegen der Gleichmäßigkeit

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1. \tag{4}$$

Wenn umgekehrt die Beziehungen (α) und (4) erfüllt sind, so folgt zunächst, daß $v_n\left(\frac{t}{a_n}\right)$ in jedem endlichen Intervall gleichmäßig gegen 1 strebt. Wegen (2) gilt dann aber dasselbe auch von $v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)$, $\nu = 1, \ldots, n$. Aus (α) und (4) zusammen folgt also (β). Wir können somit sagen:

Wenn überhaupt $W_n(a_n x) \to \Phi(x)$ *strebt, so gehört die Folge* $V_n(x)$ *dann und nur dann zu* $\Phi(x)$, *wenn*

$$a_n \to \infty \quad \textit{und} \quad \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 \tag{5}$$

gilt. Nur in diesem Falle wird also der Einfluß der einzelnen Glieder mit wachsendem n unmerklich.

Um sich davon zu überzeugen, daß auch durch die zweite Einschränkung in (5) nur ganz uninteressante Folgen der Untersuchung entzogen werden, genügt es eine Folge zu betrachten, für welche

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha > 1$$

bleibt. Soll hier (α) richtig sein, so zeigt (3) unmittelbar, daß schon $V_n(x)$ selbst gegen den Normaltypus streben muß. Genauer: Wird $a_n^2 = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2$ gesetzt (was ohne Einschränkung der Allgemeinheit gestattet ist) und bleibt $\frac{c_n}{a_n} > \alpha' > 0$, so kann $W_n(a_n x)$ höchstens dann gegen $\Phi(x)$ streben, wenn auch

$$V_n(c_n x) \to \Phi(x) \tag{6}$$

strebt. Den typischen Fall für solche Folgen stellt also etwa

$$V_n(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2^n}}\right)$$

dar, mit $a_n^2 = 2^{n+1} - 1$ und $W_n(a_n x) = \Phi(x)$. Auch hier hängt die Konvergenz nur am Verhalten der einzelnen Glieder. Übrigens ist, wie bereits in § 1 bemerkt wurde, (6) nicht hinreichend für (α), doch wollen wir auf die Mitteilung der genauen Bedingungen verzichten. Es sei nur noch bemerkt, daß man jede Folge, für welche (α) besteht, durch eine Art Diagonalverfahren in zwei Teilfolgen zerlegen kann, von denen die eine den Typus (6) hat, während die andere zu $\Phi(x)$ gehört.

Es sei nun $\{V_n(x)\}$ eine mit den Normierungsfaktoren a_n zu $\Phi(x)$ gehörende Folge. Die charakteristische Funktion von $V_n(x + b_n)$ unterscheidet sich von derjenigen von $V_n(x)$ bloß um den Einheitsfaktor e^{-ibt}; die Folge $\{V_n(x + b_n)\}$ kann daher höchstens mit denselben Normierungsfaktoren zu $\Phi(x)$ gehören. Damit für sie die (α) entsprechende Beziehung besteht, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = 0 \tag{7}$$

ist. Aus (7) folgt aber insbesondere $\frac{b_n}{a_n} \to 0$, und daraus wegen (2) auch

$$\lim \frac{1}{a_n} \max [|b_1|, \ldots, |b_\nu|] = 0.$$

Daher ist dann für die neue Folge $\{V_n(x+b_n)\}$ auch die (β) entsprechende Beziehung erfüllt. Wir haben also:

Die Folge $\{V_n(x+b_n)\}$ gehört dann und nur dann gleichzeitig mit $\{V_n(x)\}$ zu $\Phi(x)$, wenn (7) besteht; und zwar haben beide Folgen stets dieselben Normierungsfaktoren.

§ 3.
Analyse der Bedingungen.

Wir wenden uns nicht unmittelbar dem Beweise zu, daß die angegebenen Bedingungen notwendig und hinreichend sind, sondern beginnen mit einer Untersuchung dieser Bedingungen. So wird sich eine Umformung ergeben, die eine wesentliche Vereinfachung der Beweise gestattet.

Für eine Folge $\{V_n(x)\}$ von Verteilungsfunktionen und eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ mögen für jedes $\eta > 0$ die beiden Relationen

$$\lim \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>\eta a_n} dV_\nu(x) = 0, \tag{1}$$

$$\lim \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} x^2\, dV_\nu(x) - \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, dV_\nu(x) \right)^2 \right\} = 1 \tag{2}$$

bestehen. Dann strebt offenbar $a_n \to \infty$, und es ist

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1; \tag{3}$$

um letzteres einzusehen, setzen wir für den Augenblick $p_n = \min [a_n, a_{n+1}]$ und $q_n = \max [a_n, a_{n+1}]$; dann wird wegen (2) für $\eta = 1$

$$\overline{\lim} \frac{q_n^2 - p_n^2}{q_n^2}$$

$$\leqq \lim \frac{1}{q_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{p_n \leqq |x| < q_n} x^2\, dV_\nu(x) + 2 \int_{|x|<q_n} |x|\, dV_\nu(x) \cdot \int_{p_n \leqq |x|<q_n} |x|\, dV_\nu(x) \right\}$$

$$\leqq 3 \lim \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| \geqq p_n} dV_\nu(x) = 0.$$

Ebenso schließt man leicht, daß für jedes $\varepsilon > 0$, alle $k > 0$ und hinreichend große n

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} > 1 - \varepsilon \tag{4}$$

wird. Die für die Normierungsfaktoren charakteristischen Relationen § 2, (5) sind also eine Folge von (1) und (2).

Wir wollen nun untersuchen, wie sich (1) und (2) verhalten, wenn man an Stelle von $V_n(x)$ neue Verteilungsfunktionen $V_n^*(x)$ einführt durch $V_n^*(x) = V_n(x+b_n)$. Zunächst betrachten wir die durch

$$\int_{|x|<a_n} (x-b_n)\,dV_n(x) = 0 \tag{5}$$

definierte Folge $\{b_n\}$. *Es soll gezeigt werden, daß für jedes* $\eta > 0$

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{|x|<\eta a_n} (x-b_\nu)\,dV_\nu(x) \right| = 0 \tag{6}$$

ist. Wie der folgende Beweis zeigen wird, bleibt diese Behauptung richtig, wenn man nur (1), (3) und (4) voraussetzt, ohne (2).

Zum Beweise bemerke man, daß $|b_k| \leqq a_k$, und daß daher die linke Seite in (6) zufolge (1) sicher unabhängig ist von η. Es genügt also, den Spezialfall

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{|x|<2a_n} (x-b_\nu)\,dV_\nu(x) \right| = 0 \tag{7}$$

zu beweisen. Es werde nun bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Zahl $N = N(\varepsilon)$ so bestimmt, daß für $n > N$ gleichzeitig

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>\frac{1}{6}a_n} dV_\nu(x) < \varepsilon, \tag{8}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{3}{2}, \tag{9}$$

$$\frac{a_{n+t}}{a_n} > \frac{2}{3}, \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

wird Ist dann $n > N$, so setzen wir $n_0 = n$ und bestimmen durch Induktion eine fallende Folge von Indizes n_i, $i = 1, 2, \ldots$ so, daß

$$2 < \frac{a_{n_i-1}}{a_{n_i}} < 3 \tag{11}$$

wird. Das ist wegen (9) mindestens solange möglich, bis man zu einem Index n_k kommt, mit

$$a_{n_k} < 2\,a_N.$$

Dann hat man nach (5), wenn man für den Augenblick den größten Index n_i, der $\leqq \nu$ ist, mit $n^{(\nu)}$ bezeichnet,

$$\frac{1}{a_{n_0}} \sum_{\nu=n_k}^{n_0} \left| \int_{|x|<2a_{n_0}} (x-b_\nu)\,dV_\nu(x) \right| = \frac{1}{a_{n_0}} \sum_{\nu=n_k}^{n_0} \left| \int_{a_\nu \leqq |x|<2a_{n_0}} (x-b_\nu)\,dV_\nu(x) \right|$$

$$\leqq \frac{1}{a_{n_0}} \sum_{\nu=n_k}^{n_0} \int_{a_\nu \leqq |x|<2a_{n_0}} |x-b_\nu|\,dV_\nu(x) \leqq \frac{1}{a_{n_0}} \sum_{\nu=n_k}^{n_0} \int_{\frac{2}{3}a_{n^{(\nu)}} < |x| < 2a_{n_0}} |x-b_\nu|\,dV_\nu(x)$$

$$\leqq \frac{1}{a_{n_0}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=n_k}^{n_i-1} \int_{\frac{2}{3}a_{n_i} < |x| < 2a_{n_i-1}} |x-b_\nu|\,dV_\nu(x).$$

Hieraus ergibt sich unter Benutzung von (10), (11) und (8) wegen $|b_n| \leqq a_n$

$$\frac{1}{a_{n_0}} \sum_{\nu=n_k}^{n_0} \left| \int_{|x|<2a_{n_0}} (x-b_\nu)\, dV_\nu(x) \right| \leqq \frac{4}{a_{n_0}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{\nu=n_k}^{n_{i-1}} a_{n_i-1} \int_{\frac{2}{3}a_{n_i}<|x|<2a_{n_i-1}} dV_\nu(x)$$

$$\leqq \frac{4}{a_{n_0}} \sum_{i=1}^{k} a_{n_i-1} \sum_{\nu=n_k}^{n_i-1} \int_{|x|>\frac{2}{9}a_{n_i-1}} dV_\nu(x) < \frac{4\varepsilon}{a_{n_0}} \sum_{i=1}^{k} a_{n_i-1} < 4\varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 8\varepsilon.$$

Es sei nun N_0 der kleinste Index mit $a_{N_0} > 2a_N$, so daß $a_{n_k} < a_{N0}$ ist; N_0 ist eine von n unabhängige Konstante. Wir bestimmen $\xi = \xi(\varepsilon)$ so, daß

$$\sum_{\nu=1}^{N_0} \int_{|x|\geqq\xi} dV_\nu(x) < \varepsilon$$

wird. Dann ist wegen $|b_n| \leqq a_n$ und (10)

$$\frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{N_0} \int_{|x|<2a_n} (x-b_\nu)\, dV_\nu(x)$$

$$\leqq \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{N_0} \int_{|x|<\xi} |x-b_\nu|\, dV_\nu(x) + 3 \sum_{\nu=1}^{N_0} \int_{|x|\geqq\xi} dV_\nu(x)$$

$$< \frac{N_0(2a_{N_0}+\xi)}{a_n} + 3\varepsilon;$$

man hat also insgesamt

$$\frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{|x|<2a_n} (x-b_\nu)\, dV_\nu(x) \right| \leqq \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{N_0} (\ ) + \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=n_k}^{n_0} (\ )$$

$$< 11\varepsilon + \frac{N_0(2a_{N_0}+\xi)}{a_n}.$$

Da ξ und N_0 nur von ε, nicht aber von n abhängen, strebt die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 11ε, und damit ist (7), und somit auch (6) bewiesen.

In zweiter Reihe beweisen wir nun eine Art Invarianzeigenschaft der Relationen (1) und (2). Es sei nun $\{b_n\}$ irgendeine Zahlenfolge mit

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = 0, \tag{12}$$

und es werde wieder $V_n^*(x) = V_n(x+b_n)$ gesetzt. *Dann soll gezeigt werden, daß aus* (1) *und* (2) *die entsprechenden Relationen für* $V^*(x)$ *folgen, nämlich*

$$\lim \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>\eta a_n} dV_\nu^*(x) = 0, \tag{13}$$

$$\lim \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} x^2 dV_\nu^*(x) - \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, dV_\nu^*(x) \right)^2 \right\} = 1. \tag{14}$$

Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß wegen (4) und (12) auch

$$\lim \frac{1}{a_n} \max [|b_1|, \ldots, |b_n|] = 0 \tag{15}$$

ist; man kann also $N = N(\eta)$ so bestimmen, daß für $n > N$ und $\nu = 1, 2, \ldots, n$ stets

$$\frac{|b_\nu|}{a_n} < \frac{\eta}{2}$$

bleibt. Dann wird aber für $n > N$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>\eta a_n} dV_\nu^*(x) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>\frac{\eta}{2} a_n} dV_\nu(x),$$

womit (13) bewiesen ist. Ferner hat man

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} x^2 dV_\nu^*(x) - \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, dV_\nu^*(x) \right)^2 \right\}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{-\eta a_n + b_\nu}^{\eta a_n + b_\nu} (x-b_\nu)^2 dV_\nu(x) - \left(\int_{-\eta a_n + b_\nu}^{\eta a_n + b_\nu} (x-b_\nu)\, dV_\nu(x) \right)^2 \right\},$$

und eine leichte Rechnung ergibt daher vermöge (1)

$$\overline{\lim} \left| \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} x^2 dV_\nu^*(x) - \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, dV_\nu^*(x) \right)^2 \right\} - 1 \right|$$

$$= \overline{\lim} \left| \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} (x-b_\nu)^2 dV_\nu(x) - \left(\int_{|x|<\eta a_n} (x-b_\nu)\, dV_\nu(x) \right)^2 \right\} - 1 \right|$$

$$= \overline{\lim} \left| \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ -2 b_\nu \int_{|x|<\eta a_n} x\, dV_\nu(x) + b_\nu^2 \int_{|x|<\eta a_n} dV_\nu(x) \right\} \cdot \int_{|x|\geqq\eta a_n} dV_\nu(x) \right|$$

$$\leqq 3\eta^2 \overline{\lim} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|\geqq\eta a_n} dV_\nu(x) = 0.$$

Damit ist auch (14) bewiesen.

Werden die Zahlen b_n insbesondere durch (5) definiert, so ist die Bedingung (12) erfüllt. Denn zufolge (1) ist dann für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim \frac{1}{a_n} \int\limits_{|x| < \varepsilon a_n} (x - b_n)\, d V_n(x) = 0,$$

also $\lim \frac{|b_n|}{a_n} \leqq \varepsilon$. Daher bestehen dann die Relationen (13) und (14). Darüber hinaus gilt jetzt auch noch

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int\limits_{|x| < \eta a_n} x\, d V_\nu^*(x) \right| = 0. \tag{16}$$

Denn man hat unter Benutzung von (6) und (1)

$$\overline{\lim} \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int\limits_{|x| < \eta a_n} x\, d V_\nu^*(x) \right| = \overline{\lim} \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int\limits_{-\eta a_n + b_\nu}^{\eta a_n + b_\nu} (x - b_\nu)\, d V_\nu(x) \right|$$

$$\leqq \overline{\lim} \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int\limits_{|x| < \eta a_n} (x - b_\nu)\, d V_\nu(x) \right| + 2\eta \overline{\lim} \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{|x| > \frac{1}{2} a_n} d V_\nu(x) = 0.$$

Aus (16) ergibt sich noch eine Vereinfachung von (14), denn es folgt unmittelbar, daß

$$\lim \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\int\limits_{|x| < \eta a_n} x\, d V_\nu^*(x) \right)^2 = 0$$

ist. Zusammenfassend können wir also sagen:

Gelten für die Folge $\{V_n(x)\}$ *die Beziehungen* (1) *und* (2), *und werden die Zahlen* b_n *durch* (5) *definiert, so ist für die Folge* $\{V_n^*(x) = V_n(x + b_n)\}$

$$\lim \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{|x| > \eta a_n} d V_\nu^*(x) = 0,$$

$$\lim \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{|x| < \eta a_n} x^2\, d V_\nu^*(x) = 1,$$

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int\limits_{|x| < \eta a_n} x\, d V_\nu^*(x) \right| = 0.$$

Wir machen noch eine Anmerkung für spätere Zwecke. Vermöge (6) sind die beiden Relationen

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{|x| < \eta a_n} x\, d V_\nu(x) = 0 \text{ und } \lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \int\limits_{|x| < \eta a_n} d V_\nu(x) = 0 \tag{17}$$

äquivalent, d. h. entweder beide sind richtig, oder beide falsch. Nach (15) ist aber

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \int_{|x| \geqq \eta a_n} dV_\nu(x) = 0.$$

Addiert man diese Relation zur zweiten in (17), so erhält man den Satz:

Damit

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \eta a_n} x\, dV_\nu(x) = 0$$

wird, ist notwendig und hinreichend, daß mit den durch (5) *definierten Zahlen*

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = 0$$

ist.

§ 4.

Beweis, daß die Bedingungen hinreichend sind.

Wir haben zu beweisen, daß aus dem Bestehen von (I) bis (III) folgt, daß $\{V_n(x)\}$ mit den Normierungsfaktoren a_n zu $\Phi(x)$ gehört. Hierzu setzen wir wieder mit den durch § 3, (5) definierten Zahlen $V_n^*(x) = V_n(x + b_n)$. Wegen der vorausgesetzten Richtigkeit von (III) gehört nach den letzten Sätzen der §§ 2 und 3 die Folge $\{V_n(x)\}$ dann und nur dann zu $\Phi(x)$, wenn $\{V_n^*(x)\}$ es tut, und es genügt daher, letzteres zu beweisen. Für die Folge $\{V_\nu^*(x)\}$ sind aber nach § 3, S. 538 die Bedingungen (I′) bis (III′) erfüllt. Wir haben also nur folgendes zu beweisen:

Aus dem Bestehen von (I′), (II′) *und* (III′) (S. 525) *folgen die beiden Relationen* (α) *und* (β), § 2, S. 530. — Dem Wortlaut des Satzes entsprechend, legen wir dem folgenden Beweise ein *festes* Intervall $|t| < T$ zugrunde.

a) Wir beweisen zuerst die Richtigkeit von (β). Hierzu werde bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, T)$ so bestimmt, daß für $|x| < \delta a_n$ und $|t| < T$

$$1 - \cos \frac{xt}{a_n} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left| \sin \frac{xt}{a_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird; ferner werde $N = N(\varepsilon)$ so gewählt, daß für $n > N$ mit diesem δ

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| > \delta a_n} dV_\nu(x) < \frac{\varepsilon}{4}$$

wird; das ist wegen (I′) möglich. Dann hat man

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{xt}{a_n}\right)dV_\nu(x)=\int_{|x|\leqq\delta a_n}+\int_{|x|>\delta a_n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\int_{|x|\leqq\delta a_n}dV_\nu(x)\leqq\varepsilon,$$

und das ist die erste Ungleichung (β). Ebenso oder auch direkt durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung folgt die entsprechende Ungleichung für den Sinus.

b) In den Bezeichnungen von a) hat man wegen

$$\left|1-e^{\frac{ixt}{a_n}}+\frac{ixt}{a_n}\right|\leqq\frac{1}{2}\frac{x^2t^2}{a_n^2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{\frac{ixt}{a_n}})dV_\nu(x)\right|\leqq\sum_{\nu=1}^{n}\left|\int_{|x|\leqq\delta a_n}\right|+\sum_{\nu=1}^{n}\left|\int_{|x|>\delta a_n}\right|$$

$$<\varepsilon+\frac{T}{a_n}\sum_{\nu=1}^{n}\left|\int_{|x|\leqq\delta a_n}x\,dV_\nu(x)\right|+\frac{T^2}{2a_n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|<\delta a_n}x^2\,dV_\nu(x),$$

woraus folgt, daß es eine Schranke $M=M(T)$ gibt derart, daß

$$(1)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\left|1-v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)\right|=\sum_{\nu=1}^{n}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{\frac{ixt}{a_n}})dV_\nu(x)\right|<M$$

bleibt.

c) Von hier aus unterscheidet sich der Beweis prinzipiell nicht mehr von dem P. Lévyschen Beweis für den Lindebergschen Satz.

Da nach (β) für hinreichend große n alle charakteristischen Funktionen $v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)$ gleichmäßig nahe an 1 liegen, können wir in (α) zu Logarithmen übergehen, wenn wir darunter stets den Hauptteil verstehen. (α) ist dann gleichbedeutend damit, daß (immer gleichmäßig in $|t|<T$)

$$(2)\qquad \lim\sum_{\nu=1}^{n}\log v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)=-\frac{t^2}{2}$$

ist; nun ist mit der Landauschen Bezeichnung

$$(3)\qquad \log v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)=-\left\{1-v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)\right\}+o\left(1-v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)\right),$$

und wegen (1) ist daher

$$(4)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\log v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)\sim-\sum_{\nu=1}^{n}\left\{1-v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)\right\},$$

wo das Äquivalenzzeichen $\sim$ andeuten soll, daß die Differenz der beiden Seiten gleichmäßig gegen Null geht. Es bleibt also nur die mit (2) äquivalente Beziehung

$$\lim \sum_{\nu=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{\frac{itx}{a_n}})\, dV_\nu(x) = \frac{t^2}{2} \tag{5}$$

zu beweisen.

Nach (I') bis (III') kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N so bestimmen, daß für $n > N$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| \geqq \varepsilon a_n} dV_\nu(x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \varepsilon a_n} x^2\, dV_\nu(x) - 1 \right| < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{|x| < \varepsilon a_n} x\, dV_\nu(x) \right| < \varepsilon$$

bleibt. Dann hat man aber

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{\frac{itx}{a_n}})\, dV_\nu(x) - \frac{t^2}{2} \right| < \varepsilon + \left| \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \varepsilon a_n} (1 - e^{\frac{itx}{a_n}})\, dV_\nu(x) - \frac{t^2}{2} \right|$$

$$< \varepsilon + \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int \frac{xt}{a_n}\, dV_\nu(x) \right| + \frac{t^2}{2} \left| \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \varepsilon a_n} x^2\, dV_\nu(x) - 1 \right|$$

$$+ \frac{|t|^3}{3!} \frac{1}{a_n^3} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \varepsilon a_n} |x|^3\, dV_\nu(x)$$

$$< \varepsilon (1 + T + T^2) + \frac{\varepsilon T^3}{3!} \frac{1}{a_n^3} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \varepsilon a_n} x^2\, dV_\nu(x)$$

$$< \varepsilon (1 + T + T^2 + T^3 + \varepsilon T^3).$$

Damit ist (5) bewiesen.

Zugleich ergibt sich noch etwas mehr. Ersetzt man nämlich irgendeine Teilfolge $\{V_{n_k}(x)\}$ durch $\{1 - V_{n_k}(-x)\}$, so bleiben die Relationen (I'), (II') und (III') auch für die neue Folge bestehen. Daher sind diese Relationen *hinreichend sogar dafür, daß die Folge* $\{V_n(x)\}$ *im engeren Sinne zu* $\Phi(x)$ *gehört.*

§ 5.

Über die Lindebergsche Bedingung.

Als Spezialfall des Ergebnisses von § 4 erhält man den *Lindebergschen* Satz. Diesen kann man so aussprechen:

Die Verteilungsfunktionen $V_n(x)$ mögen verschwindende erste und endliche zweite Momente haben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dV_\nu(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dV_\nu(x) = \sigma_\nu^2, \tag{1}$$

und es werde

$$s_n^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu^2 \tag{2}$$

gesetzt. Wenn dann für jedes $\eta > 0$

$$\lim \frac{1}{s_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \eta s_n} x^2\, dV_\nu(x) = 1 \tag{3}$$

ist, so gehört $\{V_n(x)\}$ zu $\Phi(x)$, und zwar mit den Normierungsfaktoren s_n und im engeren Sinne.

(3) fällt nämlich zusammen mit (II′) für $a_n = s_n$; ferner ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| \geqq \eta s_n} dV_\nu(x) \leqq \frac{1}{\eta^2 s_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| \geqq \eta s_n} x^2\, dV_\nu(x)$$

$$= \frac{1}{\eta^2} \left\{ 1 - \frac{1}{s_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \eta s_n} x^2\, dV_\nu(x) \right\},$$

woraus (I′) folgt; und ebenso ergibt sich auch (III′).

Zugleich zeigt aber unser Satz, daß die Bedingung (3) selbst unter Voraussetzung von (1) *nicht notwendig* ist. Man kann sie unmittelbar in verschiedener Weise verallgemeinern, am einfachsten etwa so:

Unter Voraussetzung von (1) *sei für jedes $\eta > 0$*

$$\lim \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| > \eta s_n} dV_\nu(x) = 0.$$

Wenn dann die Zahlenfolge

$$\alpha_n^2 = \frac{1}{s_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < s_n} x^2\, dV_\nu(x)$$

eine positive untere Schranke hat, so gehört die Folge $\{V_n(x)\}$ mit den Normierungsfaktoren $a_n = \alpha_n s_n$ im engeren Sinne zu $\Phi(x)$. Der Beweis, daß dann (I′) bis (III′) wirklich erfüllt sind, liegt auf der Hand.

Hingegen läßt sich leicht zeigen, daß *die Lindebergsche Bedingung* (3) *notwendig ist dafür, daß* $\{V_n(x)\}$ *mit den Normierungsfaktoren* s_n *zu* $\Phi(x)$ *gehört.* Diese Behauptung wird natürlich im nächsten Paragraphen mitbewiesen. Jener Beweis wird aber ziemlich umständlich, während sich der fragliche Spezialfall unmittelbar ergibt. Da es andererseits doch interessant ist, daß der Lindebergsche Satz den Fall der praktisch einzig in Frage kommenden Normierung (2) restlos erledigt, sei dieser Beweis hier noch ausgeführt.

Es werde also vorausgesetzt, daß $\{V_n(x)\}$ mit den Normierungsfaktoren s_n zu $\Phi(x)$ gehört, daß also § 2, (α) und (β) mit $a_n = s_n$ bestehen. Dann ist wegen (1)

$$(4) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \left| 1 - v_\nu\left(\frac{t}{s_n}\right) \right| = \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{\frac{itx}{s_n}})\, dV_\nu(x) \right| < \frac{t^2}{2}.$$

Außerdem strebt wegen (β) $v_\nu\left(\frac{t}{s_n}\right)$ gleichmäßig gegen 1, so daß wir genau wie in § 4, (2) bis (5) durch Logarithmieren von (α) schließen können, daß gleichmäßig für $|t| < T$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{\frac{itx}{s_n}})\, dV_\nu(x) \to \frac{t^2}{2}$$

strebt; es ist also

$$(5) \qquad \lim \left| \frac{t^2}{2} - \sum_{\nu=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{xt}{s_n}\right) dV_\nu(x) \right| = 0.$$

Nach der leicht zu verifizierenden Tschebycheffschen Ungleichung ist aber für jedes $\eta > 0$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| \geqq \eta s_n} dV_\nu(x) \leqq \frac{1}{\eta^2},$$

und daher folgt aus (5)

$$(6) \qquad \overline{\lim} \left| \frac{t^2}{2} - \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \eta s_n} \left(1 - \cos \frac{xt}{s_n}\right) dV_\nu(x) \right| \leqq \frac{2}{\eta^2}.$$

Andererseits ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \eta s_n} \left(1 - \cos \frac{xt}{s_n}\right) dV_\nu(x) \leqq \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{s_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \eta s_n} x^2\, dV_\nu(x) \leqq \frac{t^2}{2},$$

und das in (6) eingesetzt ergibt

$$0 \leqq \frac{t^2}{2} \overline{\lim} \left\{ 1 - \frac{1}{s_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \eta s_n} x^2 d V_\nu(x) \right\} \leqq \frac{2}{\eta^2}.$$

Diese Ungleichung soll für jedes t bestehen, woraus folgt, daß die geschweifte Klammer gegen 0 strebt, w. z. b. w.

§ 6.

Beweis, daß die Bedingungen notwendig sind.

Jetzt wird die Richtigkeit der Beziehungen § 2, (α) und (β) vorausgesetzt, und daraus soll das Erfülltsein der Bedingungen (I), (II) und (III) abgeleitet werden.

Der Grund für die relative Verwicklung des folgenden Beweises im Vergleich zu denen der § 4 und 5 liegt darin, daß man sich im allgemeinen bei der Taylorentwicklung für $\log v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)$ nicht auf die linearen Glieder beschränken kann. Es gibt nämlich zu $\Phi(x)$ gehörende Folgen, bei denen nicht einmal die Summe über die Beträge der quadratischen Glieder beschränkt bleibt (vgl. § 8, Nr. e). Unser nächstes Ziel ist nun zur Vereinfachung die Betrachtung durch eine Substitution der Form $V_n^*(x) = V_n(x + b_n)$ auf solche Folgen zurückzuführen, bei denen man sich wenigstens auf die quadratischen Glieder beschränken kann. Es läßt sich zeigen, daß das dann und nur dann der Fall ist, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{x t}{a_n}\right) d V_\nu(x)$$

in jedem endlichen Intervall beschränkt bleibt.

Wir beweisen zuerst, daß für jedes $\eta > 0$

$$\lim \int_{|x| > \eta a_n} d V_n(x) = 0 \tag{1}$$

ist. — Wegen § 2, (β) kann man $N = N(\varepsilon)$ so bestimmen, daß für $|t| < \frac{2}{\eta}$ und $n > N$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{x t}{a_n}\right) d V_n(x) < \varepsilon$$

ist. Dann ist auch

$$\int_{|x| > \eta a_n} \left(1 - \cos \frac{x t}{a_n}\right) d V_n(x) < \varepsilon$$

und durch Integration nach t über $0 < t < T = \frac{2}{\eta}$ ergibt sich hieraus

$$\varepsilon T \geqq \int\limits_{|x|>\eta a_n} \left(T - \frac{a_n}{x}\sin\frac{xT}{a_n}\right) d V_n(x)$$

$$\geqq \left(T - \frac{1}{\eta}\right) \int\limits_{|x|>\eta a_n} d V_n(x) = \frac{T}{2} \int\limits_{|x|>\eta a_n} d V_n(x).$$

Damit ist (1) bewiesen.

Es werde nun b_n so bestimmt, daß für $V_n^*(x) = V_n(x + b_n)$

$$\lim_{\xi \to 0-} \int\limits_{-\infty}^{\xi} d V_\nu^*(x) \leqq \tfrac{1}{2}, \qquad \lim_{\xi \to 0+} \int\limits_{\xi}^{\infty} d V_\nu^*(x) \leqq \tfrac{1}{2}$$

wird. Das ist offenbar in genau einer Weise möglich. Es sei darauf hingewiesen, daß alles folgende bestehen bleibt, wenn man auf den rechten Seiten $\frac{1}{2}$ durch irgendeine Zahl $q < 1$ ersetzt: dadurch ändern sich in allen Rechnungen nur einige unwesentliche Konstanten.

Aus (1) folgt unmittelbar, daß

$$\frac{b_n}{a_n} \to 0 \tag{2}$$

strebt. Nach § 3, S. 535 genügt daher die Folge $\{V_n(x)\}$ dann und nur dann den Bedingungen (I) und (II), wenn die entsprechenden Beziehungen für $\{V_n^*(x)\}$ bestehen, und wir wollen beweisen, daß letzteres der Fall ist. Die Folge $\{V_n^*(x)\}$ braucht freilich nicht zu $\Phi(x)$ zu gehören. Aber für die entsprechenden charakteristischen Funktionen hat man

$$v_\nu^*(t) = v_\nu(t)\, e^{-i b_\nu t}; \tag{3}$$

da nun für die Koeffizienten a_n die Ungleichung § 2, (2), S. 531 besteht, folgt aus (2) wieder

$$\lim \frac{1}{a_n} \max [|b_1|, \ldots, |b_n|] = 0,$$

und daher aus (3), daß zusammen mit $v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right) \to 1$ auch $v_\nu^*\left(\frac{t}{a_n}\right)$ in jedem endlichen Intervall gleichmäßig gegen 1 strebt. Ferner strebt

$$\left| w_n^*\left(\frac{t}{a_n}\right)\right| = \left| w_n\left(\frac{t}{a_n}\right)\right| \to e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Diese beiden Eigenschaften der Folge $\{V_n^*(x)\}$ sind also eine Folge davon, daß $\{V_n(x)\}$ zu $\Phi(x)$ gehört. Wenn es gelingt, die Richtigkeit von (I) und (II) für $\{V_n^*(x)\}$ zu beweisen, so ist damit zugleich ihr Erfülltsein für $\{V_n(x)\}$ dargetan.

Um also zu beweisen, daß die Bedingungen (I) und (II) notwendig sind dafür, daß $\{V_n(x)\}$ zu $\Phi(x)$ gehört, genügt es zu beweisen, daß (I) und (II) gelten für jede Folge $\{V_n(x)\}$, für welche

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left| v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right)\right| \to e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{4}$$

$$v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right) \to 1, \tag{5}$$

$$\lim_{\xi \to 0-} \int_{-\infty}^{\xi} d\,V_\nu(x) \leqq \tfrac{1}{2}, \qquad \lim_{\xi \to 0+} \int_{\xi}^{\infty} d\,V_\nu(x) \leqq \tfrac{1}{2}. \tag{6}$$

Die Grenzübergänge (4) und (5) sind natürlich gleichmäßig im Sinne von § 2, (α) und (β) zu verstehen.

Als erstes beweisen wir, daß zufolge von (6) für $|t| < T, \nu = 1, 2, \ldots, n$ und hinreichend große n

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\frac{x\,t}{a_n}\, d\,V_\nu(x)\right)^2 < \tfrac{2}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2\frac{x\,t}{a_n}\, d\,V_\nu(x) \tag{7}$$

ist. Hierzu setzen wir $\eta = \frac{\pi}{2\,T}$ und bezeichnen für ein festes $0 < t < T$ mit J' die Menge der Punkte (x), für welche $\sin\frac{x\,t}{a_n} > 0$ ist, mit J'' diejenige, für welche $\sin\frac{x\,t}{a_n} < 0$. J' umfaßt dann das Intervall $(0, \eta\,a_n)$, J'' das Intervall $(0, -\eta\,a_n)$. Wegen (5) besteht wieder (1), und für hinreichend große n wird daher

$$\int_{|x| > \eta\,a_n} d\,V_\nu(x) < \tfrac{1}{6},$$

also

$$\int_{J'} d\,V_\nu(x) < \tfrac{2}{3} \quad \text{und} \quad \int_{J''} d\,V_\nu(x) < \tfrac{2}{3}.$$

Daher hat man entweder mit $J = J'$ oder mit $J = J''$ unter Anwendung der Schwarzschen Ungleichung auf $\sin\frac{x\,t}{a_n}$ und 1

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\frac{x\,t}{a_n}\, d\,V_\nu(x)\right)^2 < \left(\int_{J} \sin\frac{x\,t}{a_n}\, d\,V_\nu(x)\right)^2 < \tfrac{2}{3} \int_{J} \sin^2\frac{x\,t}{a_n}\, d\,V_\nu(x)$$

$$\leqq \tfrac{2}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2\frac{x\,t}{a_n}\, d\,V_\nu(x)$$

und das ergibt (7).

Versteht man unter dem Logarithmus stets dessen Hauptteil, so folgt aus (4) und (5)

$$\sum_{\nu=1}^{n} R \log v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right) \to -\frac{t^2}{2}. \tag{8}$$

Nun ist

$$\log v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{\frac{ixt}{a_n}})\,dV_\nu(x) - \tfrac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{\frac{ixt}{a_n}})\,dV_\nu(x)\Big)^2 + o\Big(\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{\frac{ixt}{a_n}})\,dV_\nu(x)\Big|^2\Big). \tag{9}$$

Sobald nun n groß genug wird, daß (7) besteht und darüber hinaus gemäß (5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(1-\cos\frac{xt}{a_n}\Big)\,dV_\nu(x) < \tfrac{1}{6} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

wird, folgt

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{\frac{ixt}{a_n}})\,dV_\nu(x)\Big|^2 < \tfrac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(1-\cos\frac{xt}{a_n}\Big)\,dV_\nu(x). \tag{10}$$

Zufolge (9) hat man also für hinreichend große n

$$-R\log v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right) > \tfrac{1}{5}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(1-\cos\frac{xt}{a_n}\Big)\,dV_\nu(x).$$

Somit ergibt sich wegen der Gleichmäßigkeit aus (8), daß für $|t| < T$ und *alle* n

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(1-\cos\frac{xt}{a_n}\Big)\,dV_\nu(x) < M \tag{11}$$

bleibt, wo natürlich $M = M(T)$ ist.

Hieraus ergibt sich nun vermöge (10), daß die Summe über die Beträge der quadratischen Glieder in (9) für $\nu = 1, \ldots, n$ beschränkt bleibt, und man hat daher

$$\sum_{\nu=1}^{n}\log v_\nu\left(\frac{t}{a_n}\right) \sim -\sum_{\nu=1}^{n}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{\frac{ixt}{a_n}})\,dV_\nu(x) + \tfrac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{\frac{ixt}{a_n}})\,dV_\nu(x)\Big)^2\Big\}, \tag{12}$$

wo das Äquivalenzzeichen $\sim$ wieder andeutet, daß die Differenz der beiden Seiten gleichmäßig gegen 0 geht. Ferner folgt aus (11) vermöge (5), daß

$$\sum_{\nu=1}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(1-\cos\frac{xt}{a_n}\Big)dV_\nu(x)\Big)^2\to 0$$

strebt. Somit folgt schließlich aus (8) und (12), daß gleichmäßig in $|t|<T$

$$\lim\sum_{\nu=1}^{n}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(1-\cos\frac{xt}{a_n}\Big)dV_\nu(x)-\tfrac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x)\Big)^2\Big\}=\frac{t^2}{2} \tag{13}$$

ist. Das ist die grundlegende Relation, aus welcher die Notwendigkeit von (I) und (II) abgeleitet wird.

Zur weiteren Umformung von (13) brauchen wir noch zwei Folgerungen aus (11). Zunächst ist zufolge (11) a fortiori für jedes $\eta>0$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|>\eta a_n}\Big(1-\cos\frac{xt}{a_n}\Big)dV_\nu(x)<M.$$

Diese Ungleichung integrieren wir nach t über ein Intervall

$$0<t<T\geqq\frac{2}{\eta}$$

und erhalten (vgl. den Beweis für (1))

$$\Big(T-\frac{1}{\eta}\Big)\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|>\eta a_n}dV_\nu(x)<MT.$$

Es existiert also für jedes $\eta>0$ eine Konstante $M'=M'(\eta)$, so daß auch

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|>\eta a_n}dV_\nu(x)<M' \tag{14}$$

bleibt.

Ferner wählen wir bei vorgegebenem η ein $\tau=\tau(\eta)$ so, daß für $|x|<\eta a_n$

$$1-\cos\frac{x\tau}{a_n}\geqq\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^2\tau^2}{a_n^2}$$

wird. Dann hat man wieder zufolge (11)

$$M>\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|<\eta a_n}\Big(1-\cos\frac{x\tau}{a_n}\Big)dV_\nu(x)\geqq\frac{\tau^2}{4}\cdot\frac{1}{a_n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|<\eta a_n}x^2\,dV_\nu(x).$$

Damit haben wir auch die Beschränktheit von

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|<\eta a_n}x^2\,dV_\nu(x)<K, \tag{15}$$

wobei ebenfalls $K=K(\eta)$.

Vermöge dieser Relationen gelingt es, (13) wesentlich zu vereinfachen, indem wir uns zunächst vom Sinus befreien. Es ist

$$(16)\quad \sum_{\nu=1}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\frac{xt}{a_n}\,dV_\nu(x)\Big)^2-\sum_{\nu=1}^{n}\Big(\int_{|x|<\eta a_n}\sin\frac{xt}{a_n}\,dV_\nu(x)\Big)^2$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x)+\int_{|x|<\eta a_n}\sin\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x)\Big\}\int_{|x|\geqq\eta a_n}\sin\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x).$$

Nun hat man nach der Schwarzschen Ungleichung

$$(17)\quad \Big(\int_{|x|<\eta a_n}\sin\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x)\Big)^2\leqq\int_{|x|<\eta a_n}\sin^2\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x)$$

$$\leqq 2\int_{|x|<\eta a_n}\Big(1-\cos\frac{xt}{a_n}\Big)dV_\nu(x)\leqq 2\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(1-\cos\frac{xt}{a_n}\Big)dV_\nu(x);$$

wegen (5) (= § 2, (β)) strebt also der Faktor in der geschweiften Klammer rechts in (16) gleichmäßig gegen 0, und man hat daher für hinreichend große n

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x)\Big)^2-\sum_{\nu=1}^{n}\Big(\int_{|x|<\eta a_n}\sin\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x)\Big)^2\Big|$$

$$<\varepsilon\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|\geqq\eta a_n}dV_\nu(x)<\varepsilon M'.$$

Somit folgt aus (13), daß auch

$$(18)\quad \lim\sum_{\nu=1}^{n}\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(1-\cos\frac{xt}{a_n}\Big)dV_\nu(x)-\tfrac{1}{2}\Big(\int_{|x|<\eta a_n}\sin\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x)\Big)^2\Big\}=\frac{t^2}{2}$$

ist. Weiter hat man wegen (1) für hinreichend große n und $\nu=1,\ldots,n$ $\int_{|x|<\eta a_n}dV_\nu(x)<\varepsilon$ und daher

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{n}\Big(\int_{|x|<\eta a_n}\sin\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x)\Big)^2-\sum_{\nu=1}^{n}\Big(\int_{|x|<\eta a_n}\frac{xt}{a_n}dV_\nu(x)\Big)^2\Big|$$

$$=\Big|\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|<\eta a_n}\Big(\sin\frac{xt}{a_n}+\frac{xt}{a_n}\Big)dV_\nu(x)\int_{|x|<\eta a_n}\Big(\sin\frac{xt}{a_n}-\frac{xt}{a_n}\Big)dV_\nu(x)$$

$$\leqq(1+\eta|t|)\,\varepsilon\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|<\eta a_n}\frac{x^2t^2}{a_n^2}dV_\nu(x)<(1+\eta|t|)\,t^2\cdot K\cdot\varepsilon;$$

es ergibt sich also aus (18) weiter

$$(19)\quad \lim \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{xt}{a_n}\right) d\,V_\nu(x) - \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{a_n^2} \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, d\,V_\nu(x) \right)^2 \right\} = \frac{t^2}{2}.$$

Wir bestimmen nun $\tau = \tau(\varepsilon, \eta)$ so klein, daß für $|t| < \tau$ und $|x| < \eta a_n$

$$(20)\qquad 1 - \cos \frac{xt}{a_n} \geqq (1 - \varepsilon) \frac{x^2 t^2}{2 a_n^2}$$

bleibt. Für $|t| < \tau$ ist dann

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{xt}{a_n}\right) d\,V_\nu(x) - \frac{t^2}{2 a_n^2} \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, d\,V_\nu(x) \right)^2 \right\}$$

$$(21)\quad \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} \left(1 - \cos \frac{xt}{a_n}\right) d\,V_\nu(x) - \frac{t^2}{2 a_n^2} \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, d\,V_\nu(x) \right)^2 \right\}$$

$$\geqq \frac{t^2}{2 a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} x^2\, d\,V_\nu(x) - \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, d\,V_\nu(x) \right)^2 \right\} - \frac{t^2}{2} \cdot K \cdot \varepsilon.$$

Dies in (19) eingesetzt ergibt

$$(22)\quad \overline{\lim} \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} x^2\, d\,V_\nu(x) - \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, d\,V_\nu(x) \right)^2 \right\} \leqq 1.$$

Vermöge (14) können wir nun die linke Seite von (19) auch nach oben abschätzen:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{xt}{a_n}\right) d\,V_\nu(x) - \frac{t^2}{2 a_n^2} \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, d\,V_\nu(x) \right)^2 \right\}$$

$$\leqq 2M' + \frac{t^2}{2 a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} x^2\, d\,V_\nu(x) - \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, d\,V_\nu(x) \right)^2 \right\}.$$

Das in (19) eingesetzt ergibt, wenn man zur Abkürzung

$$A^2 = \underline{\lim} \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} x^2\, d\,V_\nu(x) - \left(\int_{|x|<\eta a_n} x\, d\,V_\nu(x) \right)^2 \right\}$$

setzt,

$$(1 - A^2) \frac{t^2}{2} \leqq 2M'.$$

Die linke Seite ist nach (22) nicht negativ, und da sie für alle t bestehen soll, ist $A = 1$. Das zusammen mit (22) ergibt gerade die Bedingung (II), deren Notwendigkeit somit bewiesen ist.

Die Notwendigkeit der Bedingung (I) ergibt sich als eine unmittelbare Folge hieraus. Zu dem vorgegebenen Intervall $|t| < T$ bestimmen wir jetzt nämlich ein $\overline{\eta} = \overline{\eta}(T, \varepsilon)$ so, daß für $|x| < \overline{\eta} a_n$ (20) statthat. (21) ergibt dann vermöge (II) für $\eta < \overline{\eta}$

$$\underline{\lim} \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|<\eta a_n} \left(1 - \cos \frac{xt}{a_n}\right) d V_\nu(x) - \frac{t^2}{2 a_n} \left(\int_{|x|<\eta a_n} x \, d V_\nu(x) \right)^2 \right\}$$

$$\geqq \frac{t^2}{2} (1 - \varepsilon K),$$

und daher folgt aus (19) für $\eta < \overline{\eta}$

$$\overline{\lim} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| \geqq \eta a_n} \left(1 - \cos \frac{xt}{a_n}\right) d V_\nu(x) \leqq \varepsilon.$$

Da die linke Seite mit wachsendem η monoton fällt, besteht diese Relation auch für *jedes* $\eta > 0$; die Summe links strebt also gegen 0, und zwar geschieht der Grenzübergang natürlich wieder gleichmäßig. Man hat also für $n > N(\varepsilon, T)$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>\eta a_n} \left(1 - \cos \frac{xt}{a_n}\right) d V_\nu(x) < \varepsilon$$

und hieraus schließt man durch Integration wieder

$$\left(T - \frac{1}{\eta}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|>\eta a_n} d V_\nu(x) < \varepsilon T.$$

Damit ist auch die Notwendigkeit von (I) bewiesen.

Es bleibt noch die Richtigkeit von (III) nachzuweisen. Hierzu darf man freilich nicht mehr die Koordinatennullpunkte durch (6) festgelegt voraussetzen, sondern muß der Betrachtung wieder die „allgemeine Lage" zugrunde legen. Die Ungleichung (15), aus der die Behauptung unmittelbar folgen würde, braucht nicht richtig zu sein. — Nun wissen wir aber, daß für die Folge $\{V_n(x)\}$ (I) und (II) bestehen. Definieren wir also die Zahlen b_n durch § 3, (5), so wissen wir nach S. 537, daß für die Folge $\{V_n^*(x) = V_n(x + b_n)\}$ sogar die Bedingungen (I'), (II') und (III') erfüllt sind. Nach § 4 gehört also die Folge $\{V_n^*(x)\}$ zu $\Phi(x)$, und nach § 2, S. 533 gehört somit dann und nur dann auch $\{V_n(x)\}$ zu $\Phi(x)$, wenn

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = 0$$

ist. Nach § 3, S. 538 ist dies wieder dann und nur dann der Fall, wenn

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<\eta a_n} x\, d\, V_\nu(x) = 0. \tag{23}$$

Da $\{V_n(x)\}$ nach Voraussetzung zu $\Phi(x)$ gehört, besteht also (23), und damit ist die Notwendigkeit auch von (III) bewiesen.

Eine unmittelbare Folge der eben bewiesenen Notwendigkeit der Bedingungen (I) bis (III) ist, daß (I′) bis (III′) notwendig sind dafür, daß $\{V_n(x)\}$ *im engeren Sinne* zu $\Phi(x)$ gehört.

Denn notwendig dafür ist zunächst nach Definition offenbar, daß (I), (II) und die Bedingung

$$\lim \frac{1}{a_n} \sum_{\nu=1}^{n} i_\nu \int_{|x|<\eta a_n} x\, d\, V_\nu(x) = 0$$

erfüllt sind, wo die i_k unabhäng voneinander die Werte ± 1 annehmen. Das ergibt genau (III′). Zufolge (I) ist aber gleichmäßig in $\nu = 1, \ldots, n$

$$\lim \frac{1}{a_n} \int_{|x|<\eta a_n} x\, d\, V_\nu(x) = 0$$

und daher folgt aus (I) und (III′) zusammen

$$\lim \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \Big(\int_{|x|<\eta a_n} x\, d\, V_\nu(x) \Big)^2 = 0.$$

Die Bedingung (II) vereinfacht sich somit vermöge (III′) zu (II′), und damit ist auch deren Notwendigkeit bewiesen.

§ 7.

Beweis des Kriteriums.

Es handelt sich nun schließlich darum, eine Methode anzugeben zur Feststellung, ob es zu einer gegebenen Folge $\{V_n(x)\}$ zwei Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gibt derart, daß die Folge $\{V_n(x + b_n)\}$ mit den Normierungsfaktoren a_n zu $\Phi(x)$ gehört. Die bisherigen Ergebnisse reduzieren dieses Problem auf die Frage, ob man $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ so bestimmen kann, daß die Bedingungen (I) und (II) erfüllt werden. Dann kann man durch § 3, (5) nachträglich die Nullpunkte so verschieben, daß sogar (I′) bis (III′) erfüllt sind, das also die Folge im engeren Sinne zu $\Phi(x)$ gehört.

Da nun die Wahl geeigneter b_n von vornherein ganz offen steht, bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man die Nullpunkte der $V_n(x)$ durch § 6, (6) festlegt. Tut man das aber, so gilt nach

§ 3, S. 535 (unter Benutzung von § 6, (2), S. 544): *Wenn es überhaupt eine Folge* $\{b_n\}$ *gibt derart, daß die Bedingungen* (I) *und* (II) *für die Folge* $\{V_n(x+b_n)\}$ *erfüllt sind, so sind sie es bereits für die Folge* $\{V_n(x)\}$. Das noch zu beweisende Kriterium von § 1, S. 527 wird also vollständig bewiesen sein, sobald der Nachweis des folgenden Satzes erbracht ist:

Die Nullpunkte der $V_\nu(x)$ *seien wieder durch* § 6, (6) *festgelegt, und die Zahlen* $p_n(\delta)$ *mögen wie in* § 1, S. 526 *definiert sein. Damit es dann eine Zahlenfolge* $\{a_n\}$ *gibt, mit welcher die Bedingungen* (I) *und* (II) *bestehen, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes* $\delta > 0$

$$\lim \frac{1}{p_n^2(\delta)} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<p_n(\delta)} x^2 \, dV_\nu(x) = \infty. \tag{1}$$

Wenn das der Fall ist, so gibt es auch eine Nullfolge $\delta_n \to 0$ *derart, daß*

$$\lim \frac{1}{p_n^2(\delta_n)} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<p_n(\delta_n)} x^2 \, dV_\nu(x) = \infty \tag{2}$$

ist; setzt man dann

$$a_n^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \int_{|x|\leqq p_n(\delta_n)} x^2 \, dV_\nu(x) - \left(\int_{|x|\leqq p_n(\delta_n)} x \, dV_\nu(x) \right)^2 \right\}, \tag{3}$$

so genügt die Zahlenfolge $\{a_n\}$ *mit den Verteilungsfunktionen* $V_n(x)$ *den Bedingungen* (I) *und* (II).

Beweis. a) Es werde vorausgesetzt, daß (I) und (II) bestehen. Wegen (I) ist dann offenbar für jedes $\delta > 0$

$$\lim \frac{p_n(\delta)}{a_n} = 0, \tag{4}$$

und wegen (II) ist

$$\varliminf \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<a_n} x^2 \, dV_\nu(x) \geqq 1. \tag{5}$$

Sobald nun n groß genug wird, daß $p_n(\delta) < a_n$ bleibt, hat man

$$\frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|<a_n} x^2 \, dV_\nu(x) = \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|\leqq p_n(\delta)} x^2 \, dV_\nu(x)$$

$$+ \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{p_n(\delta)<|x|<a_n} x^2 \, dV_\nu(x) \leqq \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x|\leqq p_n(\delta)} x^2 \, dV_\nu(x) + \delta.$$

Für $\delta < 1$ folgt hieraus die Behauptung (1) unmittelbar wegen (4) und (5) Sobald andererseits (1) für ein bestimmtes δ richtig ist, ist das auch für alle größeren δ der Fall. Damit ist die Notwendigkeit von (1) für alle positiven δ bewiesen.

b) Die hinreichende Bedingung des Kriteriums ist enthalten in dem folgenden etwas allgemeineren Satz, der bei der praktischen Ausrechnung oft wesentlich bequemer ist:

Wenn mit der Zahlenfolge $\{q_n\}$ *entweder die beiden Relationen* (7) *oder die Relationen* (8) § 1, S. 527 *bestehen, so erfüllt die durch*

$$a_n^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \Big\{ \int\limits_{|x|<q_n} x^2 \, dV_\nu(x) - \Big(\int\limits_{|x|<q_n} x \, dV_\nu(x) \Big)^2 \Big\}$$

definierte Zahlenfolge $\{a_n\}$ *mit den Verteilungsfunktionen* $\{V_n(x)\}$ *die Bedingungen* (I) *und* (II).

Aus der Voraussetzung über die Lage der Nullpunkte folgt nämlich nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\Big(\int\limits_{|x|<q_n} x \, dV_\nu(x) \Big)^2 \leqq \tfrac{1}{2} \int\limits_{|x|<q_n} x^2 \, dV_\nu(x)$$

also

$$a_n^2 \geqq \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{|x|<q_n} x^2 \, dV_\nu(x).$$

Daher hat man unter Voraussetzung von (7) $\lim \frac{q_n}{a_n} = 0$ und unter Voraussetzung von (8) $\overline{\lim} \frac{q_n}{a_n}$ *endlich*. Zufolge der Definition der q_n und a_n ist daher (I) erfüllt.

Unter Voraussetzung von (7) hat man ferner, sobald n so groß ist, daß $q_n < \eta a_n$ wird

$$\Big| \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \Big\{ \int\limits_{|x|<\eta a_n} x^2 \, dV_\nu(x) - \Big(\int\limits_{|x|<\eta a_n} x \, dV_\nu(x) \Big)^2 \Big\} - 1 \Big|$$

$$= \Big| \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \Big\{ \int\limits_{|x|<\eta a_n} x^2 \, dV_\nu(x) - \Big(\int\limits_{|x|<\eta a_n} x \, dV_\nu(x) \Big)^2 \Big\}$$

$$- \frac{1}{a_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \Big\{ \int\limits_{|x|<q_n} x^2 \, dV_\nu(x) - \Big(\int\limits_{|x|<q_n} x \, dV_\nu(x) \Big)^2 \Big\} \Big| \leqq 3\eta^2 \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{|x|\geqq q_n} dV_\nu(x),$$

und die rechte Seite strebt gegen 0, womit in diesem Falle (II) bewiesen ist. — Geht man von der Voraussetzung (8) aus, so gelingt die entsprechende Abschätzung, nur erhält man rechts etwa

$$6 \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{|x|>\sigma q_n} dV_\nu(x),$$

wo nun σ so gewählt wird, daß $\sigma q_n < a_n$.

Damit ist das Kriterium, und zugleich auch die in § 1, S. 527 gemachte Zusatzbemerkung bewiesen.

§ 8.

Beispiele.

a) *Der Fall gleicher Komponenten*: $V_n(x) = V(x)$.

Um das Kriterium anwenden zu können, genügt es nach dem vorangehenden, den Nullpunkt so zu legen, daß $V(0) \neq 0$ und ebenfalls $\neq 1$ ist. Die Zahlen $p_n(\delta)$ sind definiert als kleinste Zahlen mit

$$\int_{|x|>p_n(\delta)} d\,V_n(x) \leqq \frac{\delta}{n}.$$

Es ist hier natürlicher, n zu eliminieren, indem man $\frac{\delta}{n} = \zeta$ als Variable betrachtet. Das Kriterium nimmt dann die Form an: *Es sei* $Z = Z(\zeta)$ *die kleinste Zahl mit*

$$\int_{|x|>Z} d\,V(x) \leqq \zeta.$$

Damit es eine Folge $\{b_n\}$ *gibt, mit welcher* $\{V_n(x) = V(x+b_n)\}$ *zu* $\Phi(x)$ *gehört, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{1}{\zeta Z^2} \int_{|x| \leqq Z} x^2\, d\,V(x) = \infty$$

ist.

Anschaulich besagt diese Bedingung, daß die Konvergenz von $V(x)$ für $x \to \pm\infty$ nicht allzu langsam geschehen darf. Speziell betrachten wir die durch

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,|x|^s} & \text{für} \quad x \leqq -1, \\ \dfrac{1}{2} & \text{,,} \quad |x| \leqq 1, \\ 1 - \dfrac{1}{2\,x^s} & \text{,,} \quad x \geqq 1 \end{cases}$$

definierte Funktion[12]), wo $s > 0$ eine Konstante ist. Es ist

$$p_n(\delta) = \left(\frac{n}{\delta}\right)^{\frac{1}{s}},$$

und die Bedingung nimmt die Form

$$s\,\delta^{\frac{2}{s}} \cdot n^{1-\frac{2}{s}} \int_1^{\left(\frac{n}{\delta}\right)^{\frac{1}{s}}} \frac{d\,x}{x^{s-1}} \to \infty$$

an. Man sieht daraus: *Die Folge gehört für* $s \geqq 2$ *zu* $\Phi(x)$, *für* $s < 2$

[12]) Die Voraussetzung über die Lage der Nullpunkte ist hier und in den folgenden Beispielen aus Symmetriegründen erfüllt, ebenso auch die Bedingung (III').

hingegen nicht. Um auch die Normierungsfaktoren zu berechnen, kann man etwa

$$\delta_n = \frac{1}{\log\log n}$$

setzen, und erhält nach § 7, (3)

$$a_n^2 = n\,s \int_1^{(n\log\log n)^{\frac{1}{s}}} \frac{dx}{x^{s-1}}.$$

Da jede äquivalente Folge dieselben Dienste leistet, sieht man: *Als Normierungsfaktoren kann man nehmen:* $a_n^2 = \frac{s}{s-2}n$ *für* $s > 2$, *und* $a_n^2 = n\log n$ *für* $s = 2$. *Es ist bemerkenswert, daß im letzten Falle* a_n^2 *schneller wächst als* n, *obwohl es sich um* n *gleiche Komponenten handelt.*

b) $V_n(x)$ sei eine Treppenfunktion mit fünf Sprüngen, und zwar der Größe

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{2c} \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{c}\right)\frac{1}{n^2} \\ 1-\frac{1}{c}-\left(1-\frac{1}{c}\right)\frac{1}{n^2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} & x = \pm 1, \\ \text{für} & x = \pm n, \quad c > 1, \\ & x = 0. \end{array}$$

Das erste Moment verschwindet, das zweite ist gleich 1. Der üblichen Normierung entspräche es also, $s_n = \sqrt{n}$ zu setzen; in Wirklichkeit sieht man, sei es durch Anwendung des allgemeinen Kriteriums, oder nach § 5, S. 542, daß die Folge mit den Normierungsfaktoren $a_n = \sqrt{\frac{n}{c}}$ zu $\Phi(x)$ gehört. Die Lindebergsche Bedingung ist natürlich nicht erfüllt.

Es ist ganz instruktiv, an diesem Beispiel zu sehen, wie die Konvergenz eigentlich zustande kommt. Man erhält hier

$$\prod_{\nu=1}^{n} v_\nu\left(\sqrt{\frac{c}{n}}\,t\right) = \prod_{\nu=1}^{n}\left\{1-\frac{1}{c}\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{n}}\,t\right)-\frac{1}{\nu^2}\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{n}}\,\nu t\right)\right\}.$$

Während es nun beim ersten Term in der Klammer genügt, das lineare Glied der Taylorentwicklung zu betrachten, braucht man für den zweiten eine ganz andersartige Abschätzung. Wir schreiben

$$v_\nu\left(\sqrt{\frac{c}{n}}\,t\right) = 1-\frac{t^2}{2n}-\varphi(t)-\psi_\nu(t),$$

wobei

$$\varphi(t) = \frac{1}{c}\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{n}}\,t\right)-\frac{t^2}{2n} \quad \text{also} \quad |\varphi(t)| < \frac{c\,t^4}{n^2}$$

und

$$0 \leqq \psi_\nu(t) = \frac{1}{\nu^2}\left(1 - \frac{1}{c}\right)\left(1 - \cos\sqrt{\frac{c}{n}}\,\nu t\right) < \begin{cases} \frac{2}{n^3} & \text{für } n^{\frac{2}{3}} \leqq \nu \leqq n \\ \frac{c\,t^2}{n} & ,, \quad \nu \leqq n^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

ist. Dann wird

$$\prod_{\nu=1}^{n} v_\nu\left(\sqrt{\frac{c}{n}}\,t\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \prod_{\nu=1}^{n}\left\{1 - \frac{\varphi(t) + \psi_\nu(t)}{1 - \frac{t^2}{2n}}\right\},$$

und das Produkt rechts geht, wie aus den obigen Abschätzungen unmittelbar folgt, gegen 1, das Ganze also in der Tat gegen $e^{-\frac{t^2}{2}}$.

c) Es sei $V_\nu(x)$ wieder eine Treppenfunktion, jetzt mit den Sprüngen der Größe

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} && \text{für} && x = \pm 1, \\ &\frac{\nu - 1}{2\,\nu^4} && ,, && x = \pm \nu^2, \\ &\frac{1}{2} - \frac{\nu - 1}{\nu^4} && ,, && x = 0. \end{aligned}$$

$V_\nu(x)$ hat das zweite Moment $\sigma_\nu^2 = \frac{2\,\nu - 1}{2}$; mit der üblichen Normierung $s_n^2 = \frac{n^2}{2}$ erhält man eine Folge, die gegen $E(x)$ (Definition § 1, (3), S. 523) strebt.

Um nun das Kriterium anzuwenden, bemerke man, daß für *jede* über alle Grenzen wachsende Folge $\{p_n\}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| > p_n} d\,V_\nu(x) \to 0$$

strebt. Außerdem wird für solche Folgen

$$\frac{1}{p_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < p_n} x^2\,d\,V_\nu(x) \geqq \frac{1}{p_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \frac{3}{2}} x^2\,d\,V_\nu(x) = \frac{n}{2\,p_n^2}.$$

Es genügt also, p_n langsamer wachsen zu lassen als $\sqrt{n}$, um den Grenzwert ∞ zu erhalten. Man kann also etwa

$$a_n^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| < \sqrt[3]{n}} x^2\,d\,V_\nu(x)$$

setzen; diese Folge ist mit $\frac{n}{2}$ äquivalent. *Die Folge $\{V_\nu(x)\}$ gehört also mit den Normierungsfaktoren $\sqrt{\frac{n}{2}}$ (im engeren Sinne) zu $\Phi(x)$.*

d) Beispiel einer *nicht* zu $\Phi(x)$ gehörenden Folge. $V_\nu(x)$ sei die Treppenfunktion mit den Sprüngen der Größe

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{2\,\nu^{\frac{2}{3}}} \\ \dfrac{\nu-1}{\nu^2} \\ 1-\dfrac{1}{\nu^{\frac{2}{3}}}-2\dfrac{\nu-1}{\nu^2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} & x=\pm\nu^{\frac{1}{3}}, \\ \text{für} & x=\pm\nu, \\ & x=0. \end{array}$$

Dann hat man für $0<\eta<1$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|>\eta n} d\,V_\nu(x) \geqq 2\sum_{\nu=[\eta n]+1}^{n}\frac{\nu-1}{\nu^2} \sim -2\log\eta,$$

so daß die Folge $\{a_n\}$ jedenfalls schneller wachsen müßte als n. Für jede solche Folge wird aber

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|<a_n} x^2\,d\,V_\nu(x)=\frac{n^2}{a_n^2}\to 0,$$

während mit den Normierungsfaktoren der Limes inferior dieser Größe $\geqq 1$ sein müßte. *Es gibt hier somit keine Konstantenfolge, mit welcher* $\{V_n(x+b_n)\}$ *zu* $\Phi(x)$ *gehören würde.*

e) Es sei

$$V_\nu(x)=\begin{cases} 0 & \text{für} \quad x<1 \\ \dfrac{1}{\nu^{\frac{2}{3}}} & ,, \quad 1\leqq x<1+\sqrt[3]{\nu} \\ 1 & ,, \quad 1+\sqrt[3]{\nu}\leqq x \end{cases}$$

und es werde $a_n=\sqrt{n}$ gesetzt. Dann wird für $n>\left(\frac{2}{\eta}\right)^6$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|>\eta a_n} d\,V_\nu(x)=0$$

und

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\int_{|x|<\eta a_n} x^2\,d\,V_\nu(x)-\left(\int_{|x|<\eta a_n} x\,d\,V_\nu(x)\right)^2\right\}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left\{1-\frac{1}{\nu^{\frac{2}{3}}}\right\}\to 1,$$

so daß die Bedingungen (I) und (II) erfüllt sind. Hingegen hat man

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|<\eta a_n} x^2\,d\,V_\nu(x)>\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\frac{1}{3}}\to\infty.$$

Die Relation (15) und daher auch (11) aus § 6, S. 547 bzw. 546 bestehen hier also *nicht*, und das Beispiel zeigt, daß die Umstände, welche die relative Verwicklung des Beweises des § 6 verursachen, wirklich auftreten können;

bei der direkten Untersuchung der vorliegenden Folge käme man nicht mit den quadratischen Gliedern der Taylorentwicklungen für die charakteristischen Funktionen aus. Freilich *ist* (III) *hier nicht erfüllt.* Setzt man aber $\overline{V}_{2\nu}(x) = V_\nu(x)$ und $\overline{V}_{2\nu-1}(x) = 1 - V_\nu(-x)$, so ist für $\{\overline{V}_\nu(x)\}$ auch (III) erfüllt, bei im übrigen unveränderten Verhältnissen. — Um aus $\{V_\nu(x)\}$ eine zu $\Phi(x)$ gehörende Folge abzuleiten, hat man nach § 3, (5) $b_n = 1 + \sqrt[3]{n} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ zu setzen. Die so entstehende Folge $\{V_n(x + b_n)\}$ gehört im engeren Sinne zu $\Phi(x)$, und zwar mit den Normierungskonstanten $a_n = \sqrt{n}$.

Anhang.

Es sei noch (vgl. § 1, S. 524) ein Beispiel für eine Folge $\{V_n(x)\}$ angegeben, für welche zwar $V_n(c_n x) \to \Phi(x)$ strebt, aber keine Folge $\{a_n\}$ existiert, mit welcher $W_n(a_n x) \to \Phi(x)$.

Es sei l_ν die Lösung der Gleichung $\Phi(l_\nu) = 1 - \frac{1}{\nu}$, und es werde für ganze $k > 0$

$$m_{2^k+1} = m_{2^k+2} = \ldots = m_{2^{k+1}} = \sqrt{2}^{2^{k+1}+1}$$

gesetzt. Dann definieren wir

$$V_\nu(x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}^\nu}\right) & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \sqrt{2}^\nu l_\nu, \\ \Phi(l_\nu) & \text{„} \quad \sqrt{2}^\nu l_\nu \leqq x < m_\nu, \\ 1 & \text{„} \quad m_\nu \leqq x, \end{cases}$$

$$V_\nu(x) = 1 - V_\nu(-x) \text{ für } x < 0.$$

Dann strebt $V_\nu(\sqrt{2}^\nu \cdot x)$ gleichmäßig gegen $\Phi(x)$. Für die Normierungsfaktoren kommt nach § 2, S. 532 höchstens eine mit $a_n = \sqrt{2}^{n+1}$ äquivalente Folge in Frage. — Nun erhält man für die charakteristische Funktion

$$v_\nu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\, V_\nu(x) = 1 - u_\nu(t) - \frac{2}{\nu}(1 - \cos m_\nu t)$$

mit

$$u_\nu(t) = \int_{|x|<\sqrt{2}^\nu l_\nu} (1 - e^{itx})\, d\, \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}^\nu}\right).$$

Man sieht mühelos, daß

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left\{1 - u_\nu\left(\frac{t}{\sqrt{2^{n+1}}}\right)\right\} \to e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Wenn $\{V_n(x)\}$ zu $\Phi(x)$ gehörte, müßte auch

$$\prod_{\nu=1}^{n} v_\nu\left(\frac{t}{\sqrt{2^n+1}}\right) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

streben, also

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left\{1-\frac{\frac{2}{\nu}\left(1-\cos\frac{m_\nu t}{\sqrt{2^n+1}}\right)}{1-u_\nu\left(\frac{t}{\sqrt{2^n+1}}\right)}\right\}\to 1$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\left(1-\cos\frac{m_\nu t}{\sqrt{2^n+1}}\right)\to 0.$$

Nun hat man aber insbesondere für $n=2^{k+1}$:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\left(1-\cos\frac{m_\nu t}{\sqrt{2^n+1}}\right)\geqq\sum_{\nu=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{\nu}\left(1-\cos\frac{m_\nu t}{\sqrt{2^n+1}}\right)$$

$$=\sum_{\nu=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{\nu}(1-\cos t)\sim(1-\cos t)\log 2.$$

Stockholm, April 1935.

(Eingegangen am 5. Mai 1935.)

Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe I.

Von

W. Haack in Danzig.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe in einer Form aufzubauen, die ein Eindringen in die geometrische Struktur der Umgebung zweiter und dritter Ordnung eines Strahles gestattet und einen klaren Überblick über den Vorrat an Differentialinvarianten gewährt.

Zur Darstellung der Komplexstrahlen dienen Studys duale Vektoren. Ausgehend von den beiden quadratischen Differentialformen, die schon von Zindler und Sannia angegeben wurden, gelangt man zu drei linearen Differentialformen. Dadurch bietet sich die Möglichkeit zum Aufbau eines invarianten Systems von Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen. Vier Invarianten und ihre invarianten Ableitungen bilden ein vollständiges Invariantensystem des Komplexes.

Die geometrische Anwendung der Formeln beginnt im § 4 mit der Untersuchung der Umgebung erster Ordnung eines Komplexstrahles. Man erhält die geometrische Deutung der invarianten Ableitungen und Linearformen, des begleitenden Dreibeins, welches außer dem Komplexstrahl noch die „Haupt- und Binormale" als Achsen besitzt, sowie die Formel von Koenigs. Durch das begleitende Dreibein wird jedem Komplex eindeutig ein zweiter Komplex, sein Hauptnormalenkomplex, zugeordnet. Im § 5 wird bewiesen, daß diese Zuordnung involutorischer Art ist: Jeder der beiden Komplexe ist der Hauptnormalenkomplex des anderen. Im § 6 werden die Komplexe untersucht, für die eine der Invarianten verschwindet oder auch eine der drei Linearformen ein totales Differential ist. Zum Schluß werden die Ableitungsgleichungen des Zentralpunktes berechnet. Dadurch gelangt man zu einer einfachen Deutung einer Invarianten.

§ 1.

Darstellung des Komplexes.

Eine (gerichtete) Gerade im Raume stellt man nach Study dar durch ein Paar von Vektoren $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$, so daß $\mathfrak{a}$ ein zur Geraden paralleler Einheitsvektor, das sphärische Bild der Geraden, und $\bar{\mathfrak{a}}$ das Moment der in der Geraden wirkenden Einheitskraft um den Koordinatenanfangspunkt ist.

Dann gilt $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}} = 0$. Die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ faßt Study zu dem dualen Einheitsvektor

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}$$

zusammen, dessen skalares Quadrat ist:

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a} + \varepsilon\, 2\,\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}} = 1.$$

Die duale Einheit ε genügt der Bedingung $\varepsilon^2 = 0$. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei duale Einheitsvektoren (wir sagen kurz zwei Geraden), so wird das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} &= \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} + \varepsilon\,(\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{b}} + \bar{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}) \\ &= \cos\varphi - \varepsilon\,\bar{\varphi}\sin\varphi,\end{aligned} \tag{1}$$

dabei ist φ der von den gerichteten Geraden eingeschlossene Winkel und $\bar{\varphi}$ ihr kürzester Abstand[1]).

Im folgenden werden stets durch große deutsche Buchstaben duale Vektoren, durch große lateinische Buchstaben duale Zahlen bezeichnet. Der Realteil wird jeweils durch den entsprechenden kleinen Buchstaben und der Dualteil durch den überstrichenen kleinen Buchstaben angegeben.

Definition eines Strahlenkomplexes: *Ein Stück Ψ einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit des vier-dimensionalen Studyschen Strahlenraumes heiße ein Strahlenkomplex* (oder kurz ein Komplex), *wenn die Komponenten der zwei Vektoren* $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ *als solche Funktionen dreier Parameter* u^1, u^2, u^3 *gegeben sind, die im Gebiete Ψ mindestens dreimal stetig differenzierbar sind, die ferner überall in Ψ die Identitäten*

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a} \equiv 1; \quad \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}} \equiv 0 \tag{2}$$

erfüllen, so daß nirgends in Ψ sämtliche dreireihigen Determinanten verschwinden, die aus den sechs Vektoren $\dfrac{\partial\,\mathfrak{a}}{\partial\,u^i}$; $\dfrac{\partial\,\bar{\mathfrak{a}}}{\partial\,u^i}$ *gebildet werden können.*

Es ist[2])

$$d\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_i\,d\,u^i; \qquad \mathfrak{A}_i = \frac{\partial\,\mathfrak{A}}{\partial\,u^i}.$$

Setzt man

$$G_{ik} = g_{ik} + \varepsilon\,\bar{g}_{ik} = \mathfrak{A}_i\,\mathfrak{A}_k = \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{a}_k + \varepsilon\,(\mathfrak{a}_i\,\bar{\mathfrak{a}}_k + \mathfrak{a}_k\,\bar{\mathfrak{a}}_i), \tag{3}$$

so wird

$$G_{ik}\,d\,u^i\,d\,u^k \tag{4}$$

eine duale quadratische Differentialform, deren Realteil, die Form

$$\mathrm{I} \equiv g_{ik}\,d\,u^i\,d\,u^k, \tag{5a}$$

---

[1]) Vgl. etwa: W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie Bd. 1, 3. Aufl. 1930 (später zitiert als: Blaschke I) § 120.

[2]) Über kleine lateinische Indizes, die in einem Ausdruck gleichzeitig oben und unten auftreten, wird stets summiert.

das Bogenelement der Einheitskugel ist, und deren Dualteil

(5b) $$\text{II} \equiv \bar{g}_{ik}\, du^i\, du^k$$

für die abwickelbaren Flächen des Komplexes verschwindet. Die Determinante der Form I ist wegen (2) stets Null:

(6) $$|g_{ik}| \equiv 0.$$

Wenn nichts anderes betont ist, wird später immer angenommen, *daß* $|g_{ik}|$ *den Rang* 2 *hat*, daß also das sphärische Bild des Komplexes nicht in eine Kurve entartet, ferner, *daß die Determinante der Form* II *nirgends im Gebiet* Ψ *verschwindet*:

(7) $$|\bar{g}_{ik}| \neq 0.$$

Damit werden alle Komplexe ausgeschlossen, deren Geraden sämtlich eine Fläche berühren oder eine Kurve schneiden[3]). Dann kann *die Form* II *als Grundform für den Ricci-Kalkül* verwendet werden.

Aus den beiden quadratischen Formen entsteht mittels eines Parameters σ das Formenbüschel

(8) $$\text{I} - \sigma\,\text{II};$$

die zugehörige Determinante ist

(9) $$|g_{ik} - \sigma \bar{g}_{ik}|.$$

Die Entwicklung der Determinante führt auf ein Polynom dritten Grades in σ. Wegen (7) kann das Polynom nach Division durch $|\bar{g}_{ik}|$ in der Form geschrieben werden:

$$-\sigma^3 + \sigma^2 d - \sigma t.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß infolge von (2) die Größe t verschwindet. Daher wird das Polynom:

(10) $$-\sigma^2(\sigma - d);$$

dabei ist

(11) $$d = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & \bar{g}_{12} & \bar{g}_{13} \\ g_{21} & \bar{g}_{22} & \bar{g}_{23} \\ g_{31} & \bar{g}_{32} & \bar{g}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} & g_{13} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} & g_{23} \\ \bar{g}_{31} & \bar{g}_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{g}_{11} & g_{12} & \bar{g}_{13} \\ \bar{g}_{21} & g_{22} & \bar{g}_{23} \\ \bar{g}_{31} & g_{32} & \bar{g}_{33} \end{vmatrix}}{|\bar{g}_{ik}|} = g_{ik}\bar{g}^{ik}$$

die einzige algebraische Invariante der Formen I und II. Für $\sigma = d$ zerfällt die zugehörige Form des Büschels in zwei Linearfaktoren. Die Größe

(12) $$k = \frac{1}{2d}$$

ist daher die einzige Invariante erster Ordnung des Komplexes, sie wird im folgenden *Hauptdrall des Komplexes genannt.*

---

[3]) Im Gebiete Ψ soll also kein *singulärer* Strahl des Komplexes liegen.

§ 2.

Konstruktion dreier Linearformen.

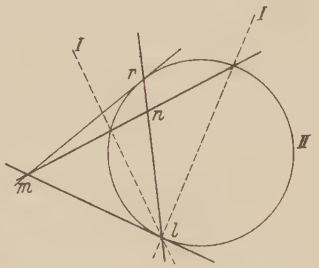
Um ein anschauliches Bild von der Struktur der beiden quadratischen Formen I und II zu gewinnen, mögen du^1, du^2, du^3 als homogene Koordinaten einer Ebene E gedeutet werden[4]). Dann bestimmt II einen Kegelschnitt und I ein imaginäres Geradenpaar (in der Figur punktiert gezeichnet). Die homogenen Koordinaten l^i des (reellen) Schnittpunktes l des Geradenpaares folgen aus den Gleichungen

(1) $$g_{ik} l^i = 0.$$

Wegen § 1, Gleichung (2) wird

(2) $$\bar{g}_{ik} l^i l^k = 0,$$

so daß der Punkt l auf dem Kegelschnitt II liegt. Man hat also die in der nebenstehenden Figur wiedergegebene Konfiguration in der Ebene E. Für $\sigma = d$ zerfällt nach § 1, Gleichung (11) die quadratische Form des Büschels § 1, Gleichung (8) in zwei Linearfaktoren. Diesen entspricht in der Ebene E die Gleichung der Tangente des Kegelschnittes II im Punkte l:



Konfiguration in der Ebene E.

(3) $$\bar{g}_{ik} l^i du^k = 0$$

und die Gleichung der Verbindungsgeraden der beiden konjugiert imaginären Schnittpunkte von I und II, die wir kurz in der Form schreiben

(4) $$s_r du^r = 0.$$

Die homogenen Koordinaten m^i des Schnittpunktes m dieser beiden Geraden genügen den Gleichungen:

(5) $$(g_{ik} - d\bar{g}_{ik}) m^i = 0.$$

[4]) Diese Abbildung auf die Ebene E hat schon Zindler untersucht (Liniengeometrie m. Anw. Bd. II, 1906, später zitiert als Zindler II, § 48). Er gelangte dadurch auch zu einigen Eigenschaften der Regelflächen des Komplexes, die im § 4 betrachtet werden. Aber die Bestimmung von invarianten Differentialformen lag Zindler fern; er beachtet lediglich die Punkte der Ebene E. In diesem Zusammenhange sei auf den Prioritätsstreit zwischen Zindler und Sannia hingewiesen (Zindler, Réclamation de priorité, Ann. di Mat. III, 18. S. 335; Math. Annalen 69, S. 446; Sannia, Ann. di Mat. III, 19, S. 57). Zindler hat die quadratischen Differentialformen und sogar ihr Bild in der Ebene E schon vor Sannia aufgestellt, erkannte aber nicht die Bedeutung der Formen für den Aufbau der Differentialgeometrie der Komplexe. (Sannia, Saggio di geom. diff. dei complessi di rette, Ann. di Mat. III, 17, S. 179—223, später zitiert als Sannia I). Auch auf Mayerhofers „Darstellung eines Strahlenkomplexes durch eine duale Differentialform“ (Ber. d. Akad. Wien 134, S. 214—232) sei hier verwiesen. Mayerhofer beweist, daß ein Komplex allein aus der dualen Form 4 bestimmt ist, ohne eine Zerlegung in Real- und Dualteil vorzunehmen.

Die Größen m^i können normiert werden durch die Bedingung

$$g_{ik} m^i m^k = 1. \tag{6}$$

Die normierten Größen m^i bilden einen *Tensor* I. *Stufe.*

Durch Polarenbildung von m^i mit $\bar{g}_{ik}$, oder, was bis auf einen Faktor auf dasselbe herauskommt, mit g_{ik}, erhält man die Linearform

$$\bar{g}_{ik} m^i du^k \quad (\text{bzw. } g_{ik} m^i du^k). \tag{7}$$

Durch Nullsetzen folgt daraus die Gleichung der Polaren des Punktes m in bezug auf den Kegelschnitt II. Berechnet man die homogenen Koordinaten n^i des Schnittpunktes n der Polaren mit der Geraden (4) und normiert man die Größen n^i wieder durch

$$g_{ik} n^i n^k = 1, \tag{8a}$$

so bilden die normierten Größen n^i einen *zweiten Tensor* I. *Stufe.* Für n^i gelten also außer (8 a) noch die Gleichungen

$$\bar{g}_{ik} m^i n^k = 0, \qquad s_r n^r = 0. \tag{8b}$$

Jetzt bietet sich die Möglichkeit, auch die Größen l^i zu normieren: Man bestimmt dazu einen Hilfstensor r^i, indem man die homogenen Koordinaten r^i des Schnittpunktes r der Polaren (7) mit dem Kegelschnitt II berechnet (siehe Figur) und durch

$$g_{ik} r^i r^k = 1 \tag{9}$$

normiert. Man hat dann für r^i außer (9) die Gleichungen

$$\bar{g}_{ik} r^i r^k = 0, \qquad \bar{g}_{ik} m^i r^k = 0. \tag{10}$$

Dann zeigt sich, daß die Größen l^i proportional zu $r^i + n^i$ sind. Normiert man l^i so, daß

$$2k l^i = r^i + n^i \tag{11}$$

wird, indem natürlich für r^i und n^i stets die normierten Größen zu verwenden sind, so bilden die normierten Größen l^i einen *dritten Tensor* I. *Stufe.*

Damit sind drei kontravariante Tensoren l^i, m^i, n^i gewonnen. Die zu ihnen reziproken kovarianten Tensoren l_i, m_i, n_i werden durch die neun Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} l_i l^i &= 1, & m_i l^i &= 0, & n_i l^i &= 0, \\ l_i m^i &= 0, & m_i m^i &= 1, & n_i m^i &= 0, \\ l_i n^i &= 0, & m_i n^i &= 0, & n_i n^i &= 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Tensoren l_i, m_i, n_i bestimmen *drei invariante Linearformen.* Geht man in die Ebene E, so sind l^i, m^i, n^i die normierten Koordinaten der Punkte l, m, n und l_i, m_i, n_i die normierten Koordinaten der Geraden mn, nl und lm.

Die Formeln für l^i, m^i, n^i und l_i, m_i, n_i seien für die speziellen Parameter, in denen I die Gestalt $2g_{12}du^1du^2$ hat, angeführt:

$$
\begin{aligned}
&l^1 = 0, && m^1 = -\bar{g}_{23}\frac{1}{\sqrt{-\varrho}}, && n^1 = -\bar{g}_{23}\frac{1}{\sqrt{+\varrho}};\\
&l^2 = 0, && m^2 = +\bar{g}_{13}\frac{1}{\sqrt{-\varrho}}, && n^2 = -\bar{g}_{13}\frac{1}{\sqrt{+\varrho}},\\
&l^3 = -\frac{1}{2}g_{12}\frac{1}{\sqrt{\varrho}}, && m^3 = \frac{\bar{g}_{11}\bar{g}_{23}^2-\bar{g}_{22}\bar{g}_{13}^2}{2\bar{g}_{13}\bar{g}_{23}\sqrt{-\varrho}}, && n^3 = \frac{\bar{g}_{11}\bar{g}_{23}^2+\bar{g}_{22}\bar{g}_{13}^2}{2\bar{g}_{13}\bar{g}_{23}\sqrt{+\varrho}};\\
&l_1 = \frac{-\bar{g}_{11}\sqrt{\varrho}}{\bar{g}_{13}g_{12}}, && m_1 = -\frac{1}{2\bar{g}_{23}}\sqrt{-\varrho}, && n_1 = -\frac{1}{2\bar{g}_{23}}\sqrt{\varrho},\\
&l_2 = \frac{-\bar{g}_{22}\sqrt{\varrho}}{\bar{g}_{23}g_{12}}, && m_2 = +\frac{1}{2\bar{g}_{13}}\sqrt{-\varrho}, && n_2 = -\frac{1}{2\bar{g}_{13}}\sqrt{\varrho},\\
&l_3 = -\frac{2}{g_{12}}\sqrt{\varrho}, && m_3 = 0, && n_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Dabei ist

$$\varrho = 2g_{12}\bar{g}_{13}\bar{g}_{23}.$$

Für die Anwendungen im nächsten Paragraphen sind die Überschiebungen der Tensoren l^i, m^i, n^i mit dem dualen Grundtensor $G_{ik} = g_{ik} + \varepsilon\bar{g}_{ik}$ zu berechnen. Man erhält die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&G_{ik}l^il^k = 0, && G_{ik}l^im^k = 0,\\
&G_{ik}m^im^k = 1+\varepsilon\frac{1}{d}, && G_{ik}l^in^k = \varepsilon\frac{1}{2},\\
&G_{ik}n^in^k = 1+\varepsilon\frac{1}{d}, && G_{ik}m^in^k = 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

§ 3.

Invariante Ableitungsgleichungen des Komplexes.

Ist eine invariante Funktion $S(u^1, u^2, u^3)$ der drei Parameter gegeben mit den zu $\bar{g}_{ik}$ gehörenden kovarianten Ableitungen

$$S_i = \frac{\partial S}{\partial u^i}, \qquad S_{ik} = \frac{\partial^2 S}{\partial u^i\,\partial u^k} - \Gamma_{ik.}^{\ l}\frac{\partial S}{\partial u^l}; \tag{1}$$

dann sind

$$S_1 = S_il^i, \qquad S_2 = S_im^i, \qquad S_3 = S_in^i \tag{2}$$

die invarianten Ableitungen von S in bezug auf die drei Linearformen[6])

$$l_i\,du^i, \qquad m_i\,du^i, \qquad n_i\,du^i. \tag{3}$$

Und umgekehrt ist:

$$S_i = l_iS_1 + m_iS_2 + n_iS_3. \tag{4}$$

Für die kovarianten Ableitungen gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$S_{ik} = S_{ki}. \tag{5}$$

---

[6]) Man vergleiche hierzu Blaschke I, Kap. 5.

Zur Aufstellung der entsprechenden Bedingungen für die invarianten Ableitungen bildet man die Gleichungen (4) für die Invarianten S_1, S_2 und S_3. Es wird zum Beispiel:

$$S_{1k} = l_k S_{11} + m_k S_{12} + n_k S_{13}. \tag{6}$$

Die kovariante Ableitung der Gleichung (4) läßt sich dann auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} S_{ik} = \quad & l_{ik} S_1 + l_i l_k S_{11} + l_i m_k S_{12} + l_i n_k S_{13} \\ & + m_{ik} S_2 + m_i l_k S_{21} + m_i m_k S_{22} + m_i n_k S_{23} \\ & + n_{ik} S_3 + n_i l_k S_{31} + n_i m_k S_{32} + n_i n_k S_{33}. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Bedingungen (5) kann man durch die drei Gleichungen ersetzen:

$$\begin{aligned} (l^i m^k - l^k m^i) S_{ik} &= 0, \\ (m^i n^k - m^k n^i) S_{ik} &= 0, \\ (n^i l^k - n^k l^i) S_{ik} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Setzt man hier (7) ein, so erhält man wegen § 2, Gleichung (12) die Integrabilitätsbedingungen der invarianten Ableitungen:

$$\begin{aligned} & S_{12} - S_{21} + (l^i m^k - l^k m^i)(l_{ik} S_1 + m_{ik} S_2 + n_{ik} S_3) = 0, \\ & S_{23} - S_{32} + (m^i n^k - m^k n^i)(l_{ik} S_1 + m_{ik} S_2 + n_{ik} S_3) = 0, \\ & S_{31} - S_{13} + (n^i l^k - n^k l^i)(l_{ik} S_1 + m_{ik} S_2 + n_{ik} S_3) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Koeffizienten von S_1, S_2, S_3 sind neun Differentialinvarianten, die am Ende des Paragraphen noch näher bestimmt werden.

Mit diesen Hilfsmitteln gelangt man jetzt sehr schnell zu einem invarianten Formelapparat der Strahlenkomplexe. Dabei wird in diesem Paragraphen auf geometrische Überlegungen verzichtet. Diese folgen im § 4. Die invarianten Ableitungen des Komplexstrahles $\mathfrak{A}$ sind

$$\mathfrak{A}_1 = l^i \mathfrak{A}_i, \qquad \mathfrak{A}_2 = m^i \mathfrak{A}_i, \qquad \mathfrak{A}_3 = n^i \mathfrak{A}_i. \tag{10}$$

Aus den Formeln § 2, (15) lassen sich die Skalarprodukte der Ableitungsvektoren sofort angeben. Man erhält:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_1 = 0, \qquad \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_2 = 1 + \varepsilon \frac{1}{d}, \qquad \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_3 = 1 + \varepsilon \frac{1}{d}; \\ & \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = 0, \qquad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_3 = \varepsilon \tfrac{1}{2}, \qquad \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Vektoren $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ führen im Gegensatz zu $\mathfrak{A}_1$ sofort zu den beiden Geraden

$$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\sqrt{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_2}} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\sqrt{1 + \varepsilon \frac{1}{d}}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}_3}{\sqrt{\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_3}} = \frac{\mathfrak{A}_3}{\sqrt{1 + \varepsilon \frac{1}{d}}}. \tag{12}$$

Die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ sollen als *Grundvektoren des invarianten begleitenden Dreibeins* dienen. $\mathfrak{H}$ nennen wir die *Hauptnormale* und $\mathfrak{B}$ die

Binormale des Komplexes im Strahl $\mathfrak{A}$. Wegen $\varepsilon^2 = 0$ folgt durch Entwicklung nach ε

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\frac{1}{d}}} = 1-\varepsilon\frac{1}{2d} = 1-\varepsilon k. \tag{13}$$

Also wird *das begleitende Dreibein*

$$\boxed{\mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{H} = (1-\varepsilon k)\,\mathfrak{A}_2, \qquad \mathfrak{B} = (1-\varepsilon k)\,\mathfrak{A}_3} \tag{14}$$

Aus (11) erhält man die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{A} &= \mathfrak{H}\mathfrak{H} = \mathfrak{B}\mathfrak{B} = 1, \\ \mathfrak{A}\mathfrak{H} &= \mathfrak{H}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ bestimmen also drei in einem Punkt sich senkrecht schneidende Geraden; dieser Punkt heißt der *Zentralpunkt*[7]) von $\mathfrak{A}$.

Um die invarianten Ableitungsvektoren des Dreibeins linear aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ zu kombinieren, werden zunächst die Skalarprodukte bestimmt, die sich aus der folgenden Tabelle sofort ablesen lassen:

(16)

	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{H}_1$	$\mathfrak{H}_2$	$\mathfrak{H}_3$	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$	$\mathfrak{B}_3$
$\mathfrak{A}$	0	0	0	0	$-(1+\varepsilon k)$	0	$-\varepsilon\frac{1}{2}$	0	$-(1+\varepsilon k)$
$\mathfrak{H}$	0	$1+\varepsilon k$	0	0	0	0	A	B	C
$\mathfrak{B}$	$\varepsilon\frac{1}{2}$	0	$1+\varepsilon k$	$-A$	$-B$	$-C$	0	0	0

Daraus folgen die *Ableitungsgleichungen*:

(17)

$\mathfrak{A}_1 = \varepsilon\frac{1}{2}\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}_1 = -A\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}_1 = -\varepsilon\frac{1}{2}\mathfrak{A} + A\mathfrak{H}$
$\mathfrak{A}_2 = (1+\varepsilon k)\mathfrak{H}$	$\mathfrak{H}_2 = -(1+\varepsilon k)\mathfrak{A} - B\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}_2 = B\mathfrak{H}$
$\mathfrak{A}_3 = (1+\varepsilon k)\mathfrak{B}$	$\mathfrak{H}_3 = -C\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}_3 = -(1+\varepsilon k)\mathfrak{A} + C\mathfrak{H}$

Nach Gleichung (9) lassen sich die Integrabilitätsbedingungen für die zweiten invarianten Ableitungen des Vektors $\mathfrak{A}$ in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_{12} - \mathfrak{A}_{21} + \lambda\,\mathfrak{A}_1 + \mu\,\mathfrak{A}_2 + \nu\,\mathfrak{A}_3 = 0, \\ &\mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_{32} + \bar{\lambda}\,\mathfrak{A}_1 + \bar{\mu}\,\mathfrak{A}_2 + \bar{\nu}\,\mathfrak{A}_3 = 0, \\ &\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{13} + \hat{\lambda}\,\mathfrak{A}_1 + \hat{\mu}\,\mathfrak{A}_2 + \hat{\nu}\,\mathfrak{A}_3 = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

[7]) Der Name Zentralpunkt wurde unter anderen Überlegungen von Zindler eingeführt (II, S. 160).

Dabei sind $\lambda, \mu, \ldots$ Hilfsgrößen, die nur vorübergehend zur Abkürzung für die neun Koeffizienten der Gleichung (9) eingeführt sind. Aus (17) folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{12} &= \varepsilon \tfrac{1}{2} B \mathfrak{H}, \\
\mathfrak{A}_{21} &= \varepsilon k_1 \mathfrak{H} - (1 + \varepsilon k) A \mathfrak{B}, \\
\mathfrak{A}_{23} &= \varepsilon k_3 \mathfrak{H} - (1 + \varepsilon k) C \mathfrak{B}, \\
\mathfrak{A}_{32} &= \varepsilon k_2 \mathfrak{B} + (1 + \varepsilon k) B \mathfrak{H}, \\
\mathfrak{A}_{31} &= \varepsilon k_1 \mathfrak{B} - \varepsilon \tfrac{1}{2} \mathfrak{A} + (1 + \varepsilon k) A \mathfrak{H}, \\
\mathfrak{A}_{13} &= -\varepsilon \tfrac{1}{2} \mathfrak{A} + \varepsilon \tfrac{1}{2} C \mathfrak{H}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Durch Einsetzen in (18) erhält man drei lineare Gleichungen in den dualen Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$. Da aber $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ voneinander unabhängig sind, müssen die dualen Koeffizienten Null sein[8]). Das führt zu den sechs dualen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \tfrac{1}{2} B - \varepsilon k_1 + \mu (1 + \varepsilon k) &= 0, \\
(1 + \varepsilon k) A + \varepsilon \tfrac{1}{2} \lambda + \nu (1 + \varepsilon k) &= 0, \\
\varepsilon k_3 - (1 + \varepsilon k) B + \bar{\mu} (1 + \varepsilon k) &= 0, \\
(1 + \varepsilon k)(\bar{\nu} - C) - \varepsilon k_2 + \varepsilon \tfrac{1}{2} \bar{\lambda} &= 0, \\
(1 + \varepsilon k)(\hat{\mu} + A) - \varepsilon \tfrac{1}{2} C &= 0, \\
\varepsilon (k_1 + \tfrac{1}{2} \hat{\lambda}) + (1 + \varepsilon k) \hat{\nu} &= 0.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Setzt man jetzt $\lambda = p$, $\nu = q$, $\bar{\lambda} = r$ und beachtet die Bezeichnungen

$$A = a + \varepsilon \bar{a}, \qquad B = b + \varepsilon \bar{b}, \qquad C = c + \varepsilon \bar{c},$$

so erhält man aus (20) durch Trennung von Real- und Dualteil die zwölf Gleichungen:

$$
\begin{array}{llll}
\mu = 0, & b = 2 k_1, & a = -q, & \bar{a} = -\tfrac{1}{2} p, \\
\bar{\mu} = 2 k_1, & \bar{b} = k_3, & \bar{\nu} = c = -p, & \bar{c} = \tfrac{1}{2} r - k_2, \\
\hat{\mu} = q, & c = -p, & \hat{\nu} = 0, & \hat{\lambda} = -2 k_1.
\end{array}
$$

Damit nehmen die Integrabilitätsrelationen (9) der invarianten Ableitungen die endgültige Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
S_{12} - S_{21} + p S_1 + q S_3 &= 0, \\
S_{23} - S_{32} + r S_1 + 2 k_1 S_2 - p S_3 &= 0, \\
S_{31} - S_{13} - 2 k_1 S_1 + q S_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{9 a}
$$

Und die Invarianten A, B, C lassen sich schreiben:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
A &= -q - \varepsilon \tfrac{1}{2} p, \\
B &= 2 k_1 + \varepsilon k_3, \\
C &= -p + \varepsilon (\tfrac{1}{2} r - k_2)
\end{aligned}
}. \tag{21}
$$

[8]) Es genügt dabei, wenn die Realteile $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ drei unabhängige Vektoren sind.

Berechnet man nach (9 a) und (17) die Integrabilitätsbedingungen für die zweiten invarianten Ableitungen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, so ergeben sich nur noch *drei duale Integrabilitätsrelationen*

$$(22)\qquad \boxed{\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 - A_2 - pA - qC + \varepsilon\tfrac{1}{2} &= 0,\\ C_1 - A_3 - 2k_1 A + qB &= 0,\\ B_3 - C_2 + rA + 2k_1 B - pC + (1+\varepsilon 2k) &= 0 \end{aligned}}.$$

Die Gleichungen (17), (21) und (22) vollenden den Formelapparat der Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. Es folgen daraus die beiden grundlegenden Sätze:

Satz 1. *Die vier Größen k, p, q, r bilden zusammen mit ihren invarianten Ableitungen ein vollständiges Invariantensystem des Strahlenkomplexes.*

Zusatz: *Bis zur Umgebung zweiter Ordnung eines Komplexstrahles gibt es sieben Invarianten: k, k_1, k_2, k_3, p, q, r; davon ist k die einzige Invariante erster Ordnung.*

Satz 2. *Ein Strahlenkomplex ist durch die Invariante k und die drei Linearformen vollständig bestimmt.*

§ 4.

Umgebung erster Ordnung eines Strahles.

Die in den letzten beiden Paragraphen bestimmten Differentialformen und die invarianten Ableitungen sind geometrisch zu deuten. Hier sollen zunächst die durch den Komplexstrahl $\mathfrak{A}$ gehenden Regelflächen des Kompexes betrachtet werden, und zwar nur in der Umgebung erster Ordnung des Strahles $\mathfrak{A}$. Längs einer solchen Regelfläche sind die Parameter u^1, u^2, u^3 Funktionen eines Parameters t. Die Umgebung erster Ordnung einer Regelfläche wird bestimmt durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$; dabei ist wegen § 3, Gleichung (4) und (10):

$$(1)\qquad \mathfrak{A}' = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \mathfrak{A}_i \dot{u}^i = l_i \dot{u}^i \mathfrak{A}_1 + m_i \dot{u}^i \mathfrak{A}_2 + n_i \dot{u}^i \mathfrak{A}_3.$$

Setzt man zur Abkürzung für die drei Linearformen

$$(2)\qquad \alpha = l_i \dot{u}^i, \qquad \beta = m_i \dot{u}^i, \qquad \gamma = n_i \dot{u}^i,$$

so wird

$$(3)\qquad \mathfrak{A}' = \alpha \mathfrak{A}_1 + \beta \mathfrak{A}_2 + \gamma \mathfrak{A}_3.$$

Das skalare Quadrat $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$ ist eine duale quadratische Form in α, β, γ, deren Realteil der Form I und deren Dualteil der Form II (§ 1 (5a, b)) proportional ist. Es wird nach § 3 (11)

$$(4)\qquad \mathfrak{A}'\mathfrak{A}' = \beta^2 + \gamma^2 + \varepsilon\{2k(\beta^2+\gamma^2) + \alpha\gamma\}.$$

Wählt man insbesondere als Parameter der Regelfläche die Bogenlänge s ihres sphärischen Bildes, so wird

$$\beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{5}$$

Bezeichnen wir die Ableitungen nach s mit Akzenten, so gilt:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}' = 1 + \varepsilon\{2k + \alpha\gamma\}.$$

Nach der Theorie der Regelflächen[9]) ist die einzige Invariante erster Ordnung einer Regelfläche der *Drall*. Sein reziproker Wert δ ist gleich dem halben Quotienten aus Dualteil und Realteil von $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'$, also nach (4)

$$\delta = \frac{k(\beta^2 + \gamma^2) + \frac{1}{2}\alpha\gamma}{\beta^2 + \gamma^2}. \tag{6}$$

Der duale Vektor

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{A}'}{\sqrt{\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'}} = \frac{\alpha\mathfrak{A}_1 + \beta\mathfrak{A}_2 + \gamma\mathfrak{A}_3}{\sqrt{(\beta^2 + \gamma^2) + \varepsilon\{2k(\beta^2 + \gamma^2) + \alpha\gamma\}}} \tag{7}$$

stellt eine Gerade dar; denn es ist $\mathfrak{N}\mathfrak{N} = 1$. Er bestimmt für Nicht-Torsen die Normale der Regelfläche im Kehlpunkt (*Kehlpunktsnormale*). Für Torsen ist $\mathfrak{N}$ die Hauptnormale der Rückkehrkante, liegt also in der Tangentenebene der Torse. Die Invariante δ verschwindet für Torsen und wird unbestimmt für Zylinder. Daher ist

$$2k(\beta^2 + \gamma^2) + \alpha\gamma = 0 \tag{8}$$

die Gleichung der *Torsen des Komplexes*, und

$$\beta = \gamma = 0 \tag{9}$$

die *Gleichung der Zylinder*.

I. *Die invarianten Ableitungen.* Setzt man $\beta = \gamma = 0$ und $\alpha = 1$, so wird $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1$. Die durch den Tensor l^i bestimmten Regelflächen sind die Zylinder des Komplexes. Die invariante Ableitung mit dem Index 1 bestimmt also die Ableitung längs des durch $\mathfrak{A}$ gehenden Zylinders.

Setzt man in (3) $\alpha = \gamma = 0$ und wählt den Parameter nach (5), also $\beta = 1$, so erhält man die durch den Tensor m^i bestimmte Regelfläche durch $\mathfrak{A}$. Sie soll die durch $\mathfrak{A}$ gehende *Zentralfläche* heißen[10]). Ihr reziproker Drall ist gleich dem Hauptdrall k des Komplexes (Gleichung (6) und § 1 (12)). Ihre Kehlpunktsnormale wird nach (7) und § 3 (12) die Hauptnormale $\mathfrak{H}$ des Komplexstrahles. Ihr Kehlpunkt fällt also in den Zentralpunkt. Die invariante Ableitung mit dem Index 2 ist die Differentiation nach der Bogenlänge des sphärischen Bildes der Zentralfläche.

---

[9]) Blaschke I, § 121.

[10]) Zindler nennt diese Flächen „isotrope Zentralflächen" (II, § 48).

Setzt man schließlich $\alpha = \beta = 0$ und wählt den Parameter nach (5), so erhält man die Regelfläche des Tensors n^i. Sie heiße die *Nebenfläche*[11]). Ihr reziproker Drall ist ebenfalls gleich k und ihre Kehlpunktsnormale ist die Binormale $\mathfrak{B}$ des Komplexstrahles $\mathfrak{A}$, und der Kehlpunkt ist der Zentralpunkt. Die invarianten Ableitungen mit dem Index 3 sind Differentiationen nach der Bogenlänge des sphärischen Bildes der Nebenfläche. Da die durch $\mathfrak{A}$ gehende Zentral- und Nebenfläche im gemeinsamen Kehlpunkt zueinander senkrechte Tangentenebenen haben, und da sie beide den gleichen Drall besitzen, schneiden sie sich längs der ganzen Erzeugenden $\mathfrak{A}$ senkrecht.

II. *Die Formel von Koenigs.* Eine beliebige Regelfläche des Komplexes, die durch $\mathfrak{A}$ geht, kann jetzt auf die Zentralfläche, bzw. die Hauptnormale $\mathfrak{H}$ bezogen werden. Man bildet das Skalarprodukt von $\mathfrak{H}$ mit der Kehlpunktsnormalen $\mathfrak{N}$ (Gleichung 7) der betrachteten Regelfläche. Es wird nach (6), (7) und § 3 (15), (17)

$$(10) \qquad \mathfrak{N}\mathfrak{H} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} \cdot \frac{\beta(1+\varepsilon k)}{\sqrt{1+\varepsilon 2\delta}} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} (1+\varepsilon k)(1-\varepsilon\delta).$$

Nennt man φ den Winkel, unter dem $\mathfrak{N}$ gegen $\mathfrak{H}$ geneigt ist, und $\overline{\varphi}$ den kürzesten Abstand von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H}$, so liefert die letzte Gleichung:

$$\mathfrak{N}\mathfrak{H} = \cos\varphi - \varepsilon\overline{\varphi}\sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}[1+\varepsilon(k-\delta)].$$

Durch Trennung von Real- und Dualteil folgt daraus:

$$(11) \qquad \cos\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$$

und

$$(12) \qquad \boxed{\overline{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \delta - k}.$$

Das ist die *Formel von Koenigs*, die eine vollständige Kennzeichnung der Umgebung erster Ordnung des Komplexstrahles $\mathfrak{A}$ gibt: Kennt man von einer durch $\mathfrak{A}$ gehenden, nicht-abwickelbaren Regelfläche des Komplexes den Abstand $\overline{\varphi}$ ihres Kehlpunktes vom Zentralpunkt und den Winkel φ, unter dem ihre Kehlpunktsnormale $\mathfrak{N}$ gegen die Hauptnormale $\mathfrak{H}$ geneigt ist, so ist ihr Drall $\frac{1}{\delta}$ bestimmt.

Für *die Torsen des Komplexes* wird $\delta = 0$, sonst bleiben die Formeln ungeändert, aber die Bedeutung von $\mathfrak{N}$ ist, wie erwähnt, eine andere. Denn $\mathfrak{N}$ geht durch den Rückkehrpunkt und liegt in der Tangentenebene der Torse. Es wird also $\overline{\varphi}$ der Abstand des Rückkehrpunktes vom

[11]) Nach Zindler „isotrope Nebenfläche" (II, § 48).

Zentralpunkt und φ der Winkel der Tangentenebene der Torse mit der Hauptnormalen $\mathfrak{H}$. Die Gleichung (12) geht für Torsen über in

$$\overline{\varphi}\ \mathrm{tg}\ \varphi = -k. \tag{12a}$$

Insbesondere gehen durch $\mathfrak{A}$ unendlich viele Kegel, die dem Komplex angehören. Jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ ist Spitze eines Kegels. Bewegt sich die Kegelspitze auf $\mathfrak{A}$, so dreht sich die Tangentenebene des Kegels um $\mathfrak{A}$ so, daß stets (12a) erfüllt ist. Ist die Kegelspitze der Zentralpunkt, also $\overline{\varphi} = 0$, so wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Wandert die Spitze ins Unendliche, so geht $\overline{\varphi} \to \infty$ und $\varphi \to 0$, und der Kegel geht in den Zylinder des Komplexes durch $\mathfrak{A}$ über. Daraus folgt eine geometrische Deutung des Zentralpunktes, der Zentralflächen und der Invarianten k:

Liegt die Spitze des Kegels, dessen Erzeugenden dem Komplex angehören, im Zentralpunkt, so steht seine Tangentenebene senkrecht auf der Tangentenebene des Zylinders. Die Hauptnormale steht senkrecht auf der Tangentenebene des Kegels und berührt den Zylinder. Bewegt sich die Spitze des Kegels vom Zentralpunkt fort auf $\mathfrak{A}$ nach irgendeiner Seite um die Einheit, so dreht sich die Tangentenebene des Kegels um einen Winkel ψ, so daß

$$\mathrm{tg}\ \psi = -\frac{1}{k}, \tag{13}$$

d. h. gleich dem reziproken Hauptdrall des Komplexes ist.

Hieraus folgt eine Eigenschaft der Zentralfläche. Die Zentralfläche berührt im Zentralpunkt den Kegel, dessen Spitze der Zentralpunkt ist. Nun hat die Zentralfläche den Drall $\frac{1}{k}$. Die Tangentenebene des Kegels dreht sich nach Gleichung (13), wenn die Spitze auf $\mathfrak{A}$ gleitet. Daher folgt wegen der geometrischen Bedeutung des Dralles: In einem beliebigen Punkt von $\mathfrak{A}$ bildet die Tangentenebene der Zentralfläche mit der Tangentenebene des Komplexkegels, der den Punkt als Spitze hat, einen Winkel, der von der Richtung der Hauptnormalen halbiert wird.

III. *Die drei Linearformen.* Aus der Formel von Koenigs in Verbindung mit Gleichung (11) und (6) läßt sich leicht eine Kennzeichnung der Nullflächen der Linearformen $l_i du^i$ und $m_i du^i$ gewinnen und eine weitere Eigenschaft des Zentralpunktes ableiten: Wir betrachten alle Regelflächen des Komplexes durch $\mathfrak{A}$, die denselben Kehlpunkt haben. Wird der gemeinsame Kehlpunkt durch $\overline{\varphi} = \text{konst}$ festgelegt, so gibt Gleichung (12) die Beziehung zwischen dem Drall und der Richtung der Tangentenebene. Setzt man für $\mathrm{tg}\ \varphi$ und δ nach (11) und (6) die Ausdrücke in α, β, γ ein, so folgt

$$2\overline{\varphi}(\beta^2 + \gamma^2) + \alpha\beta = 0. \tag{14}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist wegen (2) eine quadratische Differentialform, die für $\overline{\varphi} = 0$ in die zwei Linearformen α, β zerfällt. Damit ist der Zentralpunkt von neuem gekennzeichnet. Außerdem ergibt sich:

Die Linearform $l_i du^i$ verschwindet für alle Regelflächen des Komplexes, deren Drall gleich $\frac{1}{k}$ und deren Kehlpunkt der Zentralpunkt ist, und die Linearform $m_i du^i$ für diejenigen Regelflächen, die ebenfalls den Zentralpunkt als Kehlpunkt besitzen und im Zentralpunkt den Zylinder berühren.

Aus Gleichung (11) und (12) folgt sofort: *Die Nullflächen der dritten Linearform $n_i du^i$ sind dadurch gekennzeichnet, daß sie in ihrem Kehlpunkt den Zylinder senkrecht schneiden und den Drall $\frac{1}{k}$ besitzen.*

Aus Gleichung (11) unter Beachtung von (5) erhält man leicht eine *geometrische Deutung der Differentialformen* $m_i du^i$ und $n_i du^i$. Für eine allgemeine, durch $\mathfrak{A}$ gehende Regelfläche des Komplexes ist $m_i du^i$ die Projektion des Bogenelements ds des sphärischen Bildes der Regelfläche auf das sphärische Bild der Zentralfläche und $n_i du^i$ die Projektion auf das sphärische Bild der Nebenfläche.

IV. *Zur Theorie von Sannia.* Wie schon im § 2 erwähnt wurde, entwickelte G. Sannia eine Theorie der Strahlenkomplexe, die auf den Grundformen I und II aufgebaut ist. Der Komplexstrahl wird bei Sannia durch den Richtungsvektor $\mathfrak{a}$, der als Funktion nur zweier Parameter angenommen wird, und einen Vektor $\mathfrak{m}$, der vom Nullpunkt des Koordinatensystems zu einem zunächst willkürlichen Punkt der Komplexgeraden führt, dargestellt. Sannia gibt in speziellen Parametern ein System von Ableitungsgleichungen an und beweist, daß ein Komplex durch die beiden quadratischen Formen bestimmt ist. Die Untersuchung der Umgebung erster Ordnung eines Komplexstrahles führt zum Zentralpunkt, mit dem dann $\mathfrak{m}$ identifiziert wird, und zur Formel von Koenigs. Sannia[12]) geht dabei aus von der Überlegung: Sind zwei der Größen φ, $\overline{\varphi}$, δ einer Regelfläche gegeben, so ist die dritte bestimmt. Drei Klassen von Regelflächen bilden eine Ausnahme:

$$1.\ \delta = k,\ \overline{\varphi} = 0; \qquad 2.\ \overline{\varphi} = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}; \qquad 3.\ \delta = k,\ \varphi = 0,$$

denn hier bleibt jedesmal die dritte Größe unbestimmt. Dies sind aber nach dem letzten Abschnitt die drei Flächenklassen, die durch das Verschwinden der drei Linearformen gekennzeichnet sind. Damit ist die Verbindung mit Sannias Theorie hergestellt.

[12]) Sannia I, S. 205f.

§ 5.

Der Komplex der Hauptnormalen.

Jedem Strahl $\mathfrak{A}$ des Komplexes $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$ ist eine Hauptnormale $\mathfrak{H}$ zugeordnet. Die Gesamtheit der Hauptnormalen bildet wieder einen Komplex, den wir zur Abkürzung den H. K. nennen. In diesem Paragraphen soll die Umgebung erster Ordnung des dem Komplexstrahl $\mathfrak{A}$ zugeordneten Strahles $\mathfrak{H}$ des H. K. untersucht werden. Soweit dabei nur die Gleichungen (17) und (21) des § 3 verwendet werden, sind keine besonderen Verweise angegeben.

Zwei benachbarte Strahlen einer durch $\mathfrak{H}$ gehenden Regelfläche des H. K. werden bestimmt durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$. Das Skalarprodukt $\mathfrak{H}'\mathfrak{H}'$ ist eine duale quadratische Form, deren Real- und Dualteil die quadratischen Grundformen I_h und II_h des H. K. sind. Analog wie im vorigen Paragraphen wird

$$\begin{aligned}(1)\qquad \mathfrak{H}' &= \alpha\,\mathfrak{H}_1 + \beta\,\mathfrak{H}_2 + \gamma\,\mathfrak{H}_3\\ &= -\alpha A\,\mathfrak{B} - \beta[(1+\varepsilon k)\,\mathfrak{A} + B\,\mathfrak{B}] - \gamma C\,\mathfrak{B}\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}(2)\qquad \mathfrak{H}'\mathfrak{H}' = {}&\alpha^2 A^2 + \beta^2(1+\varepsilon 2k + B^2) + \gamma^2 C^2 + 2\alpha\beta A B\\ &+ 2\alpha\gamma A C + 2\beta\gamma B C.\end{aligned}$$

Daraus erhält man durch Trennung von Real- und Dualteil:

$$\mathrm{I}_h \qquad \alpha^2 a^2 + \beta^2(1+b^2) + \gamma^2 c^2 + 2\alpha\beta a b + 2\alpha\gamma a c + 2\beta\gamma b c,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_h \qquad &\alpha^2 2a\bar{a} + \beta^2(2k + 2b\bar{b}) + \gamma^2 2c\bar{c} + 2\alpha\beta(a\bar{b} + \bar{a}b)\\ &+ 2\alpha\gamma(a\bar{c} + \bar{a}c) + 2\beta\gamma(b\bar{c} + \bar{b}c).\end{aligned}$$

Die Determinante der ersten Form verschwindet, daher besitzen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}a^2\alpha + ab\beta + ac\gamma &= 0,\\ ab\alpha + (1+b^2)\beta + bc\gamma &= 0,\\ ac\alpha + bc\beta + c^2\gamma &= 0\end{aligned}$$

die gemeinsame Lösung

$$(3)\qquad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = c : 0 : -a = -p : 0 : q.$$

Durch α_1, β_1, γ_1 werden die Zylinder des H. K. bestimmt. Auf Grund der Ergebnisse des vorigen Paragraphen, insbesondere der Gleichung (6), erhält man die folgende Beziehung:

Satz 3. *Durchläuft die Gerade $\mathfrak{H}$ einen Zylinder des* H. K., *so bewegt sich der zugeordnete Strahl $\mathfrak{A}$ auf einer Regelfläche, deren Kehlpunkt in den Zentralpunkt von $\mathfrak{A}$ fällt, deren reziproker Drall $\delta = k - \frac{1}{2}\frac{p}{q}$ ist, und die im Kehlpunkt den durch $\mathfrak{A}$ gehenden Zylinder berührt.*

Durchläuft dagegen $\mathfrak{A}$ einen Zylinder des Komplexes $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$, so erzeugt der zugeordnete Strahl $\mathfrak{H}$ eine Regelfläche, deren Kehlpunkt der

Zentralpunkt von $\mathfrak{A}$, *deren reziproker Drall* $\delta = \frac{1}{2}\frac{p}{q}$ *ist, und die im Kehlpunkt den Zylinder des Komplexes* $\mathfrak{A}$ *berührt.*

Zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes hat man bloß nach § 3 (17) und (21) $\mathfrak{H}_1\,\mathfrak{H}_1$ und $\frac{\mathfrak{H}_1}{\sqrt{\mathfrak{H}_1\,\mathfrak{H}_1}} = \mathfrak{B}$ zu berechnen. Den Fall $p = q = 0$, in dem das sphärische Bild von $\mathfrak{H}$ in eine Kurve entartet, schließen wir aus.

Zur Berechnung des Hauptdralles k_h des H. K. bilden wir aus I_h und II_h das Formenbüschel und bestimmen den Wert d des Büschelparameters, für den die Determinante verschwindet:

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a^2 - d\,2\,a\,\bar{a}, & a\,b - d\,(a\,\bar{b} + \bar{a}\,b), & a\,c - d\,(a\,\bar{c} + \bar{a}\,c) \\ a\,b - d\,(a\,\bar{b} + \bar{a}\,b), & (1 + b^2) - d\,(2\,k + 2\,b\,\bar{b}), & b\,c - d\,(b\,\bar{c} + \bar{b}\,c) \\ a\,c - d\,(a\,\bar{c} + \bar{a}\,c), & b\,c - d\,(b\,\bar{c} + \bar{b}\,c), & c^2 - d\,2\,c\,\bar{c} \end{vmatrix} = 0.$$

Berechnet man die Determinante, so läßt sich der Faktor $(a\,\bar{c} - \bar{a}\,c)^2$ herausheben. Man erhält also nur dann einen bestimmten Wert für d, wenn

$$(5)\qquad a\,\bar{c} - \bar{a}\,c = \tfrac{1}{2}\,(p^2 + 2\,q\,\bar{c}) \neq 0.$$

Unter dieser Voraussetzung folgt

$$(6)\qquad \boxed{k_h = \frac{1}{2\,d} = k}\,.$$

Es gilt also der merkwürdige

Satz 4. *Wenn der Hauptnormalenkomplex nicht entartet, so ist in zugeordneten Strahlen der Hauptdrall des Hauptnormalenkomplexes* $\mathfrak{H}(u^1, u^2, u^3)$ *stets gleich dem Hauptdrall des Komplexes* $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$. *Ein Komplex und sein Hauptnormalenkomplex besitzen in entsprechenden Strahlen den gleichen Hauptdrall.*

Wegen (4) und (6) besitzen die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(2\,k\,a^2 - 2\,a\,\bar{a})\,\alpha + (2\,k\,a\,b - a\,b - \bar{a}\,b)\,\beta + (2\,k\,a\,c - \bar{a}\,c - a\,\bar{c})\,\gamma = 0, \\ &(2\,k\,a\,b - a\,\bar{b} - \bar{a}\,b)\,\alpha + (2\,k\,b^2 - 2\,b\,\bar{b})\,\beta + (2\,k\,b\,c - b\,\bar{c} - \bar{b}\,c)\,\gamma = 0, \\ &(2\,k\,a\,c - a\,\bar{c} - \bar{a}\,c)\,\alpha + (2\,k\,b\,c - b\,\bar{c} - \bar{b}\,c)\,\beta + (2\,k\,c^2 - 2\,c\,\bar{c})\,\gamma = 0 \end{aligned}$$

eine gemeinsame Lösung. Man erhält

$$(7)\qquad \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = (\bar{b}\,c - b\,\bar{c}) : (a\,\bar{c} - \bar{a}\,c) : (\bar{a}\,b - a\,\bar{b}).$$

Dadurch sind die Zentralflächen des H. K. bestimmt. Die Kehlpunktnormale dieser Fläche ist die Hauptnormale $\mathfrak{H}_h$ des H. K. Setzt man in (1) $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ für α, β, γ ein, so folgt

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}' &= (\bar{b}c - b\bar{c})\,\mathfrak{H}_1 + (a\bar{c} - \bar{a}c)\,\mathfrak{H}_2 + (\bar{a}b - a\bar{b})\,\mathfrak{H}_3 \\ &= (1 + \varepsilon k)(\bar{a}c - a\bar{c})\,\mathfrak{A} - [(\bar{b}c - b\bar{c})\,A + (a\bar{c} - \bar{a}c)\,B + (\bar{a}b - a\bar{b})\,C]\,\mathfrak{H} \\ &= -(1 + \varepsilon k)(a\bar{c} - \bar{a}c)\,\mathfrak{A},\end{aligned}$$

und es wird, wenn man die Wurzel positiv nimmt,

$$\mathfrak{H}_h = \frac{\mathfrak{H}'}{\sqrt{\mathfrak{H}'\,\mathfrak{H}'}} = -\mathfrak{A}. \tag{8}$$

Es gilt also der

Satz 5. *Der Komplex $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$ und sein Hauptnormalenkomplex $\mathfrak{H}(u^1, u^2, u^3)$ befinden sich in involutorischer Lage: Der eine Komplex ist der Hauptnormalenkomplex des anderen. Die durch zwei zugeordnete Strahlen gehenden Zylinder der beiden Komplexe berühren sich im gemeinsamen Zentralpunkt.*

Der zweite Teil von Satz 5 ist eine Folge von Satz 3. Durch die Sätze 4 und 5 ist aber nach der Formel von Koenigs die Umgebung erster Ordnung des Hauptnormalenkomplexes vollständig bestimmt.

§ 6.

Das Verschwinden einer Invarianten.

In diesem Paragraphen sollen einige kennzeichnende geometrische Eigenschaften derjenigen Strahlenkomplexe angegeben werden, in denen *eine* der Invarianten p, q, r verschwindet. Ferner wird gezeigt, daß die dualen Invarianten B und C des Komplexes die Invarianten II. Ordnung der Zentral- und Nebenfläche sind.

I. Es sei überall im Komplex $q = 0$.

Dann folgt aus der Gleichung (3) § 5 und Gleichung (17), (21) § 3, oder aus Satz 3, daß

$$\mathfrak{H}_1\,\mathfrak{H}_1 = 0.$$

Bewegt sich also der Strahl $\mathfrak{A}$ auf dem durch $\mathfrak{A}$ gehenden Zylinder, so beschreibt $\mathfrak{H}$ auch einen Zylinder. Beachtet man, daß $\mathfrak{H}$ stets den entsprechenden Zylinder des Komplexes $\mathfrak{A}$ berührt und zu den Strahlen $\mathfrak{A}$ senkrecht ist, so folgt daraus der

Satz 6. *Ist in einem Komplex $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$ die Invariante $q \equiv 0$, so sind die Zylinder des Komplexes Ebenen; d. h. jeder Zylinder ist ein Büschel paralleler Geraden. Die Zylinder des Normalenkomplexes $\mathfrak{H}(u^1, u^2, u^3)$ arten auch in Ebenen aus, und zwar so, daß die Ebenen entsprechender Zylinder der beiden Komplexe zusammenfallen.*

Aus der Tatsache, daß die Binormale $\mathfrak{B}$ auf den entsprechenden Zylindern der beiden Komplexe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{H}$ senkrecht steht, folgt: Beschreibt $\mathfrak{A}$ einen Zylinder (also hier eine Ebene), so erzeugt auch $\mathfrak{B}$ einen Zylinder.

Das Verschwinden der Invarianten q hat noch eine wichtige analytische Bedeutung: Die Linearformen

$$l_i\,du^i, \qquad m_i\,du^i, \qquad n_i\,du^i$$

sind im allgemeinen nicht vollständig integrabel. Wir beweisen den

Satz 7. *Dann und nur dann, wenn $q \equiv 0$, ist jede der beiden linearen Differentialformen*

$$m_i\,du^i \quad \text{und} \quad n_i\,du^i$$

vollständig integrabel, also proportional zu einem totalen Differential.

Die Integrabilitätsbedingungen der beiden Pfaffschen Gleichungen lauten bekanntlich

$$(1) \qquad m_1\left(\frac{\partial m_2}{\partial u^3} - \frac{\partial m_3}{\partial u^2}\right) + m_2\left(\frac{\partial m_3}{\partial u^1} - \frac{\partial m_1}{\partial u^3}\right) + m_3\left(\frac{\partial m_1}{\partial u^2} - \frac{\partial m_2}{\partial u^1}\right) = 0$$

und

$$(2) \qquad n_1\left(\frac{\partial n_2}{\partial u^3} - \frac{\partial n_3}{\partial u^2}\right) + n_2\left(\frac{\partial n_3}{\partial u^1} - \frac{\partial n_1}{\partial u^3}\right) + n_3\left(\frac{\partial n_1}{\partial u^2} - \frac{\partial n_2}{\partial u^1}\right) = 0.$$

Führt man hier nach § 2, Gleichung (12) die kontravarianten Komponenten m^i und n^i ein, und beachtet man, daß wegen $\Gamma_{ik.}^{\ \ l} = \Gamma_{ki.}^{\ \ l}$ stets gilt:

$$(n^i l^k - n^k l^i)\,\Gamma_{ik.}^{\ \ l} = 0 \quad \text{usw.},$$

so kann man statt (1) und (2) schreiben:

$$(1a, 2a) \qquad (n^i l^k - n^k l^i)\,m_{i,k} = 0, \quad (l^i m^k - l^k m^i)\,n_{i,k} = 0.$$

Dabei sind $m_{i,k}$ und $n_{i,k}$ die kovarianten Ableitungen von m_i und n_i bezüglich $\bar{\gamma}_{ik}$ (§ 1, Gleichung (5b)). Nach § 3, Gleichung (9) und (9a) ist aber:

$$(n^i l^k - n^k l^i)\,m_{i,k} = q,$$
$$(l^i m^k - l^k m^i)\,n_{i,k} = q.$$

Und damit ist der Satz 7 bewiesen.

Aus Satz 7 folgt, daß der Komplex $\mathfrak{A}$ für $q \equiv 0$ in zwei Scharen von Strahlensystemen zerfällt. Für die Systeme der einen Schar ist $m_i\,du^i = 0$, für die der anderen $n_i\,du^i = 0$. Betrachten wir zunächst das durch $\mathfrak{A}$ gehende System $m_i\,du^i = 0$. Für dieses ist nach § 4, Gleichung (2) $\beta = 0$. Es enthält also den durch $\mathfrak{A}$ gehenden Zylinder (§ 4, Gleichung (9)). Nach § 4, Gleichung (11) ist für $\beta = 0$ stets $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dann folgt aber aus der zweiten Form der Formel von Koenigs (§ 4, Gleichung (12a)): Die zweite Schar der Torsen des Strahlensystems schneidet die Zylinder senkrecht, und die im Endlichen gelegene Brennfläche des Systems wird vom Zentralpunkt des Komplexes beschrieben.

Das durch $\mathfrak{A}$ gehende Strahlensystem $n_i\,du^i = \gamma = 0$ ist ebenfalls zylindrisch. Die Differentialgleichung seiner Torsen lautet nach § 4, Gleichung (8): $\beta^2 = 0$. Das System ist also parabolisch und besitzt die

Zylinder als einzige Torsenschar. Beachtet man Satz 6, so lassen sich die Ergebnisse zusammenfassen in dem

Satz 8. *Ist $q \equiv 0$, so zerfällt der Komplex in zwei Scharen von Strahlensystemen. Jedes System der einen Schar besteht aus denjenigen Tangenten einer Torse, die die Erzeugenden der Torse senkrecht schneiden. Die Torse ist dann der Ort der Zentralpunkte des Komplexes. Jedes System der zweiten Schar ist parabolisch-zylindrisch, derart, daß die Zylinder zu Ebenen entartet sind.*

II. Es sei $p \equiv 0$, aber $q \neq 0$.

Aus dem Satz 3 des vorigen Paragraphen folgt für $p = 0$, daß dem durch $\mathfrak{A}$ gehenden Zylinder des Komplexes $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$ eine Torse des Hauptnormalenkomplexes entspricht. Da aber die Hauptnormalen die entsprechenden Erzeugenden des Zylinders senkrecht schneiden und in der Tangentenebene des Zylinders liegen, so folgt daraus der

Satz 9. *Durchläuft der Strahl $\mathfrak{A}$ einen Zylinder des Komplexes, in dem $p \equiv 0$, so umhüllen die Hauptnormalen $\mathfrak{H}$ einen Normalschnitt des Zylinders.*

Man kann den Satz auch folgendermaßen formulieren: Durchläuft $\mathfrak{A}$ einen Zylinder, so beschreibt der Zentralpunkt von $\mathfrak{A}$ einen Normalschnitt des Zylinders.

III. Es sei $r \equiv 0$.

Die Komplexe, in denen $r \equiv 0$, werden gekennzeichnet durch den

Satz 10. *Ist in einem Komplex $r \equiv 0$, so ist die Linearform*

$$l_i\, du^i$$

total integrabel, und der Komplex zerfällt in ∞^1 isotrope Strahlensysteme.

Die Integrabilitätsbedingung der Form $l_i\, du^i$ läßt sich in derselben Weise wie die Gleichung (1) und (2) in der Gestalt schreiben

$$(m^i n^k - m^k n^i)\, l_{i,k} = r = 0.$$

Es folgt daraus, daß der Komplex für $r \equiv 0$ in eine Schar von Strahlensystemen zerfällt. Nach § 4, Abschnitt III besitzen alle durch $\mathfrak{A}$ gehenden Regelflächen des Komplexes, für die $l_i\, du^i = \alpha = 0$, denselben Kehlpunkt und denselben Drall. Das durch $\mathfrak{A}$ gehende Strahlensystem der Schar $l_i\, du^i = 0$ ist also isotrop.

Man sieht auch leicht ein, daß ein Komplex *nur* dann in eine Schar isotroper (nicht-zylindrischer) Strahlensysteme zerfällt, wenn $r \equiv 0$. Ein durch $\mathfrak{A}$ gehendes isotropes System besitzt ∞^1 Regelflächen durch $\mathfrak{A}$ mit gemeinsamem Kehlpunkt und Drall. Solche Regelflächen gibt es aber nach der Formel von Koenigs nur für $\overline{\varphi} = 0$; $\delta = k$. Denn der Fall $\overline{\varphi} = \delta = \infty$ scheidet aus. Und diese Regelflächen gehören nur für $r = 0$ einem Strahlensystem an.

IV. Deutung der Invarianten B und C.

Die Differentialinvarianten einer beliebigen, nicht-zylindrischen Regelfläche $\mathfrak{A}(s)$, die auf die Bogenlänge s des sphärischen Bildes als Parameter bezogen ist, werden bestimmt durch die beiden dualen Größen

$$D = 1 + \varepsilon\,\delta = \sqrt{\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}'} \quad \text{und} \quad J = \frac{|\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}''|}{\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}'}$$

dabei ist δ der reziproke Drall (§ 4 (6)) und $J = j + \varepsilon\bar{j}$ die duale Invariante II. Ordnung der Regelfläche[13]). Betrachtet man jetzt die durch den Komplexstrahl $\mathfrak{A}$ gehende Zentralfläche und berechnet ihre duale Invariante J_z nach § 3 (17), so wird:

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_2 = (1 + \varepsilon\,k)\,\mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}_{22} = \varepsilon\,k_2\,\mathfrak{H} + (1 + \varepsilon\,k)\,\{-(1 + \varepsilon\,k)\,\mathfrak{A} - B\,\mathfrak{B}\};$$

daraus folgt

$$|\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{A}''| = -(1 + \varepsilon\,k)^2\,B.$$

Für die *duale Invariante II. Ordnung der Zentralfläche* erhält man daher

$$J_z = -B.$$

Ebenso folgt aus den Ableitungen $\mathfrak{A}_3, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{H}_3$, daß für die duale Invariante II. Ordnung der *Nebenfläche* gilt

$$J_n = +C.$$

Damit sind die Invarianten B und C des Komplexes gedeutet als Invarianten der Regelflächen.

§ 7.

Ableitungsgleichungen des Zentralpunktes.

In diesem Paragraphen sollen die Formeln des § 3 durch die invarianten Ableitungsgleichungen des Zentralpunktes ergänzt werden. Man gelangt dadurch zu einer geometrischen Deutung der Invarianten p und zu einer ausgezeichneten Klasse von Torsen, welche durch den Hilfstensor r^i bestimmt werden, der im § 3 zur Normierung des Tensors l^i herangezogen wurde.

Es sei $\mathfrak{x}$ der Vektor, der vom Koordinatenanfangspunkt zum Zentralpunkt führt. $\mathfrak{x}$ genügt den drei Gleichungen[14])

$$(1) \qquad \mathfrak{x}\times\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}, \quad \mathfrak{x}\times\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}}, \quad \mathfrak{x}\times\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{b}}.$$

Die invarianten Ableitungen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ lassen sich als Linearkombinationen der drei Einheitsvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}$ darstellen. Beachtet man die drei Gleichungen

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{h} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{h}\times\mathfrak{b} = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{b}\times\mathfrak{a} = \mathfrak{h}.$$

---

[13]) Blaschke I, S. 269.

[14]) Vgl. etwa: Blaschke I, § 120.

so erhält man durch invariante Ableitung von (1) mittels § 3 (17)

$$(2)\qquad \boxed{\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= -\bar{a}\,\mathfrak{a} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{b}, \\ \mathfrak{x}_2 &= -\bar{b}\,\mathfrak{a} + k\,\mathfrak{b}, \\ \mathfrak{x}_3 &= -\bar{c}\,\mathfrak{a} - k\,\mathfrak{b} \end{aligned}}.$$

Die Determinante der drei Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ ist:

$$(3)\qquad |\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3| = -\tfrac{1}{2}k(2k\bar{a} - \bar{c}).$$

Durchläuft der Strahl $\mathfrak{A}$ den Komplex, so erfüllt die Gesamtheit der Zentralpunkte eine dreidimendionale Mannigfaltigkeit, wenn

$$(4)\qquad 2k\bar{a} - \bar{c} \neq 0.$$

Durchläuft $\mathfrak{A}$ eine Regelfläche, so beschreibt $\mathfrak{x}$ eine Kurve. Bewegt sich insbesondere $\mathfrak{A}$ auf dem Zylinder, so schließt die Tangente der entsprechenden Kurve $\mathfrak{x}$ nach (2) mit der Hauptnormalen $\mathfrak{H}$ den Winkel ϑ ein, der der Gleichung genügt:

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\vartheta = -p.$$

Damit ist eine *Deutung der Invarianten* p gewonnen.

Wir fragen nach derjenigen Fortschreitungsrichtung von dem Komplexstrahl $\mathfrak{A}$ aus, für welche die Kurve $\mathfrak{x}$ vom Strahl $\mathfrak{A}$ berührt wird. Die Strahlen $\mathfrak{A}$ erzeugen dabei eine Torse, deren Rückkehrkante der Ort der Zentralpunkte $\mathfrak{x}$ der erzeugenden Strahlen ist. Soll die Kurve $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{A}$ berührt werden, so muß gelten

$$(6)\qquad \dot{\mathfrak{x}} = \alpha\,\mathfrak{x}_1 + \beta\,\mathfrak{x}_2 + \gamma\,\mathfrak{x}_3 = \lambda\,\mathfrak{a},$$

wo λ ein Proportionalitätsfaktor ist. Nach Gleichung (2) erhält man für α, β, γ die Gleichungen

$$7)\qquad \alpha + 2k\gamma = 0, \quad \beta = 0.$$

Ein Vergleich mit § 4 (8) zeigt, daß dadurch tatsächlich eine Torse des Komplexes bestimmt ist, die den Zylinder des Komplexes senkrecht schneidet. Setzt man

$$(7\,a)\qquad \alpha = 2k, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -1,$$

so bestimmen α, β, γ die Ableitung nach der Bogenlänge des sphärischen Bildes der Torse. Man erhält

$$(8)\qquad \mathfrak{A}' = 2k\,\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3.$$

Ein Rückblick auf die Paragraphen 2 und 3 zeigt den Zusammenhang der Gleichung (7 a) mit dem in § 2 (9), (11) herangezogenen Hilfstensor r^i. Nach § 3 (10) ist $\mathfrak{A}_1 = l^i\,\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_3 = n^i\,\mathfrak{A}_i$. Daher kann man $\mathfrak{A}'$ schreiben

$$\mathfrak{A}' = (2k\,l^i - n^i)\,\mathfrak{A}_i = r^i\,\mathfrak{A}_i.$$

Der Hilfstensor r^i bestimmt also die Torse (8).

Die Rückkehrkanten der Torsen des Komplexes bezeichnet man allgemein als *Komplexkurven*. Die durch (6) und (7a) bestimmten Komplexkurven sind dadurch ausgezeichnet, daß sie zugleich der Ort der Zentralpunkte der erzeugenden Komplexstrahlen sind. Sie sollen die *Zentralkurven des Komplexes* heißen. Wir betrachten die Umgebung des Punktes $\mathfrak{x}$ der Zentralkurve. Das Bogenelement der Kurve wird bestimmt durch

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{x}' = (2k\bar{a} - \bar{c})^2. \tag{9}$$

Die Binormale der Zentralkurve ist die Hauptnormale $\mathfrak{H}$ des Komplexstrahles $\mathfrak{A}$. Die Normalen $\mathfrak{H}$ beschreiben längs der Kurve eine Regelfläche, für die nach (7a) gilt:

$$\mathfrak{H}' = (-2kA + C)\mathfrak{B}$$

und

$$\mathfrak{H}'\mathfrak{H}' = [-2k(a + \varepsilon\bar{a}) + (c + \varepsilon\bar{c})]^2. \tag{10}$$

Ihr reziproker Drall δ läßt sich auf die Form bringen

$$\delta = \frac{2k\bar{a} - \bar{c}}{2ka - c}. \tag{11}$$

Aus (9) und (10) folgt durch einfache Überlegung[15]) für die *Krümmung der Zentralkurve*

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{-1}{2k\bar{a} - \bar{c}} \tag{12}$$

und die *Torsion der Zentralkurve*

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2ka - c}{2k\bar{a} - \bar{c}}. \tag{13}$$

Ein Vergleich der Gleichungen (3) und (9) liefert den

Satz 11. *Liegt die Gesamtheit der Zentralpunkte eines Komplexes auf einer Fläche, so zieht sich jede Zentralkurve in einen Punkt der Fläche zusammen.*

---

[15]) Vgl. etwa: Blaschke I, § 121.

(Eingegangen am 9. Mai 1935.)

Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen.

Von

Helmut Wielandt in Berlin.

In einer Arbeit mit dem gleichen Titel[1]) hat Herr Schur folgenden Satz bewiesen:

Enthält eine Permutationsgruppe, deren Grad n keine Primzahl ist, einen Zyklus der Ordnung n, so ist sie entweder zweifach transitiv oder imprimitiv.

Der von Herrn Schur angegebene Beweis ist recht schwierig. Die von ihm entwickelten Hilfsmittel reichen jedoch, wie ich im folgenden zeigen möchte, dazu aus, einen kurzen Beweis zu führen. Es ergibt sich dabei folgende allgemeinere Fassung:

Enthält eine Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$, deren Grad n keine Primzahl ist, eine reguläre Abelsche Untergruppe $\mathfrak{H}$ des Grades n, von deren Sylowgruppen wenigstens eine zyklisch ist, so ist $\mathfrak{G}$ entweder zweifach transitiv oder imprimitiv.

Die aus der genannten Arbeit heranzuziehenden Hilfsmittel stelle ich ohne Beweise im ersten Abschnitt zusammen.

1.

$\mathfrak{G}$ sei eine transitive Permutationsgruppe des Grades n in den Symbolen $1, 2, \ldots, n$, welche eine reguläre (nicht notwendig Abelsche) Untergruppe $\mathfrak{H}$ des Grades n enthält. Wir bezeichnen die Untergruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, welche das Symbol 1 ungeändert lassen, mit $\mathfrak{G}_1$. Jede rechtsseitige Nebengruppe nach $\mathfrak{G}_1$ läßt sich mit einem eindeutig bestimmten Element H aus $\mathfrak{H}$ in der Form $\mathfrak{G}_1 H$ schreiben. Wir führen an Stelle von $1, 2, \ldots, n$ die Nebengruppen $\mathfrak{G}_1 H$ als Vertauschungssymbole ein, indem wir, wie üblich, die Ziffer ν durch diejenige Nebengruppe ersetzen, deren Elemente 1 in ν überführen. Bezeichnen wir die in diesen Symbolen geschriebene Gruppe mit $\overline{\mathfrak{G}}$, so entspricht dem Element G nach Einführung der neuen Symbole die Permutation

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 H \\ \mathfrak{G}_1 H G \end{pmatrix}.$$

[1]) I. Schur, Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen; Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1933, S. 598—623.

Im Hinblick auf die Frage nach der zweifachen Transitivität von $\mathfrak{G}$ betrachten wir die Transitivitätssysteme von $\mathfrak{G}_1$. Die Ziffern $1, 2, \ldots, n$ mögen bei $\mathfrak{G}_1$ in die r Transitivitätssysteme $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_r$ zerfallen; $\mathfrak{T}_\varrho$ enthalte n_ϱ Ziffern. Nehmen wir als Vertauschungssymbole die Nebengruppen nach $\mathfrak{G}_1$, so entspricht jedem Transitivitätssystem $\mathfrak{T}_\varrho$ eine Gesamtheit von n_ϱ Nebengruppen, etwa $\mathfrak{G}_1 H_1^{(\varrho)}, \ldots, \mathfrak{G}_1 H_{n_\varrho}^{(\varrho)}$. Dann werden die r Komplexe

$$\mathfrak{K}_\varrho = H_1^{(\varrho)} + H_2^{(\varrho)} + \ldots + H_{n_\varrho}^{(\varrho)}$$

als die *primären Komplexe* bezeichnet[2]). Die primären Komplexe sind also gewisse paarweise elementfremde Komplexe von Elementen aus $\mathfrak{H}$. Eine Summe von primären Komplexen heißt *Hauptkomplex*. Eine Summe von Hauptkomplexen (im Sinne des Frobeniusschen Komplexkalküls) ist wieder ein Hauptkomplex. Ein spezieller primärer Komplex ist das Einheitselement E; er entspricht dem Transitivitätssystem von $\mathfrak{G}_1$, das nur die Ziffer 1 enthält.

Kennt man die Hauptkomplexe und insbesondere die primären Komplexe, so kann man entscheiden, ob $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv ist:

(1) Dann und nur dann ist $\mathfrak{G}$ zweifach transitiv, wenn die Anzahl r der primären Komplexe gleich zwei ist.

Man kann aber auch entscheiden, ob $\mathfrak{G}$ imprimitiv ist; bezeichnen wir nämlich einen Hauptkomplex als *singulär*, wenn die von seinen Elementen erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{H}$ weder E noch $\mathfrak{H}$ ist, so gilt[3]):

(2) Dann und nur dann ist $\mathfrak{G}$ imprimitiv, wenn mindestens ein Hauptkomplex singulär ist.

Der Beweis für diesen Satz beruht darauf, daß die Hauptkomplexe in einem gewissen Sinn einen Ring bilden. Genauer formuliert: Wir betrachten neben den *Komplexen*, die aus den Elementen von $\mathfrak{H}$ gebildet werden können, noch den zu $\mathfrak{H}$ gehörigen *Gruppenring* H, die Gesamtheit der Linearverbindungen

$$\eta = a_1 H_1 + a_2 H_2 + \ldots + a_n H_n$$

mit ganzen rationalen a_ν. Beim Rechnen in H ist, im Gegensatz zum Frobeniusschen Komplexkalkül, auf die Vielfachheit der einzelnen Elemente zu achten. Dem primären Komplex $\mathfrak{K}_\varrho$ ordnen wir in H die *primäre Größe*

$$\varkappa_\varrho = H_1^{(\varrho)} + H_2^{(\varrho)} + \ldots + H_{n_\varrho}^{(\varrho)}$$

---

[2]) Herr Schur definiert die primären Komplexe auf Grund matrizentheoretischer Betrachtungen; die Äquivalenz mit der hier gegebenen Definition zeigt sich a. a. O. auf S. 603.

[3]) A. a. O., S. 604.

zu. Entsprechend den Hauptkomplexen bilden wir die Gesamtheit Λ der Linearverbindungen

$$\lambda = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_r x_r$$

mit ganzen rationalen b_ϱ. Dann gilt[4]):

(3) Λ ist ein Ring.

Dieser Satz ist das wichtigste Hilfsmittel. Die Kenntnis einer in Λ gelegenen Größe führt nämlich immer zur Aufstellung von Hauptkomplexen, wie aus dem unmittelbar aus der Definition von Λ folgenden Satz ersichtlich ist:

(4) Ist λ eine Größe aus Λ, c eine ganze rationale Zahl, so bilden diejenigen Elemente von $\mathfrak{H}$, die in λ mit dem Koeffizienten c auftreten, entweder den leeren Komplex oder einen Hauptkomplex.

Für den Fall, daß die reguläre Untergruppe $\mathfrak{H}$ Abelsch ist, gilt ferner das folgende notwendige Kriterium für Primitivität[5]):

(5) Sei $\mathfrak{G}$ primitiv, $\mathfrak{H}$ Abelsch, $\mathfrak{K}$ ein primärer Komplex. Ist dann R ein beliebiges von E verschiedenes Element aus $\mathfrak{H}$ und p eine in dem Grad n aufgehende Primzahl, so ist die Anzahl derjenigen Elemente von $\mathfrak{K}$, welche der Gleichung $K^p = R$ genügen, durch p teilbar.

2.

Die Vereinfachung, die gegenüber dem Beweis von Herrn Schur erzielt wird, beruht auf der Verwendung des folgenden Kriteriums für Imprimitivität:

(6) Existiert ein Hauptkomplex $\mathfrak{K}$, der aus vollen Linksnebengruppen nach einer Untergruppe $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$ besteht, und ist $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}' \neq E$, so ist $\mathfrak{G}$ imprimitiv.

Dieses Kriterium ist als Verschärfung eines von Herrn Schur angegebenen Kriteriums anzusehen, wonach $\mathfrak{G}$ imprimitiv ist, wenn ein Hauptkomplex $\mathfrak{K}$ gleich einer von E und $\mathfrak{H}$ verschiedenen Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist.

Der Beweis von (6) ist so zu führen: Daß $\mathfrak{K}$ ein Hauptkomplex ist, bedeutet, daß die in $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{K}$ auftretenden Rechtsnebengruppen nach $\mathfrak{G}_1$ sich nur untereinander vertauschen, wenn man sie von rechts mit einem Element aus $\mathfrak{G}_1$ multipliziert; der Komplex $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{K}$ bleibt also ungeändert bei rechtsseitiger Multiplikation mit den Elementen von $\mathfrak{G}_1$. Er gestattet aber auch Rechtsmultiplikation mit den Elementen von $\mathfrak{H}'$, also auch mit den Elementen der von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}'$ erzeugten Gruppe $\{\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}'\}$. Nun ist $\mathfrak{H}'$ nicht in $\mathfrak{G}_1$ enthalten, da $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}_1$ nur E gemeinsam haben, also ist $\{\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}'\}$ größer als $\mathfrak{G}_1$; andererseits ist $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ verschieden, also ist

[4]) A. a. O., S. 603.
[5]) A. a. O., S. 607.

$\{\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}'\}$ nicht gleich $\mathfrak{G}$. Aus der Existenz einer Gruppe zwischen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}$ folgt aber bekanntlich die Imprimitivität von $\mathfrak{G}$.

Wir führen jetzt den Beweis des in der Einleitung genannten Satzes, indem wir die Unverträglichkeit der folgenden vier Voraussetzungen zeigen:

α) $\mathfrak{G}$ ist primitiv,

β) $\mathfrak{G}$ ist nicht zweifach transitiv,

γ) $\mathfrak{H}$ ist Abelsch,

δ) Es gibt eine im Grad n aufgehende, von n verschiedene Primzahl p, für welche die zugehörige Sylowgruppe von $\mathfrak{H}$ zyklisch ist.

Wir wählen einen von E verschiedenen primären Komplex $\mathfrak{K}$ und wenden auf ihn und die Primzahl p Satz (5) an. Es ergibt sich: Ist R ein Element aus $\mathfrak{H}$, $R \neq E$, so besitzt die Gleichung

$$X^p = R \tag{I}$$

eine durch p teilbare Anzahl von Lösungen innerhalb $\mathfrak{K}$. Die sämtlichen Lösungen von (I) innerhalb $\mathfrak{H}$ sind leicht zu übersehen; gibt es überhaupt eine Lösung X_0, so erhält man alle übrigen in der Gestalt $X = X_0 P$, worin P alle Lösungen der Gleichung $P^p = E$ durchläuft. Diese letzte Gleichung hat nach γ) und δ) genau p Lösungen in $\mathfrak{H}$, nämlich die Elemente der einzigen in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Gruppe $\mathfrak{P}$ der Ordnung p. Es zeigt sich, daß $\mathfrak{K}$ entweder keine oder p Lösungen von (I) enthält, und daß der Teilkomplex derjenigen Elemente von $\mathfrak{K}$, deren p-te Potenz nicht E ist, sich in der Form $\mathfrak{R}\,\mathfrak{P}$ schreiben läßt, wobei $\mathfrak{R}$ einen weiteren Komplex bedeutet. Bezeichnet man also den Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{F}$, so gilt

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{P} + \mathfrak{F}. \tag{II}$$

Wir gehen jetzt von dem primären Komplex $\mathfrak{K}$ zu der zugehörigen primären Größe $\varkappa$ über. Wir führen drei weitere Größen des Gruppenrings H ein, nämlich

$$\varrho = \sum_{H \subset \mathfrak{R}} H, \quad \pi = \sum_{H \subset \mathfrak{P}} H, \quad \varphi = \sum_{H \subset \mathfrak{F}} H.$$

Wie die vorangegangene Überlegung zeigt, gilt entsprechend der Gleichung (II):

$$\varkappa = \varrho\,\pi + \varphi. \tag{III}$$

Wir berechnen $\varkappa^2$. Ist die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{F}$ gleich f, so ist

$$\pi^2 = p\,\pi, \quad \pi\,\varphi = f\,\pi,$$

$$\varkappa^2 = p\,\varrho^2\,\pi + 2f\,\varrho\,\pi + \varphi^2.$$

Wir entfernen das Glied $2f\,\varrho\,\pi$:

$$\varkappa^2 - 2f\varkappa = p\,\varrho^2\,\pi + \varphi^2 - 2f\,\varphi. \tag{IV}$$

Da $\varkappa^2 - 2f\varkappa$ eine Größe aus Λ ist, bilden nach (4) die Elemente aus $\mathfrak{H}$, deren Koeffizient in $\varkappa^2 - 2f\varkappa$ nicht durch p teilbar ist, einen Komplex $\mathfrak{L}$, der entweder leer oder ein Hauptkomplex ist. Gleichung (IV) zeigt,

daß $\mathfrak{L}$ in der (echten!) Untergruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{H}$ enthalten ist. Da nach α) und (2) $\mathfrak{L}$ nicht singulär sein darf, enthält $\mathfrak{L}$ entweder kein Element oder E als einziges Element. Gleichung (IV) zeigt dann, daß auch in $\varphi^2 - 2f\varphi$ alle Elemente mit Ausnahme höchstens von E einen durch p teilbaren Koeffizienten besitzen. Es ist also

$$\varphi^2 - 2f\varphi = p\xi + lE, \tag{V}$$

wobei auch ξ noch ganzzahlige Koeffizienten hat; l ist eine ganze Zahl, die wir so wählen, daß E in ξ nicht mehr auftritt.

Als Anzahl der Elemente des Teilkomplexes $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{P}$ liegt f im Intervall $0 \leqq f \leqq p$. Beachtet man, daß $\mathfrak{K}$ als primärer und von E verschiedener Komplex das Element E nicht enthält, so ist sogar $0 \leqq f \leqq p-1$. Nun gibt es wegen der Voraussetzung β) mindestens zwei von E verschiedene primäre Komplexe; wir können daher von vornherein $\mathfrak{K}$ so wählen, daß

$$0 \leqq f \leqq \frac{p-1}{2}$$

ist. In diesem Fall ist aber in Gleichung (V) $\xi = 0$. Denn sei H ein in ξ auftretendes Element. Dann ist $H \neq E$, also ist der Koeffizient a von H auf der rechten Seite von (V) durch p teilbar; auf der linken Seite liegt er offenbar im Intervall $-2f \leqq a \leqq f$; folglich ist er Null. Die Gleichung (V) liefert jetzt die Beziehung

$$\varphi^2 = 2f\varphi + lE,$$

aus der hervorgeht, daß die in φ auftretenden f Elemente mit E zusammen eine Gruppe bilden. Diese Gruppe ist in der Gruppe $\mathfrak{P}$ der Ordnung p enthalten, und ihre Ordnung ist $f+1 < p$; daher besteht sie nur aus E, d. h. es ist $f = 0$, daher $\mathfrak{F} = 0$. Die Gleichung (II) vereinfacht sich nun zu

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{R}\mathfrak{P},$$

woraus nach dem Kriterium (6) folgt, daß $\mathfrak{G}$ imprimitiv ist. Dies widerspricht der Voraussetzung α).

Damit ist der Beweis[6]) erbracht. Es mag zur Ergänzung noch hinzugefügt werden, daß unter unseren Voraussetzungen, ebenso wie im zyklischen Fall[7]), Imprimitivität nur dann eintreten kann, wenn $\mathfrak{G}$ eine zusammengesetzte Gruppe ist. Allgemein gilt:

$\mathfrak{G}$ sei eine transitive Permutationsgruppe mit einer regulären Abelschen Unterpruppe $\mathfrak{H}$ desselben Grades. Ist $\mathfrak{G}$ imprimitiv, so enthält $\mathfrak{G}$ einen intransitiven Normalteiler $\mathfrak{N}$, dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{H}$ verschieden ist von E und $\mathfrak{H}$.

---

[6]) Vgl. zu diesem Beweis a. a. O., S. 615–616.

[7]) A. a. O., S. 623.

Beweis: $\mathfrak{G}_1$ sei die Untergruppe der Elemente von $\mathfrak{G}$, die das erste Symbol fest lassen; es ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \mathfrak{H}$. Da $\mathfrak{G}$ imprimitiv ist, gibt es zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ eine Zwischengruppe $\mathfrak{G}'$. Mit einem geeigneten Teilkomplex $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$ läßt sich $\mathfrak{G}'$ in der Form $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}_1 \mathfrak{H}'$ schreiben. Wir verstehen unter $\mathfrak{N}$ den Durchschnitt der sämtlichen zu $\mathfrak{G}'$ ähnlichen Gruppen; $\mathfrak{N}$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die Bildung der zu $\mathfrak{G}'$ ähnlichen Gruppen kann bewerkstelligt werden schon durch Transformation von $\mathfrak{G}'$ mit Elementen aus $\mathfrak{H}$, denn $\mathfrak{H}$ enthält ein vollständiges Repräsentantensystem der Nebengruppen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{G}'$. Bei jeder dieser Ähnlichkeitstransformationen bleibt der in $\mathfrak{G}'$ enthaltene Komplex $\mathfrak{H}'$ ungeändert, also ist $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{N}$ enthalten. Da $\mathfrak{H}'$ nicht nur aus E besteht, ist der Durchschnitt $(\mathfrak{N}, \mathfrak{H})$ von E verschieden. $\mathfrak{N}$ ist intransitiv, da sonst $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{N} = \mathfrak{G}$ sein müßte, während doch $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{N}$ in der Zwischengruppe $\mathfrak{G}'$ liegt. Aus dem gleichen Grunde ist $(\mathfrak{N}, \mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ verschieden.

(Eingegangen am 1. Juni 1935.)

Über Knoten und Zöpfe mit gleichsinniger Verdrillung.

Von

C. Bankwitz.

Die folgenden Zeilen beschäftigen sich mit der Frage, wann zwei gleichsinnig verdrillte geschlossene Zöpfe denselben Knoten bestimmen. Und zwar wird gezeigt, daß ein solcher Knoten eine Projektion mit weniger als $\frac{3}{2}g$ Doppelpunkten besitzt, wo g der Grad seines L-Polynoms ist. Insbesondere läßt sich sofort erkennen, ob ein gleichsinnig verdrillter Zopf ein Kreis ist.

Der Zopf sei aus f Fäden gebildet (Fig. 1). Die Fäden seien von oben nach unten gerichtet; von links nach rechts werde immer überkreuzt. Zwecks einer geeigneten Darstellung schicken wir folgende Überlegung voraus:

Wir fassen den Zopf als eine Gesamtheit von gerichteten „Strecken" (einfachen Kurvenbögen) und Doppelpunkten auf. Jede Strecke wird von zwei Doppelpunkten begrenzt. Die Doppelpunkte treten nur als Endpunkte von Strecken auf. Die Strecken teilen wir in f Abteilungen ein. Die erste Abteilung wird von den Strecken gebildet, die an den linken Teil der Projektionsebene angrenzen. Die zweite Abteilung wird von den Strecken gebildet, die an Strecken der ersten Abteilung anstoßen usf. Die Doppelpunkte, in denen Strecken der ν-ten und $(\nu+1)$ten Abteilung zusammenstoßen, sollen auf dem ν-ten „Balken" B_ν liegen. Wir haben also insgesamt $(f-1)$ Balken B_ν, auf sie sind sämtliche Doppelpunkte des Zopfes verteilt.

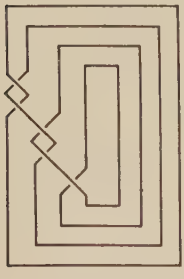


Fig. 1.

Über die Verteilung der Doppelpunkte auf den Balken dürfen folgende Annahmen gemacht werden:

1. *Auf jedem Balken liegen mindestens zwei Überkreuzungen.*

2. *Liegen auf einem Balken genau zwei Überkreuzungen, dann dürfen auf den benachbarten Balken mindestens vier Überkreuzungen angenommen werden*[1]).

[1]) Auf diesen Satz wurde bereits in K. Reidemeister, Knotentheorie (Ergebnisse d. Math. 1) S. 14 verwiesen.

3. *Die Anzahl n der Doppelpunkte und $f-1$ sind beide gerade oder ungerade.*

Zu 1. Liegt auf einem Balken keine Überkreuzung, dann erhalten wir eine Verkettung von mindestens zwei Kurven. Liegt auf B_α genau eine Überkreuzung D, dann können wir sie abbauen. Dabei vermindern sich n und f um je eins. Der Zopf bleibt gleichsinnig verdrillt.

Wir können den geschlossenen Zopf nämlich so deformieren, daß die Balken B_ν mit $\nu < \alpha$ nur oberhalb von D, die Balken B_ν mit $\nu > \alpha$ nur unterhalb von D Überkreuzungen haben. D_1 sei die erste Überkreuzung von $B_{\alpha-1}$, D_2 die letzte von $B_{\alpha+1}$. Die Strecken $D_1 D$ und $D_2 D$ können dann durch die Strecke $D_1 D_2$ ersetzt werden (Fig. 2).

Zu 2. Auf B_α sollen genau zwei Überkreuzungen liegen (D_1 und D_2).

a) Die Überkreuzungen D_1, D_2 dürfen nicht unmittelbar aufeinanderfolgen; sonst entsteht eine Verkettung zweier Kurven.

b) Den Stücken $D_1 D_2$ und $D_2 D_1$ des Balkens B_α entsprechen 2 Stücke des Balkens $B_{\alpha+1}$ ($B_{\alpha-1}$). Auf jedem dieser Stücke muß mehr

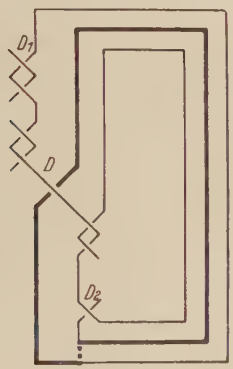


Fig. 2.

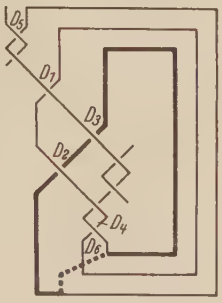


Fig. 3.

als ein Doppelpunkt liegen, andernfalls können wir reduzieren. Es möge etwa auf dem $D_1 D_2$ entsprechenden Stück von $B_{\alpha+1}$ nur ein Doppelpunkt D_3 liegen. (Fig. 3). Der Knoten kann so deformiert werden, daß für die Balken B_ν mit $\nu \leqq \alpha$ der Doppelpunkt D_2 die letzte, für die Balken B_ν mit $\nu > \alpha$ D_3 die erste Überkreuzung ist. D_4 sei die letzte Überkreuzung auf $B_{\alpha+1}$, D_5 die erste auf $B_{\alpha-1}$. Den aus den Stücken $D_4 D_3 + D_3 D_2 + D_2 D_5$ zusammengesetzten Knotenteil, der wegen der gleichsinnigen Verdrillung in D_2 und D_3 entweder beidemal unterkreuzt oder beidemal überkreuzt, können wir ersetzen durch $D_4 D_6 + D_6 D_5$; D_6 liegt auf $B_{\alpha+1}$ unterhalb von D_4 (Fig. 3).

Damit verschwinden die Doppelpunkte D_2 und D_3 und der Faden $(\alpha+2)$; dafür kommt nur ein neuer Doppelpunkt D_6 hinzu. Der Knoten bleibt gleichsinnig verdrillt.

Ähnliches gilt für die anderen Möglichkeiten.

Auf $B_{\alpha+1}(B_{\alpha-1})$ liegen also mindestens $2+2=4$ Überkreuzungen, andernfalls kann reduziert werden.

Zu 3. Wir betrachten einen offenen Zopf, der aus f gleichgerichteten Fäden gebildet wird (Fig. 1). Die Fäden werden am oberen Ende von links nach rechts mit $1,\ldots,f$ bezeichnet. Sie liegen am unteren Ende in einer Reihenfolge, die durch eine bestimmte Anordnung $\nu_1,\ldots,\nu_f$ der Zahlen $1,\ldots,f$ bestimmt sein möge.

Gehen wir zum geschlossenen Zopf über! Die unteren Enden der Fäden werden den oberen in der Lage von links nach rechts zugeordnet. Soll ein einziger Knoten entstehen, dann muß die Zuordnung

$$1,\ 2,\ \ldots,\ f$$

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_f$$

einen einzigen Zyklus bilden. Nach einem bekannten Satz der Gruppentheorie läßt sich ein Zyklus mit ungerader Elementenanzahl darstellen durch eine gerade Anzahl von Transpositionen und ein Zyklus mit gerader Elementenanzahl durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen. Eine Transposition bedeutet bei unserem Zopf die Vertauschung zweier Fäden. Dabei entsteht immer eine ungerade Anzahl von Doppelpunkten.

Aus unseren Annahmen folgt nun, daß wir auf jedem Balken durchschnittlich mindestens 3 Überkreuzungen annehmen dürfen, im ganzen jedenfalls mindestens $3f-3 \leqq n_{\min}$; im ungünstigsten Falle liegen nämlich auf den Balken abwechselnd 2 und 4 Doppelpunkte, und zwar auf B_1 und B_{f-1} je 2. Die Gesamtanzahl wäre in diesem Fall $n' = 6(\frac{1}{2}f-1)+2 = 3f-4$ Doppelpunkte. Da hier $f-1$ ungerade ist, muß nach 3. auch n ungerade sein; wir müssen also um einen einzigen Knoten zu erhalten, noch mindestens eine Überkreuzung hinzufügen; also ist $n_{\min} \geqq n'+1 = 3f-3$.

Um die in der Einleitung angekündigte Abschätzung zu erhalten ziehen wir den von mir vermuteten und kürzlich von W. Burau[2]) bewiesenen Satz heran, daß für gleichsinnig verdrillte geschlossene Zöpfe $g = n-f+1$ ist, wo g der Grad des L-Polynoms dieses Knotens ist. Hieraus und aus $n \geqq 3(f-1)$ bei den reduzierten Projektionen folgt $\frac{2}{3}n \leqq g$, also ist die Minimalanzahl der Überkreuzungen einer gleichsinnig verdrillten Zopfprojektion des Knotens $n_{\min} \leqq \frac{3}{2}g$. Für f folgt

[2]) W. Burau, Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen. Hamb. Abh. 11 (1935) S. 179.

aus $f \leqq \frac{1}{3} n + 1$ und der Abschätzung für n die Abschätzung $f_{\min} \leqq \frac{1}{2} g + 1$.

Bei der Gruppe des Kreises ist $g = 0$, also $n_{\min} = 0$; $f_{\min} = 1$. Die Doppelpunkte irgendeiner gleichsinnig verdrillten Projektion des Kreises lassen sich schon durch die in Annahme 1. angeführte Reduktion beseitigen, da $n - f + 1 = 0$ ist, d. h. auf jedem Balken genau eine Überkreuzung liegt.

Bei der Gruppe der Kleeblattschlinge ist $g = 2$, also wie bekannt $n_{\min} = 3$ und $f_{\min} = 2$. Aus 3. folgt übrigens, daß der Grad g des L-Polynoms gleichsinnig verdrillter Zöpfe gerade ist.

(Eingegangen am 21. Juni 1935).

Zur additiven Zahlentheorie. II.

Von

Arnold Walfisz in Radość (Polen).

Es sei $Q(n)$ die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Summe einer quadratfreien Zahl und einer Primzahl. Dann gilt, wie A. Page[1]) in einer unlängst erschienenen Abhandlung gezeigt hat

$$(1) \qquad Q(n) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid n} \left(\frac{p^2-p}{p^2-p-1}\right) Li(n) + O\left\{\frac{n}{\log^5 n} (\log\log n)^8 \log\log\log n\right\}.$$

Zuvor war durch T. Estermann[2])

$$(2) \qquad Q(n) \sim \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid n} \left(\frac{p^2-p}{p^2-p-1}\right) \frac{n}{\log n}$$

bekannt. Hierbei durchläuft p im ersten Produkt alle Primzahlen, im zweiten die Primteiler von n. (Auch in der Folge ist der Buchstabe p für Primzahlen vorbehalten.)

Nunmehr sei $N_r(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von r Quadraten und einer Primzahl, d. h. die Lösungszahl von

$$n = m_1^2 + \ldots + m_r^2 + p$$

im ganzen m und einer Primzahl p. Dann gilt für $r \geqq 4$

$$(3) \qquad N_r(n) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} \frac{n^{\frac{r}{2}}}{\log n} \mathfrak{S}_r(n) + o\left(\frac{n^{\frac{r}{2}}}{\log n}\right),$$

wo 1. für $r \equiv 0 \pmod 4$

$$(3,1) \qquad \mathfrak{S}_r(n) = \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p^{\frac{r}{2}}(p-1)}\right) \prod_{\substack{p \mid n \\ p>2}} \frac{\left(p^{\frac{r}{2}}-1\right)(p-1)}{p^{\frac{r}{2}}(p-1)+1};$$

2. für $r \equiv 1 \pmod 4$

$$(3,2) \qquad \mathfrak{S}_r(n) = \prod_{p>2} \left(1 - \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1)}\right) \prod_{\substack{p \mid n \\ p>2}} \frac{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1)}{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1) - \left(\frac{n}{p}\right)};$$

[1]) „On the number of primes in an arithmetic progression" [Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, **39** (1935), S. 116—141], Theorem III. Im folgenden kurz mit Page zitiert.

[2]) „On the representations of a number as the sum of a prime and a quadratfrei number" [Journal of the London Mathematical Society **6** (1931), S. 219—221].

3. für $r \equiv 2 \pmod 4$

$$(3,3)\quad \mathfrak{S}_r(n) = \prod_{p>2}\left(1 - \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^{\frac{r}{2}}(p-1)}\right)\prod_{\substack{p\\ p>2}}\frac{p^{\frac{r}{2}}(p-1) - (-1)^{\frac{p-1}{2}}(p-1)}{p^{\frac{r}{2}}(p-1) - (-1)^{\frac{p+1}{2}}};$$

4. für $r \equiv 3 \pmod 4$

$$(3,4)\quad \mathfrak{S}_r(n) = \prod_{p>2}\left(1 - \left(\frac{-n}{p}\right)\frac{1}{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1)}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}}\frac{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1)}{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1) - \left(\frac{-n}{p}\right)}.$$

Dies ist für $r = 4$ von S. Chowla[3]), für $r \geqq 5$ von mir in der ersten gleichnamigen Abhandlung[4]) nachgewiesen worden. Zweck der vorliegenden Zeilen ist, die Abschätzungen (1) und (3) zu verbessern. Ist nämlich $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so wird

$$(4)\quad Q(n) = \prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right)\prod_{p\mid n}\left(\frac{p^2-p}{p^2-p-1}\right) Li(n) + O\left(n \log^{-\frac{1}{\varepsilon}} n\right),$$

$$(5)\quad N_r(n) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}-1\right)}\mathfrak{S}_r(n)\int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} Li(u)\,du$$

$$+ O\left(n^{\frac{r}{2}} \log^{-\frac{1}{\varepsilon}} n\right) \quad \text{für} \quad r \geqq 4.$$

(Man sieht es den Hauptgliedern von (3) und (5) nicht gleich an, daß sie in erster Näherung übereinstimmen. Das ist aber doch der Fall, weil[5])

$$(6)\quad \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} Li(u)\,du \sim \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2}\frac{u}{\log u}\,du \sim \frac{1}{\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}-1\right)}\frac{n^{\frac{r}{2}}}{\log n}.)$$

Der Fortschritt wird durch die von C. L. Siegel[6]) kürzlich gegebene Abschätzung der Klassenzahl eines quadratischen Körpers ermöglicht.

§ 1.

Primzahlen in Restklassen.

Es sei k eine natürliche Zahl, $\chi(n)$ ein Charakter mod k,

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}.$$

---

[3]) „The representation of a number as a sum of four squares and a prime" [Acta Arithmetica 1 (1935), S. 115—122].

[4]) Acta Arithmetica 1 (1935), S. 123—160; erster Teil. Auf diese Arbeit beziehe ich mich mit I.

[5]) I, Formel (32) mit $s = 0$; es wurde zwar $r \geqq 5$ vorausgesetzt, für $r = 4$ ist aber (6) klar.

[6]) „Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper" [Acta Arithmetica 1 (1935), S. 83—86].

d bezeichne eine Fundamentaldiskriminante, d. h. es sei d keine Quadratzahl, $d \equiv 0$ oder $1 \bmod 4$, durch kein Quadrat einer ungeraden Primzahl teilbar und entweder ungerade oder $\equiv 8$ oder $12 \bmod 16$. Ich setze

$$L_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s} \tag{7}$$

(Kroneckersches Symbol).

Hilfssatz 1. *Es sei $k \geqq 2$, $\chi(n)$ ein eigentlicher reeller Charakter mod k. Dann ist bei geeigneter Wahl des Vorzeichens $\pm$ $k = d$ Fundamentaldiskriminante, und*

$$L(s, \chi) = L_d(s). \tag{8}$$

Beweis[7]): Es sei

$$k = 2^{\lambda} p^{l} p'^{l'} \ldots,$$

wo $p, p', \ldots$ voneinander verschiedene ungerade Primzahlen bedeuten und $\lambda, l, l', \ldots$ ganze positive Exponenten sind, deren erster λ auch $= 0$ sein kann.

Ich definiere jetzt die natürlichen Zahlen a und b folgendermaßen:

$a = 1$, $b = 1$ für $\lambda = 0$ oder 1; $\quad a = 2$, $b = 2^{\lambda - 2}$ für $\lambda \geqq 2$.

Für jedes ungerade n ist dann

$$n \equiv (-1)^{\alpha} 5^{\beta} \pmod{2^{\lambda}},$$

wo $\alpha \bmod a$ und $\beta \bmod b$ eindeutig bestimmt sind.

Zur Abkürzung werde

$$c = \varphi(p^{l}), \quad c' = \varphi(p'^{l'}), \ldots$$

gesetzt. g sei eine fest gewählte primitive Wurzel $\bmod p^{l}$, g' eine fest gewählte primitive Wurzel $\bmod p'^{l'}, \ldots$. Für $(n, k) = 1$ ist dann

$$n \equiv g^{\gamma} \pmod{p^{l}}, \quad n \equiv g'^{\gamma'} \pmod{p'^{l'}}, \ldots,$$

wo $\gamma \bmod c$ eindeutig bestimmt ist, $\gamma' \bmod c'$ usw.

Es seien $\Theta, \eta, \omega, \omega', \ldots$ irgendwelche Wurzeln der Gleichungen

$$\Theta^{a} = 1, \quad \eta^{b} = 1, \quad \omega^{c} = 1, \quad \omega'^{c'} = 1, \ldots.$$

Dann ist jeder Charakter $\bmod k$ durch einen Ausdruck gegeben

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi(n, k; \Theta, \eta, \omega, \omega', \ldots) = \Theta^{\alpha} \eta^{\beta} \omega^{\gamma} \omega'^{\gamma'} \ldots & \text{für } (n, k) = 1, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{9}$$

Ist nun χ reeller Nichthauptcharakter, was von jetzt ab vorausgesetzt wird, so sind alle Einheitswurzeln $\Theta, \eta, \omega, \omega', \ldots = \pm 1$, aber nicht alle $= +1$.

---

[7]) Für die im folgenden stillschweigend benutzten Eigenschaften der Restklassen und Charaktere verweise ich auf das Buch von Dirichlet-Dedekind „Vorlesungen über Zahlentheorie“ (4. Aufl., Braunschweig 1894), S. 339—353. Ich übernehme auch im wesentlichen die Bezeichnungen dieses Buches.

Es sei P das Produkt aller der verschiedenen in k aufgehenden ungeraden Primzahlen p, denen in (9) der ω-Wert -1 entspricht; S sei das Produkt der übrigen in k aufgehenden verschiedenen ungeraden Primzahlen (für die also $\omega = +1$ ist). Falls in der einen oder anderen dieser Gruppen gar keine Primzahlen enthalten sein sollten, sei $P = 1$ bzw. $S = 1$.

Nun definiere ich $D = D(\chi)$ folgendermaßen:

$$(10)\quad \begin{cases} \text{für } \Theta = 1, & \eta = 1 & \text{sei } |D| = PS^2, & D \equiv 1 \pmod 4; \\ \text{für } \Theta = -1, & \eta = 1 & \text{sei } |D| = PS^2, & D \equiv 3 \pmod 4; \\ \text{für } \Theta = 1, & \eta = -1 & \text{sei } |D| = 2PS^2, & D \equiv 2 \pmod 8; \\ \text{für } \Theta = -1, & \eta = -1 & \text{sei } |D| = 2PS^2, & D \equiv 6 \pmod 8. \end{cases}$$

Das hierdurch eindeutig bestimmte D ist keine Quadratzahl. Es gilt ferner

$$(11)\quad \begin{cases} L(s,\chi) = \sum\limits_{\substack{n=1 \\ (n,2D)=1}}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s} & \text{für gerades } k, \\ L(s,\chi) = \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{P}\right)2^{-s}} \sum\limits_{\substack{n=1 \\ (n,2D)=1}}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s} & \text{für ungerades } k. \end{cases}$$

Ich setze jetzt

$$(12)\qquad d = \begin{cases} D \text{ für } \Theta = 1, \quad \eta = 1, \\ 4D \text{ in den drei anderen Fällen von (10).} \end{cases}$$

Nunmehr nehme ich an, daß $\chi(n)$ ein eigentlicher Charakter mod k ist, d. h. es darf keinen echten Teiler K von k geben, so daß stets

$$(13)\qquad \chi(n) = \chi(n')$$

gilt, wenn

$$(14)\qquad n \equiv n' \pmod K, \quad (n,k) = 1, \quad (n',k) = 1$$

ist.

Ich behaupte zunächst, daß

$$(15)\qquad S = 1$$

sein muß. Denn sonst gehe etwa p in S auf, und es sei

$$K = kp^{-l} = 2^{\lambda} p'^{l'} p''^{l''} \ldots,$$

wo also K ein echter Teiler von k ist. Genügen dann n und n' den Bedingungen (14), so folgt aus (9)

$$\chi(n) = \chi(n') = \Theta^{\alpha} \eta^{\beta} \omega'^{\gamma'} \omega''^{\gamma''} \ldots,$$

so daß also (13) erfüllt ist und $\chi(n)$ kein eigentlicher Charakter mod k sein kann.

Aus (10), (12) und (15) folgt

$$(16)\quad \begin{cases} \text{für } \Theta = 1, & \eta = 1 & \text{ist} & |d| = P, & d \equiv 1 \pmod 4; \\ \text{für } \Theta = -1, & \eta = 1 & \text{ist} & |d| = 4P, & d \equiv 12 \pmod{16}; \\ \text{für} & \eta = -1 & \text{ist} & |d| = 8P & (\text{also } d \equiv 8 \bmod 16). \end{cases}$$

Ich behaupte, daß d Fundamentaldiskriminante ist. Zunächst ist d nach (12) kein Quadrat. Zweitens folgt aus (16) sofort, daß d durch kein Quadrat einer ungeraden Primzahl teilbar ist und die vorgeschriebenen Kongruenzbedingungen erfüllt.

Es ist

$$k = P \quad \text{oder} \quad = 4P \quad \text{oder} \quad = 8P^{8}).$$

Ich behaupte, daß bei geeigneter Wahl des Vorzeichens stets $d = \pm k$ ist.

1. $k = P$. Dann ist $\lambda = 0$, $a = b = 1$, $\Theta = \eta = 1$, also $d = \pm P = \pm k$, nach (16).

2. $k = 4P$. Dann ist $\lambda = 2$, $a = 2$, $b = 1$, $\eta = 1$. Es muß hier $\Theta = -1$ sein. Falls $\Theta = 1$, so setze ich nämlich $K = P$. Wenn n, n' die Bedingungen (14) erfüllen, so gilt dann (13), und χ kann also kein eigentlicher Charakter sein. Aus (16) folgt jetzt $d = \pm 4P = \pm k$.

3. $k = 8P$. Dann ist $\lambda = 3$, $a = 2$, $b = 2$. Wäre $\eta = 1$, so setze ich $K = 4P$. Für die n, n' mit (14) wäre dann (13) erfüllt, also χ wiederum kein eigentlicher Charakter. Also ist $\eta = -1$, und nach (16) gilt $d = \pm 8P = \pm k$.

Es verbleibt noch der Beweis von (8):

a) $d = 4D$. Nach dem bereits Bewiesenen ist dann k gerade. Es gilt hier nach (7) und (11)

$$L_d(s) = \prod_{p \geqq 2} \left\{1 - \left(\frac{4D}{p}\right) p^{-s}\right\}^{-1} = \prod_{p > 2} \left\{1 - \left(\frac{D}{p}\right) p^{-s}\right\}^{-1}$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ (n, 2D) = 1}}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s} = L(s, \chi).$$

b) $d = D$. Wegen (10), (12) und $|d| = k$ ist dann k ungerade und $|d| = P$. Nach den bekannten Eigenschaften des Kroneckerschen Symbols[9]) ist mithin

$$\left(\frac{d}{2}\right) = \left(\frac{2}{P}\right).$$

---

[8]) Z. Suetuna „Bemerkung über das Produkt von L-Funktionen" [The Tôhoku Mathematical Journal 27 (1926), S. 248—257], § 1; vgl. auch Page, S. 139.

[9]) Vgl. z. B. E. Landau „Vorlesungen über Zahlentheorie" (Leipzig 1927), I Bd., S. 51.

Aus (7) und (11) ergibt sich daher

$$L_d(s) = \prod_{p \geqq 2} \left\{1 - \left(\frac{d}{p}\right) p^{-s}\right\}^{-1} = \left\{1 - \left(\frac{d}{2}\right) 2^{-s}\right\}^{-1} \prod_{p > 2} \left\{1 - \left(\frac{D}{p}\right) p^{-s}\right\}^{-1}$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{P}\right) 2^{-s}\right\}^{-1} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,\, 2D) = 1}}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s} = L(s, \chi).$$

In der Folge ist ein beliebiges $\varepsilon > 0$ fest vorgegeben. Mit A bezeichne ich unterschiedslos positive absolute Konstanten, mit C unterschiedslos positive Zahlen, die von ε abhängen dürfen.

Der Siegelsche Satz:

(17) $$\log L_d(1) = o(\log |d|) \qquad (|d| \to \infty).$$

Beweis: l. c.[6]).

Hilfssatz 2:

(18) $$L(s, \chi) \neq 0 \quad \text{für} \quad s > 1 - C k^{-\varepsilon}.$$

Beweis: 1. Es seien zunächst die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt, d. h. $k \geqq 2$ und $\chi(n)$ ein eigentlicher reeller Charakter mod k. (17) besagt

$$L_d(1) > |d|^{-\varepsilon} \quad \text{für} \quad |d| > C,$$

d. h.

$$L_d(1) > C |d|^{-\varepsilon} \quad \text{für alle } d.$$

Nach Hilfssatz 1 ist andererseits

$$L(1, \chi) = L_d(1), \text{ wo } |d| = k.$$

Mithin gilt

(19) $$L(1, \chi) > C k^{-\varepsilon}\,^{10}).$$

Ich benutze jetzt die folgende Ungleichung von Page (der erste Fall seines Lemma 4, mit $t = 0$)

(20) $$|L'(u, \chi)| < A \log^2 k \text{ für } 1 - \frac{1}{2 \log k} \leqq u \leqq 2.$$

Aus (19) mit $\frac{\varepsilon}{2}$ (statt ε) und (20) folgt für

$$1 - C k^{-\frac{\varepsilon}{2}} \log^{-2} k \leqq 1 - C' k^{-\varepsilon} < s < 1:$$

$$L(s, \chi) = L(1, \chi) - \int_s^1 L'(u, \chi)\, du \geqq C k^{-\frac{\varepsilon}{2}} - A C' k^{-\varepsilon} \log^2 k > 0,$$

für geeignetes $C' = C$[11]).

---

[10]) Das Beste, was vor Siegel hier bekannt war, lautet:

(19′) $$L(1, \chi) > A k^{-1/2}.$$

Ausführlicher Beweis bei Page, S. 121—125.

[11]) Aus (19′) und (20) leitet Page

$$L(s, \chi) \neq 0 \text{ für } s > 1 - A k^{-1/2} \log^{-2} k,$$

sein Theorem II, her.

2 Für den einzigen Charakter mod $k = 1$ ist (18) klar.

3. Ebenso gilt (18) nach 1. und 2. auch für einen uneigentlichen reellen Charakter mod k ($\geqq 2$), da es dann bekanntlich einen echten Teier K von k und einen eigentlichen reellen Charakter χ mod K gibt, so daß $L(s, \chi)$ und $L(s, \chi)$ für $s > 0$ dieselben Nullstellen besitzen[12]).

4. Für einen nichtreellen Charakter gilt nach H. Gronwall[13]) sogar

$$L(s, \chi) \neq 0 \text{ für } s > 1 - \frac{A}{\log k}.$$

x sei bis zum Schluß dieser Arbeit eine reelle Zahl $\geqq 2$. Ich führe jetzt die Primzahlfunktion

$$\pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv l \pmod k}} 1 \tag{21}$$

ein.

Hilfssatz 3: *Für $(k, l) = 1$ ist*

$$\left| \pi(x; k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} Li(x) \right| < A x e^{-A\sqrt{\log x}} + A \frac{x^{1 - Ck^{-\varepsilon}}}{\varphi(k) \log x}. \tag{22}$$

Beweis: Theorem I von Page besagt: *Übertrifft $s_1 = s_1(k)$ die größte reelle Nullstelle aller zum festen k gehörigen L-Funktionen, so gilt für $(k, l) = 1$*

$$\left| \pi(x; k, l) - \frac{1}{\varphi(k)} Li(x) \right| < A x e^{-A\sqrt{\log x}} + A \frac{x^{s_1}}{\varphi(k) \log x}, \tag{23}$$

und hierin ist $s_1 = 1 - Ck^{-\varepsilon}$ nach (18) zulässig.

Die Beweise von (4) und (5) führe ich in den nächsten Paragraphen mit Hilfe von (22) durch. Der Fortschritt von (1) zu (4) ist dadurch zu erklären, daß Page in (23) nur $s_1 = A k^{-\frac{1}{2}} \log^{-2} k$ zur Verfügung hatte[11]). (1) ist wiederum schärfer als (2), weil Estermann l. c.[2]) mit einem elementaren Brun-Titchmarsh'schen Satz auskam, wonach für $k \leqq \sqrt{x}$

$$\pi(x; k, l) < A \frac{x}{\varphi(k) \log x}$$

---

[12]) Vgl. z. B. E. Landau „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" (Leipzig 1909), I Bd., S. 483.

[13]) „Sur les séries de Dirichlet correspondant a des caractères complexes" [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 35 (1913), S. 145—159]. Wesentlich einfacher bewiesen von E. Landau „Über Dirichletsche Reihen mit komplexen Charakteren" [Journal für die reine und angewandte Mathematik 157 (1926), S. 26—32].

ist. Auch Chowla machte l. c.[3]) von diesem Satz beim Beweise von (3) mit $r = 4$ Gebrauch, während ich ihn bei (3) mit $r \geqq 5$ entbehren konnte. Estermann benutzte ferner noch die klassische Abschätzung

$$\pi(x; k, l) \sim \frac{x}{\varphi(k) \log x} \text{ für } (k, l) = 1, \text{ festes } k \text{ und wachsendes } x;$$

bei Chowla und mir kam statt dessen die rechnerisch etwas bequemere, schärfere Abschätzung

$$\pi(x; k, l) = \frac{x}{\varphi(k) \log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \text{ (unter den gleichen Voraussetzungen)}$$

zur Anwendung.

§ 2. (4).

Die folgenden Bezeichnungen mögen von hier ab bis zum Schluß der Arbeit gelten.

Zu den A und C kommen jetzt die B hinzu, womit ich unterschiedslos Zahlen bezeichne, für die $|B|$ unterhalb einer nur von ε (§ 2—3) bzw. nur von ε und r (§ 4) abhängigen Schranke liegt. m und n sind natürliche Zahlen, hierbei $n \geqq 2$. Ich setze $\frac{1}{\varepsilon} = \mathsf{E}$. Falls untere Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins. Die fetten Zahlen geben Nummern von Formeln an, die an den betreffenden Stellen benutzt werden, sind also als Hinweise zu verstehen.

Weitere Bezeichnungen werden noch eingeführt — sie gelten nur für den jeweiligen Paragraphen.

Hilfssatz 4:

$$\sum_{n \leqq x} \frac{1}{n \varphi(n)} < \frac{A}{x}. \tag{24}$$

Beweis: Bedeutet

$$\sigma_{-1}(m) = \sum_{t \mid m} \frac{1}{t}$$

die Summe der reziproken Teiler von m, so ist

$$\sum_{m \leqq x} \sigma_{-1}(m) < A x,$$

also

$$\sum_{n \leqq x} \frac{1}{n \varphi(n)} = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n^2 \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} < A \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n^2} \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

$$< \sum_{n \leqq x} \frac{\sigma_{-1}(n)}{n^2} < \frac{A}{x}.$$

Ich beweise jetzt (4). Der Strich bei m-Summen heiße: außer den angegebenen Summationsbedingungen sei noch $(m, n) = 1$. Für die Summe

$$Q_1(n) = \sum_{m < \sqrt{n}}' \mu(m)\, \pi(n; m^2, n)^{14})$$

hat Page, Formel (37),

$$Q(n) = Q_1(n) + B\sqrt{n}$$

nachgewiesen. Setze ich daher

$$Q_2(n) = \sum_{m < \sqrt{n}}' \frac{\mu(m)}{m\,\varphi(m)} Li(m),$$

$$(25) \qquad Q_3(n) = \sum_{m < \log^{\mathsf{E}} n}' \left| \pi(n; m^2, n) - \frac{1}{m\,\varphi(m)} Li(n) \right|,$$

$$(26) \qquad Q_4(n) = \sum_{\log^{\mathsf{E}} n \leqq m < \sqrt{n}}' \left| \pi(n; m^2, n) - \frac{1}{m\,\varphi(m)} Li(n) \right|,$$

so ist

$$(27) \qquad Q(n) = Q_2(n) + BQ_3(n) + BQ_4(n) + B\sqrt{n}.$$

Ich schätze jetzt die folgende Summe ab:

$$(28) \quad S(n, \varepsilon) = \sum_{m < \log^{\mathsf{E}} n} \left\{ n e^{-A\sqrt{\log n}} + \frac{n^{1 - Cm^{-2\varepsilon}}}{m\,\varphi(m) \log n} \right\}$$

$$= Bne^{-A\sqrt{\log n}} \sum_{m < \log^{\mathsf{E}} n} 1 + Bn \sum_{m < \log^{\frac{\mathsf{E}}{4}} n} \exp\{-Cm^{-2\varepsilon} \log n\}$$

$$+ Bn \sum_{m \geqq \log^{\frac{\mathsf{E}}{4}} n} \frac{1}{m\,\varphi(m)}$$

$$= Bne^{-A\sqrt{\log n}} \log^{\mathsf{E}} n + Bn \exp\{-C \log n^{-2\varepsilon \cdot \frac{\mathsf{E}}{4} + 1}\} \log^{\frac{\mathsf{E}}{4}} n$$

$$+ Bn \log^{-\frac{\mathsf{E}}{4}} n \qquad (24)$$

$$= Bn \log^{-\frac{\mathsf{E}}{4}} n + Bn \exp\{-C\sqrt{\log n}\} \log^{\frac{\mathsf{E}}{4}} n + Bn \log^{-\frac{\mathsf{E}}{4}} n$$

$$29) \qquad = Bn \log^{-\frac{\mathsf{E}}{4}} n.$$

Aus (25), (22), (28) und (29) folgt

$$(30) \qquad Q_3(n) = BS(n, \varepsilon) = Bn \log^{-\frac{\mathsf{E}}{4}} n,$$

---

14) Ich schreibe m, n, $m\,\varphi(m)$, wo es bei Page n, m, $\varphi(n^2)$ heißt.

$$Q_4(n) = B \sum_{\log^{\mathsf{E}} n \leqq m < \sqrt{n}} (1 + n m^{-\frac{3}{2}}) + B \frac{n}{\log n} \sum_{m \geqq \log^{\mathsf{E}} n} \frac{1}{m \varphi(m)} \quad (26, 21)$$

$$(31) \quad = Bn \log^{-\mathsf{E}} n + Bn \log^{-\mathsf{E}} n = Bn \log^{-\frac{\mathsf{E}}{4}} n \quad (24).$$

Für die Summe

$$Q_5(n) = \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{\mu(m)}{m \varphi(m)} Li(n)$$

ist nach Page, S. 140—141,

$$(32) \qquad Q_2(n) = Q_5(n) + Bn^{\frac{3}{4}},$$

$$(33) \qquad Q_5(n) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid n} \left(\frac{p^2 - p}{p^2 - p - 1}\right) Li(n).$$

Aus (27), (32), (33), (30) und (31) ergibt sich schießlich

$$Q(n) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid n} \left(\frac{p^2 - p}{p^2 - p - 1}\right) Li(n) + Bn \log^{-\frac{1}{4}\varepsilon} n.$$

Ersetzt man hierin ε durch $\frac{\varepsilon}{4}$, so bekommt man die Behauptung (4).

§ 3.

(5) für $r = 4$.

Σ' habe die Bedeutung des vorigen Paragraphen; Σ'' heiße: der Summationsbuchstabe m erfülle überdies die Bedingung $(2m, n) = 1$. Für beliebiges $u > 0$ bedeute $\sigma(u)$ die Teilersumme von u ($\sigma(u) = 0$, wenn u keine natürliche Zahl ist). Ich setze

$$S_1(n) = \sum_{p < n} \sigma(n - p), \quad S_2(n) = \sum_{p < n} \sigma\left(\frac{n-p}{4}\right).$$

Die Formeln (6), (13) und (27) von Chowla besagen dann:

$$(34) \qquad N_4(n) = 8 S_1(n) - 32 S_2(n) + B,$$

$$(35) \qquad S_1(n) = \sum_{m \leqq \sqrt{n}}{}' \frac{1}{m} \int_2^n \pi(u; m, n)\, du + Bn^{\frac{3}{2}},$$

$$(36) \qquad S_2(n) = \frac{1}{4} \sum_{m \leqq \sqrt{n}}{}'' \frac{1}{m} \int_2^n \pi(u; 4m, n)\, du + Bn^{\frac{3}{2}}.$$

Ferner ist nach Chowla, S. 121—122,

$$(37) \quad \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{1}{m \varphi(m)} - \sum_{m=1}^{\infty}{}'' \frac{1}{m \varphi(4m)} = \frac{\pi^2}{8} \prod_{p > 2} \left(1 + \frac{1}{p^2(p-1)}\right) \prod_{\substack{p \mid n \\ p > 2}} \frac{(p-1)^2(p+1)}{p^3 - p^2 + 1}.$$

Ich gehe nun zum Beweise von (5) für $r = 4$ über und setze

$$(38)\quad S_{11}(n) = \sum_{m \leqq \sqrt{n}}{}' \frac{1}{m\,\varphi(m)} \int_2^n Li(u)\,du,$$

$$(39)\quad S_{12}(n) = \sum_{m < \log^{\mathsf{E}} n}{}' \frac{1}{m} \int_2^n \left| \pi(u; m, n) - \frac{1}{\varphi(m)} Li(u) \right| du,$$

$$(40)\quad S_{13}(n) = \sum_{\log^{\mathsf{E}} n \leqq m \leqq \sqrt{n}}{}' \frac{1}{m} \int_2^n \left| \pi(u; m, n) - \frac{1}{\varphi(m)} Li(u) \right| du,$$

$$(41)\quad S_{21}(n) = \frac{1}{4} \sum_{m \leqq \sqrt{n}}{}'' \frac{1}{m\,\varphi(4m)} \int_2^n Li(u)\,du,$$

$$(42)\quad S_{22}(n) = \sum_{m < \log^{\mathsf{E}} n}{}'' \frac{1}{m} \int_2^n \left| \pi(u; 4m, n) - \frac{1}{\varphi(4m)} Li(u) \right| du,$$

$$(43)\quad S_{23}(n) = \sum_{\log^{\mathsf{E}} n \leqq m \leqq \sqrt{n}}{}'' \frac{1}{m} \int_2^n \left| \pi(u; 4m, n) - \frac{1}{\varphi(4m)} Li(u) \right| du.$$

Dann ist nach (35) und (36)

$$(44)\quad S_1(n) = S_{11}(n) + BS_{12}(n) + BS_{13}(n) + Bn^{\frac{3}{2}},$$

$$(45)\quad S_2(n) = S_{21}(n) + BS_{22}(n) + BS_{23}(n) + Bn^{\frac{3}{2}}.$$

Ferner ist

$$(46)\quad S_{12}(n) = BS_3(n), \quad S_{22}(n) = BS_3(n),$$

wo

$$(47)\quad S_3(n) = \sum_{m < \log^{\mathsf{E}} n} \frac{1}{m} \int_2^n \left\{ u e^{-A\sqrt{\log u}} + \frac{u^{1 - Cm^{-\varepsilon}}}{\varphi(m) \log u} \right\} du \qquad (39, 42, 22)$$

$$= Bn \sum_{m < \log^{\mathsf{E}} n} \left\{ n e^{-A\sqrt{\log n}} + \frac{n^{1 - Cm^{-\varepsilon}}}{m\,\varphi(m) \log n} \right\}$$

$$(48)\quad = BnS\left(n, \frac{\varepsilon}{2}\right) = Bn^2 \log^{-\frac{\mathsf{E}}{2}} n \qquad (28, 29).$$

$$(49)\quad S_{12}(n) = Bn^2 \log^{-\frac{\mathsf{E}}{2}} n, \quad S_{22}(n) = Bn^2 \log^{-\frac{\mathsf{E}}{2}} n \qquad (46, 48).$$

$$\left.\begin{matrix} S_{13}(n) \\ S_{23}(n) \end{matrix}\right\} = B \sum_{\log^{\mathsf{E}} n \leqq m \leqq \sqrt{n}} \frac{1}{m} \int_2^n \left(1 + \frac{u}{m} + \frac{u}{\varphi(m)}\right) du \qquad (40, 43, 21)$$

$$= Bn \log n + Bn^2 \log^{-\mathsf{E}} n \qquad (24)$$

$$= B n^2 \log^{-\frac{E}{2}} n. \tag{50}$$

$$S_1(n) = S_{11}(n) + B n^2 \log^{-\frac{E}{2}} n \qquad (44, 49, 50)$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{1}{m\,\varphi(m)} + B n^{-\frac{1}{2}} \right) \int_2^n Li(u)\,du + B n^2 \log^{-\frac{E}{2}} n \qquad (38, 24)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{1}{m\,\varphi(m)} \int_2^n Li(u)\,du + B n^2 \log^{-\frac{E}{2}} n, \tag{51}$$

$$S_2(n) = S_{21}(n) + B n^2 \log^{-\frac{E}{2}} n \qquad (45, 49, 50)$$

$$= \left(\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty}{}'' \frac{1}{m\,\varphi(4m)} + B n^{-\frac{1}{2}} \right) \int_2^n Li(u)\,du + B n^2 \log^{-\frac{E}{2}} n \qquad (41, 24)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty}{}'' \frac{1}{m\,\varphi(4m)} \int_2^n Li(u)\,du + B n^2 \log^{-\frac{E}{2}} n. \tag{52}$$

$$N_4(n) = 8 \left(\sum_{m=1}^{\infty}{}' \frac{1}{m\,\varphi(m)} - \sum_{m=1}^{\infty}{}'' \frac{1}{m\,\varphi(4m)} \right) \int_2^n Li(u)\,du + B n^2 \log^{-\frac{E}{2}} n \qquad (34, 51, 52)$$

$$= \pi^2 \prod_{p>2} \left(1 + \frac{1}{p^2(p-1)} \right) \prod_{\substack{p \mid n \\ p>2}} \frac{(p-1)^2(p+1)}{p^3 - p^2 + 1} \int_2^n Li(u)\,du + B n^2 \log^{-\frac{1}{2\varepsilon}} n \qquad (37).$$

Ersetzt man hierin ε durch $\frac{\varepsilon}{2}$ und beachtet (3, 1), so bekommt man (5) für $r = 4$.

§ 4.

(5) für $r \geqq 5$.

Ich stelle mir zunächst die nötigen Formeln aus I, S. 125—126 zusammen. Im folgenden bedeuten r, s, p, n, m, h, l nicht negative ganze Zahlen; hierbei ist $r \geqq 5$, $n > 1$, $m > 0$, p Primzahl. h ist stets zu m teilerfremd; es läuft also z. B. $\sum_{h=0}^{m-1}{}'$ über die zu m teilerfremden h mit $0 \leqq h < m$. Der Strich bei p-Summen heißt: es soll überdies $p \equiv l \pmod m$ sein; der Strich bei l-Summen heißt: es sei überdies $(l, m) = 1$.

Zur Abkürzung werde gesetzt

$$E(u) = E_{h,m}(u) = e^{\frac{2\pi i u h}{m}}, \tag{53}$$

$$T = T_{h,m} = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} E(s^2).$$

Dann gilt

$$T = B m^{-\frac{1}{2}}, \tag{54}$$

$$\sum_{l=0}^{m-1}{}' E(l) = \mu(m). \tag{55}$$

Wird $\mathfrak{S}_r(s)$ durch die wegen (54) absolut konvergente Reihe

$$\mathfrak{S}_r(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{\varphi(m)} \sum_{h=0}^{m-1} T^r E(-s) \tag{56}$$

erklärt, so steht das mit (3, 1) bis (3, 4) nicht in Widerspruch; denn für $s = n$ hat (56) gerade die Werte (3, 1) bis (3, 4), wie Frl. Stanley nachgewiesen hat (Literatur in I, Fußnoten [4]) und [7])). Es habe von jetzt ab $\mathfrak{S}_r(n)$ nur noch die Bedeutung (56).

Es bezeichne $N_{r,0}(s)$ die Anzahl der Darstellungen von s als Summe von r Quadraten. Nach der Definition von $N_r(n)$ ist dann

$$N_r(n) = \sum_{p<n} N_{r,0}(n-p) + B. \tag{57}$$

Wird ferner

$$\mathfrak{S}_{r,0}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{m-1} T\ E(-s) \tag{58}$$

gesetzt — auch diese Reihe konvergiert wegen (54) absolut —, so gilt nach Hardy (Literatur in I, Fußnote [8]))

$$N_{r,0}(m) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} m^{\frac{r}{2}-1} \mathfrak{S}_{r,0}(m) + B m^{\frac{r}{4}}. \tag{59}$$

Schließlich brauche ich noch die Umformung

$$\sum_{p \leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}-1} E(p) \tag{60}$$

$$= \left(\frac{r}{2} - 1\right) \sum_{l=0}^{m-1} E(l) \int_{2}^{n} (n-u)^{\frac{r}{2}-2} \pi(u; m, l)\, du$$

(I, S. 128, Formel (20) mit $s = 0$).

Für

$$\mathfrak{T}_r(n) = \sum_{p \leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}-1} \mathfrak{S}_{r,0}(n-p) \tag{61}$$

ist

$$\mathfrak{S}_{r,0}(n-p) - \sum_{m \leqq \sqrt{n}} \sum_{h=0}^{m-1} T^r E(p-n) = \sum_{m > \sqrt{n}} \sum_{h=0}^{m-1} T^r E(p-n) \tag{58}$$

$$= B \sum_{m > \sqrt{n}} m^{1-\frac{r}{2}} = B n^{1-\frac{r}{4}} \tag{54},$$

$$\mathfrak{T}_r(n) - \sum_{p \leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}-1} \sum_{m \leqq \sqrt{n}} \sum_{h=0}^{m-1} T^r E(p-n)$$

$$= B \sum_{p \leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}-1} n^{1-\frac{r}{4}} = B n^{\frac{r}{2}+1-\frac{r}{4}} = B n^{\frac{r}{4}+1},$$

$$\mathfrak{T}_r(n) = \sum_{m \leqq \sqrt{n}} \sum_{h=0}^{m-1} T^r E(-n) \sum_{p \leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}-1} E(p) + B n^{\frac{r}{4}+1} \tag{53}$$

$$= \left(\frac{r}{2}-1\right) \sum_{m \leqq \sqrt{n}} \sum_{h=0}^{m-1} T^r E(-n) \sum_{l=0}^{m-1} E(l) \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} \pi(u; m, l)\, du \tag{62}$$

$$+ B n^{\frac{r}{4}+1} \tag{60}.$$

Läßt man in (62) die l mit $(l, m) > 1$ weg, so ist der Fehler nach (54) und (21)

$$B \sum_{m \leqq \sqrt{n}} m^{2-\frac{r}{2}} \int_2^n n^{\frac{r}{2}-2}\, du = B \sum_{m \leqq \sqrt{n}} m^{2-\frac{5}{2}} n^{\frac{r}{2}-1} = B n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}},$$

also

$$\mathfrak{T}_r(n) = \left(\frac{r}{2}-1\right) \sum_{m \leqq \sqrt{n}} \sum_{h=0}^{m-1} T^r E(-n) \sum_{l=0}^{m-1}{}' E(l) \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} \pi(u; m, l)\, du$$

$$+ B n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}.$$

Mit

$$\mathfrak{T}_{r1}(n) = \left(\frac{r}{2}-1\right) \sum_{m \leqq \sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{h=0}^{m-1} T^r E(-n) \sum_{l=0}^{m-1}{}' E(l) \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} Li(u)\, du, \tag{63}$$

$$\mathfrak{T}_{r2}(n) = \sum_{\substack{\mathsf{E} \\ m < \log^2 n}} \sum_{h=0}^{m-1} |T|^r \sum_{l=0}^{m-1}{}' \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} \left| \pi(u; m, l) - \frac{1}{\varphi(m)} Li(u) \right| du, \tag{64}$$

(65) $\mathfrak{T}_{r3}(n)$

$$= \sum_{\log^{\frac{E}{2}} n \leqq m \leqq \sqrt{n}} \sum_{h=0}^{m-1} |T|^r \sum_{l=0}^{m-1}{}' \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} \left| \pi(u; m, l) - \frac{1}{\varphi(m)} Li(u) \right| du$$

ist daher

$$\mathfrak{T}_r(n) = \mathfrak{T}_{r1}(n) + B\mathfrak{T}_{r2}(n) + B\mathfrak{T}_{r3}(n) + Bn^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}. \tag{66}$$

$\mathfrak{T}_{r1}(n)$

$$= \left(\frac{r}{2}-1\right) \sum_{m \leqq \sqrt{n}} \frac{\mu(m)}{\varphi(m)} \sum_{h=0}^{m-1} T^r E(-n) \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} Li(u)\, du \quad (63, 55)$$

$$= \left(\frac{r}{2}-1\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{\varphi(m)} \sum_{h=0}^{m-1} T^r E(-n) \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} Li(u)\, du$$

$$+ B \sum_{m > \sqrt{n}} m^{1-\frac{5}{2}} \int_2^n n^{\frac{r}{2}-2+1}\, du \quad (54)$$

$$= \left(\frac{r}{2}-1\right) \mathfrak{S}_r(n) \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} Li(u)\, du + Bn^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \quad (56); \tag{67}$$

$$\mathfrak{T}_{r2}(n) = B \sum_{m < \log^{\frac{E}{2}} n} m^{2-\frac{5}{2}} \int_2^n n^{\frac{r}{2}-2} \left\{ u e^{-A\sqrt{\log u}} + \frac{u^{1-Cm^{-\varepsilon}}}{\varphi(m) \log u} \right\} du \quad (64, 22)$$

$$= B \sum_{m < \log^{\frac{E}{2}} n} \frac{1}{m} \int_2^n \left\{ u e^{-A\sqrt{\log u}} + \frac{u^{1-Cm^{-\varepsilon}}}{\varphi(m) \log u} \right\} du\, n^{\frac{r}{2}-2} \log^{\frac{E}{4}} n$$

$$= B S_3(n) n^{\frac{r}{2}-2} \log^{\frac{E}{4}} n = B n^{\frac{r}{2}} \log^{-\frac{E}{4}} n \quad (47, 48); \tag{68}$$

$$\sum_{m \leqq x} \frac{1}{\sqrt{m}\, \varphi(m)} < \frac{A}{\sqrt{x}} \quad (24), \tag{69}$$

$$\mathfrak{T}_{r3}(n) = B \sum_{\log^{\frac{E}{2}} n < m \leqq \sqrt{n}} m^{2-\frac{5}{2}} \int_2^n n^{\frac{r}{2}-2} \left(1 + \frac{u}{m} + \frac{u}{\varphi(m)}\right) du \quad (65, 54, 21)$$

$$= B \sum_{m \leqq \sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{m}} n^{\frac{r}{2}-1} + B \sum_{m \geqq \log^{\frac{E}{2}} n} \frac{1}{\sqrt{m}\, \varphi(m)} n^{\frac{r}{2}}$$

$$= B n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} + B n^{\frac{r}{2}} \log^{-\frac{E}{4}} n = B n^{\frac{r}{2}} \log^{-\frac{E}{4}} n \quad (69); \tag{70}$$

$$(71)\quad \mathfrak{T}_r(n) = \left(\frac{r}{2} - 1\right) \mathfrak{S}_r(n) \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} L\,i(u)\,du + B\,n^{\frac{r}{2}} \log^{-\frac{\mathfrak{E}}{4}} n \qquad \textbf{(66, 67, 68, 70).}$$

Aus (57), (59), (61) und (71) ergibt sich schließlich

$$N_r(n) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \sum_{p<n} (n-p)^{\frac{r}{2}-1} \mathfrak{S}_{r,0}(n-p) + B\,n^{\frac{r}{4}+1}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \mathfrak{T}_r(n) + B\,n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}-1\right)} \mathfrak{S}_r(n) \int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}-2} L\,i(u)\,du + B\,n^{\frac{r}{2}} \log^{-\frac{1}{4\varepsilon}} n.$$

Ersetzt man hier ε durch $\frac{\varepsilon}{4}$, so ergibt sich die Behauptung (5) für $r \geqq 5$.

Radość, den 16. Juni 1935.

(Eingegangen am 23. Juni 1935.)

Kurven- und Stieltjes-Integral.

Von

Lothar Heffter in Freiburg i. B.

1. Jedem, der sich sowohl mit reellen Kurvenintegralen wie mit Stieltjes-Integralen befaßt hat, dürfte die enge Verwandtschaft dieser beiden Begriffe etwas Selbstverständliches sein. Trotzdem sind mir in der Literatur nur zwei Stellen bekannt geworden, wo diese Verwandtschaft berührt wird: 1. S. Pollard, The Stieltjes' integral and its generalisations (Quart. Journ. of Math. Vol 49. 1, 2. 1920/21) schließt seine Einleitung mit den Worten „And the paper concludes with an application to curvilinear integrals". Aber die Abhandlung bricht mit den Worten ab „To be continued", und nach vergeblichen Nachforschungen an zuständigen Stellen scheint dieser Schluß nie erschienen zu sein. — 2. P. Dienes, The Taylor Series, Oxford 1931, *definiert* S. 207 nach vorangehender Definition des Stieltjes-Integrals das Kurvenintegral durch die Gleichung

$$\oint_C f(x,y)\,dx = \int_{t_0}^{T} f(t)\,d\varphi(t), \tag{1}$$

wo C eine durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegebene rektifizierbare Kurve, $f(x,y)$ längs C stetig in x, y und $f(t) \equiv f[\varphi(t), \psi(t)]$ ist. Das Kurvenintegral wird also durch (1) als spezielles Stieltjes-Integral definiert.

2. Nun ist aber historisch der Begriff des Kurvenintegrals längs rektifizierbarer Linie[1]) älter als der des Stieltjes-Integrals[2]). Man wird deshalb den Wunsch haben, aus der selbständigen Definition des Kurvenintegrals dieses als Stieltjes-Integral zu erkennen, aber auch umgekehrt jedes Stieltjes-Integral, wenigstens bei stetiger Belegungsfunktion $\varphi(t)$, als Kurvenintegral darzustellen, um dann die Theorie der Kurvenintegrale für diese Stieltjes-Integrale ausnützen zu können. Hierfür scheint mir besonders brauchbar Teil I meiner Arbeit „Zur Theorie der reellen Kurvenintegrale"[3]), weil ich dort das Kurvenintegral etwas abweichend von

[1]) C. Jordan, Cours d'Anal., 2me Éd. I. 1893, S. 181 ff.

[2]) T. J. Stieltjes, Annal. de la fac. des sciences de Toulouse (1) 8. 1894.

[3]) Gött. Nachr. 1902, also 8 Jahre nach der Arbeit von Stieltjes selbst, aber 8 Jahre vor allen weiteren Untersuchungen über Stieltjes-Integrale erschienen, die erst 1910 einsetzten; vgl. Montel-Rosenthal, Enc. d. math. Wiss., II. 3_2, S. 1071 ff. — Die Ausführungen der gegenwärtigen Note hätten also — abgesehen von Nr. 1 — schon vor 33 Jahren erfolgen können, wenn — mir damals die Abhandlung von Stieltjes bekannt gewesen wäre!

C. Jordan — u. a. ohne Benutzung des Begriffs der Kurvenlänge — definiert und aus dieser Definition die ganze Theorie der reellen Kurvenintegrale gewonnen habe. Ich habe dort bewiesen:

Die Kurve C sei dargestellt durch die reellen Funktionen der reellen Variablen t

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{2}$$

die im Intervall (t_0, T) *eindeutig*, mit Einschluß der Grenzen *stetig* und von *beschränkter Schwankung* sind[4]). ($\varphi(t_0) \equiv a$, $\psi(t_0) \equiv \alpha$, $\varphi(T) \equiv b$, $\psi(T) \equiv \beta$.) — $f(x, y)$ sei eine längs C von a, α bis b, β *eindeutige*, mit Einschluß der Grenzen *stetige*, *reelle* Funktion von x, y. — Entsprechen dann einer monotonen Folge $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n \equiv T$ nach (2) die Werte

$x_0 (\equiv a), x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n (\equiv b)$ und $y_0 (\equiv \alpha), y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n (\equiv \beta)$

und ist ξ_k, η_k ein Kurvenpunkt, der dem beliebigen Wert τ_k des Intervalles (t_{k-1}, t_k) entspricht, so existiert für $n \to \infty$ und alle $t_k - t_{k-1} \to 0$ der bestimmte endliche Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k, \eta_k)(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) \tag{3}$$

$$\equiv \int_{a,\,\alpha}^{b,\,\beta} f(x, y)\, dx \quad [5]).$$

Ferner habe ich (S. 120) angedeutet, daß auch unter Verzicht auf die Stetigkeit von f der Grenzwert (3) existiert, wenn längs C $f(x, y)$ nur *beschränkt* und *in bezug auf* x *integrabel* ist, d. h. wenn

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \gamma_k |x_k - x_{k-1}| = 0, \tag{4}$$

wo γ_k die Maximalschwankung von f auf C von x_{k-1}, y_{k-1} bis x_k, y_k bedeutet[6]). Bei der Summenbildung (3) brauchte dann $f(\xi_k, \eta_k)$ gar nicht

---

[4]) Da hiernach φ und ψ als Differenzen monotoner Funktionen darstellbar sind, so wäre es keine wesentliche Beschränkung gewesen, φ und ψ selbst als *monoton* anzunehmen.

[5]) A. o. O. S. 119, Zeile 17 und 18 muß es natürlich heißen $\frac{t_k + t_{k-1}}{2}$ statt $\frac{t_k - t_{k-1}}{2}$. — S. 120, Formel (10) fehlt links vor $|S - S'|$ der Zusatz lim. — Endlich hätte ergänzend in bekannter Weise noch gezeigt werden sollen, daß der Grenzwert unabhängig davon ist, *wie* man auch die Teilintervalle des t-Intervalles gegen 0 konvergieren läßt.

[6]) Die a. a. O. nicht ausdrücklich genannte Voraussetzung der wenigstens abteilungsweise vorhandenen Monotonie von φ ist für die Herleitung der dortigen Formel (11) notwendig.

Funktionswert für einen Punkt ξ_k, η_k, sondern nur eine Zahl zwischen der unteren und der oberen Grenze der Funktionswerte in jenem Kurvenstück zu sein.

3. Führt man nun, wie P. Dienes a. a. O., die Bezeichnung ein

$$f(\varphi(t),\ \psi(t)) \equiv f(t) \tag{5}$$

und wählt ξ_k, η_k als Werte von φ, ψ für einen beliebigen Wert τ_k von t aus dem Intervall $(t_{k-1},\ t_k)$, so wird aus (3) unter Benutzung der Definition des Stieltjes-Integrals

$$\oint_{a,\ \alpha}^{b,\ \beta} f(x, y)\, d\, x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(\tau_k)\,(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) = \int_{t_0}^{T} f(t)\, d\, \varphi(t), \tag{6}$$

d. h. *aus der Summendefinition des Kurvenintegrals und der Summendefinition des Stieltjes-Integrals folgt genau* Gl. (1), die Dienes zur *Definition* des Kurvenintegrals benutzt. *Jedes Kurvenintegral ist also ein Stieltjes-Integral.*

Je nachdem dabei $f(x, y)$ längs C *stetig* oder nur *beschränkt* und *in bezug auf* x *integrabel* ist, ist in dem Stieltjes-Integral $f(t)$ in $(t_0,\ T)$ *stetig* oder nur *beschränkt* und in bezug auf die dann *monoton* vorausgesetzte, stetige Belegungsfunktion $\varphi(t)$ *integrabel*, d. h.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{k=n} \gamma_k\, |\, \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\, | = 0, \tag{7}$$

wo γ_k die Maximalschwankung von $f(t)$ im Intervall $(t_{k-1},\ t_k)$ bedeutet. Im letzteren Fall kann unter $f(\tau_k)$ ein beliebiger Wert zwischen der unteren und der oberen Grenze von $f(t)$ in $(t_{k-1},\ t_k)$ verstanden werden.

4. Ist umgekehrt für die in $(t_0,\ T)$ stetige und monotone Belegungsfunktion $\varphi(t)$ und die in $(t_0,\ T)$ stetige oder beschränkte und in bezug auf $\varphi(t)$ integrable Funktion $f(t)$ das Stieltjes-Integral definiert durch die Gleichung

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\, d\, \varphi(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(\tau_k)\,(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})), \tag{8}$$

so bestimmen wir die Kurve C durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \quad y = t \quad (\varphi(t_0) \equiv a,\ t_0 \equiv \alpha,\ \varphi(T) \equiv b,\ T \equiv \beta) \tag{9}$$

und erhalten

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\, d\, \varphi(t) = \oint_{a,\ \alpha}^{b,\ \beta} f(y)\, d\, x, \tag{10}$$

d. h. ein *Kurvenintegral*, bei dem f und C die für seine Definition gemachten Voraussetzungen erfüllen. *Jedes Stieltjes-Integral mit stetiger Belegungs-*

funktion $\varphi(t)$ ist also als Kurvenintegral längs einer durch $\varphi(t)$ bestimmten Kurve C darstellbar.

Wegen der Monotonie von $\varphi(t)$ folgt aus (9) und (10) noch:

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\, d\,\varphi(t) = \int_{a}^{b} f(\varrho(x))\, d\,x, \tag{11}$$

wo $\varrho(x)$ die *inverse* Funktion von $x = \varphi(t)$ ist.

5. Nach 4. ergeben sich nun aus den a. a. O., S. 122/128 abgeleiteten Sätzen über Kurvenintegrale unmittelbar u. a. folgende *Sätze für Stieltjes-Integrale* mit *stetiger* und *monotoner Belegungsfunktion* $\varphi(t)$:

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\, d\,\varphi(t) = -\int_{T}^{t_0} f(t)\, d\,\varphi(t), \tag{12}$$

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\, d\,\varphi(t) = \int_{t_0}^{T_1} f(t)\, d\,\varphi(t) + \int_{T_1}^{T} f(t)\, d\,\varphi(t), \tag{13}$$

wobei t_0, T_1, T einem Intervall angehören, in dem die Voraussetzungen erfüllt sind.

Satz vom *Mittelwert der Integrandenfunktion*:

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\, d\,\varphi(t) = f(\tau)\,[\varphi(T) - \varphi(t_0)], \tag{14}$$

wo $f(\tau)$ ein Mittelwert der Integrandenfunktion in (t_0, T) ist, der nicht Funktionswert zu sein braucht.

Aus § 2 (8) (a. a. O. S. 122 ff.) folgt der „*Fundamentalsatz* der Integralrechnung", zugleich die Formel der *partiellen Integration* für Stieltjes-Integrale, wenn $f(t)$ und $\varphi(t)$ stetig und monoton sind, und man hier die Kurve $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$ als C benutzt:

$$\int_{t_0}^{T} [f(t)\, d\,\varphi(t) + \varphi(t)\, d\, f(t)] = f(T)\,\varphi(T) - f(t_0)\,\varphi(t_0). \tag{15}$$

Aus § 3 (a. a. O. S. 125, 126) folgt die *Transformation des Stieltjes-Integrals*

$$\int_{t_0}^{T} f(t)\, d\,\varphi(t) = \int_{t_0}^{T} f(t)\, r'(\overline{\varphi}(t))\, d\,\overline{\varphi}(t), \tag{16}$$

wenn $f(t)$ stetig, $\varphi(t)$ stetig und monoton, $\overline{\varphi}(t)$ in (t_0, T) eindeutig, stetig und monoton ist,

$$\varphi(t) = r(\overline{\varphi}(t)) \tag{17}$$

und $r(u)$ eine mit ihrer ersten Ableitung $r'(u)$ eindeutige und stetige Funktion ist.

Endlich ist das Stieltjes-Integral als *Funktion der oberen Grenze*

$$\int_{t_0}^{t} f(t)\, d\,\varphi(t) \equiv F(t) \tag{18}$$

eine *eindeutige* Funktion von t. Nach (14) ist bei *stetigem*, *monotonem* $\varphi(t)$

$$F(t+h) - F(t) = f(t+\vartheta h)\,(\varphi(t+h) - \varphi(t)), \quad (0 < \vartheta < 1), \tag{19}$$

also $F(t)$ *stetig*, wenn $f(t)$ wenigstens *beschränkt* ist.

Bei *stetigem* $f(t)$ folgt hieraus für $h \to 0$,

$$\frac{d\,F(t)}{d\,\varphi(t)} = f(t), \tag{20}$$

und, wenn $\varphi(t)$ *differenzierbar* ist, so ist es auch $F(t)$, und zwar ist

$$\frac{d\,F(t)}{d\,t} = f(t)\,\frac{d\,\varphi(t)}{d\,t}. \tag{21}$$

Freiburg i. B., den 5. Juli 1935.

Nachtrag bei der Korrektur: Auch H. Lebesgue, Lecons sur l'intégration etc., 2me Éd., Paris 1928, S. 258, bemerkt, daß bei speziellen Voraussetzungen über die Belegungsfunktion das Stieltjes-Integral sich auf ein Kurvenintegral reduziert.

(Eingegangen am 8. Juli 1935.)

Thetarelationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung.

Von

Gustav Doetsch in Freiburg i. B.

I. Das Huygenssche Prinzip.

1. In der Wellenoptik, d. h. in der Theorie der Wellengleichung, der einfachsten partiellen Differentialgleichung von hyperbolischem Typ, besagt *das Huygenssche Prinzip*, daß jeder von einer Lichtwelle getroffene Punkt selbst wieder Ausgangspunkt einer Lichterregung ist, so daß man die von gewissen Lichtquellen in einem Punkt P erzeugte Erregung statt *unmittelbar* auch dadurch erhalten kann, daß man P in eine Fläche einschließt, zunächst die Erregung in deren Punkten bestimmt und dann die Erregung in P als Superposition der von der Fläche ausgehenden Wellen berechnet. Hadamard[1]) hat dieses Prinzip sinngemäß *für beliebige partielle Differentialgleichungen* etwa in folgender Weise ausgesprochen: Liegt ein Randwertproblem vor, d. h. ist für einen Bereich $\mathfrak{B}$ eine Funktion U gesucht, die im Innern einer partiellen Differentialgleichung genügen und auf dem Rand $\mathfrak{R}$ (eventuell auch mit gewissen Ableitungen) vorgeschriebene Werte $U(\mathfrak{R})$ annehmen soll, und kennt man eine Lösungsformel, so kann man den Funktionswert in einem inneren Punkt P einmal direkt, ein andermal aber auch so berechnen, daß man um P einen in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Bereich $\mathfrak{B}'$ abgrenzt, für seine Berandung $\mathfrak{R}'$ zunächst die aus $U(\mathfrak{R})$ resultierenden Randwerte $U(\mathfrak{R}')$ ausrechnet und dann mit diesen Randwerten die Lösungsformel für $\mathfrak{B}'$ anschreibt. Gleichsetzen der beiden so erhaltenen Ausdrücke wird, wenn die Lösungsformel beispielsweise von Greenscher Art war, für die Greensche Funktion eine *transzendente (Integral-) Relation* und zwar im allgemeinen ein *Additionstheorem* liefern. — Meist liegen die so erhaltenen Ergebnisse sehr versteckt und sind auf direktem Weg schwierig zu beweisen.

[1]) J. Hadamard, Principe de Huyghens et prolongement analytique. Bull. Soc. Math. France 52 (1924), S. 241—278; siehe auch seinen Vortrag, ebenda S. 610—640. Ausgesprochen ist das Prinzip bereits in früheren Arbeiten, z. B. Sur un problème mixte aux dérivées partielles. Bull. Soc. Math. France 31 (1903), S. 208—224.

Einfaches Beispiel: Das Dirichletsche Problem für den Kreis (Polarkoordinaten des laufenden Punktes der Peripherie R, ϑ; die eines Punktes im Innern r, φ) wird durch das Poissonsche Integral gelöst:

$$(1, 11) \qquad U(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} Q(R, r, \vartheta - \varphi)\, U(R, \vartheta)\, d\vartheta$$

mit der Greenschen Funktion

$$(1, 12) \qquad Q(R, r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\alpha + r^2}.$$

Wählen wir eine Kreisperipherie (laufender Punkt R', ϑ') mit $r < R' < R$, so können wir nach der Poissonschen Formel zunächst die Werte in (R', ϑ') ausrechnen und dann in die für den Kreis vom Radius R' angesetzte Formel einführen. Das ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} Q(R, r, \vartheta - \varphi)\, U(R, \vartheta)\, d\vartheta \\ &\quad = \int_0^{2\pi} Q(R', r, \vartheta' - \varphi)\, d\vartheta' \int_0^{2\pi} Q(R, R', \vartheta - \vartheta')\, U(R, \vartheta)\, d\vartheta \\ &\quad = \int_0^{2\pi} U(R, \vartheta)\, d\vartheta \int_0^{2\pi} Q(R, R', \vartheta - \vartheta')\, Q(R', r, \vartheta' - \varphi)\, d\vartheta'. \end{aligned}$$

Da das für jedes stetige $U(R, \vartheta)$ gilt, so folgt:

$$(1, 13)\ Q(R, r, \vartheta - \varphi) = \int_0^{2\pi} Q(R, R', \vartheta - \vartheta')\, Q(R', r, \vartheta' - \varphi)\, d\vartheta' \quad \text{für } r < R' < R.$$

Rechts kommen die Werte $\vartheta - \vartheta'$ und $\vartheta' - \varphi$, links ihre Summe $\vartheta - \varphi$ vor, es hat sich also ein Additionstheorem für $Q(R, r, \alpha)$ ergeben, das übrigens, wenn man Q nach Kugelfunktionen entwickelt, zu interessanten Relationen für diese führt.

Es muß noch bemerkt werden, daß die beiden auf verschiedenen Wegen für die Lösung gefundenen Werte selbstverständlich nur dann gleichgesetzt werden können, wenn die *Eindeutigkeit* der Lösung gesichert ist.

2. In vielen Fällen kann man zu demselben Resultat auf einem einfacheren Weg gelangen, den ich, um eine kurze Bezeichnung dafür zu haben, als *reflexives Prinzip* bezeichnen will[2]). Läßt sich die Lösung eines Randwertproblems durch ein Integral mit einer Greenschen Funktion oder einer Fundamentallösung als Kern darstellen, so ist es oft so, daß die Greensche Funktion für ein Grundgebiet selbst eine Lösung der Differentialgleichung, wenn auch in einem eingeschränkten Gebiet, darstellt

[2]) Dieses Prinzip habe ich, ohne ihm diesen Namen zu geben, schon in der Arbeit: Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. III. Mitteilung. Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 608—626 [S. 615] formuliert und angewendet.

(für eine Fundamentallösung ist das ja selbstverständlich der Fall). Dann kann man die Lösungsformel in diesem kleineren Gebiet direkt auf die Greensche Funktion oder die Fundamentallösung anwenden und erhält so eine Integralrelation für sie. Wie man sieht, kann die Gleichung (1, 13) viel einfacher auf diesem Weg entstanden gedacht werden: $Q(R, r, \vartheta - \varphi)$ ist in dem Kreise vom Radius $R' < R$ eine reguläre Lösung. Ihre Randwerte sind $Q(R, R', \vartheta - \vartheta')$, die Greensche Funktion in dem kleineren Kreis ist $Q(R', r, \vartheta' - \varphi)$, also läßt sich $Q(R, r, \vartheta - \varphi)$ für $r < R'$ durch die Poissonsche Formel in der durch (1, 13) gegebenen Gestalt darstellen.

3. Wollen wir das Huygenssche bzw. das reflexive Prinzip auf die Theorie der *linearen Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{1, 31}$$

in dem Halbstreifen $0 < x < l$, $t > 0$ anwenden, so brauchen wir zunächst einen *Eindeutigkeitssatz*, der auf unsere Fälle zutrifft[3]). In diesem Abschnitt werden wir mit folgendem *Satz von Gevrey*[4]) auskommen:

Sind in einem Rechteck $0 \leqq x \leqq l$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ auf der linken, rechten und unteren Seite stetige Randwerte vorgeschrieben, so gibt es höchstens eine Funktion $U(x, t)$ mit folgenden Eigenschaften: Sie genügt im Innern der Gleichung (1, 31), sie ist im abgeschlossenen Rechteck stetig, $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial t}$ sind im Innern stetig, und $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ existiert im Innern.

4. Wir knüpfen nun zuerst an folgendes *Randwertproblem* an: Gegeben sind in dem Halbstreifen die Randwerte[5]):

$$\lim_{x \to 0} U(x, t) = A(t), \quad \lim_{x \to l} U(x, t) = B(t), \quad \lim_{t \to 0} U(x, t) = \Phi(x). \tag{1, 41}$$

Die bekannte Lösung lautet:

$$U(x,t) = A(t) * G(x,t; l) + B(t) * G(l - x, t; l) + \int_0^l \Phi(\xi)\, \Gamma(x, \xi, t)\, d\xi \tag{1, 42}$$

---

[3]) Über die verschiedenen in der Literatur vorliegenden Eindeutigkeitssätze bei parabolischen Gleichungen und ihre Bewertung siehe meinen Genfer Vortrag: Les équations aux dérivées partielles du type parabolique. (Abschnitt III), der in L'Enseignement Mathématique erscheint.

[4]) M. Gevrey, Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Journ. de Math. (6) 9 (1913), S. 305–471 [S. 373]. Siehe auch die unter [3]) zitierte Arbeit, Abschnitt III, 2, [1]).

[5]) Die Funktionen $A(t)$, $B(t)$ und $\Phi(x)$ setzen wir, was im folgenden genügt, als stetig voraus. Ist außerdem $A(0) = \Phi(0)$, $B(0) = \Phi(l)$, so konvergiert U überall im zweidimensionalen Sinn gegen die Randwerte („spezielle" Problemstellung). Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so werden die Randwerte wenigstens bei eindimensionalem, senkrechten Vorgehen gegen den Rand angenommen („allgemeine" Problemstellung). Näheres hierüber in der unter [3]) angegebenen Arbeit, Abschnitt II.

mit

$$(1,43)\qquad G(x,t;l) = -\frac{1}{l}\,\frac{\partial\,\vartheta_3\left(\frac{x}{2l},\,\frac{t}{l^2}\right)}{\partial x}$$

und

$$(1,44)\qquad \Gamma(x,\xi,t) = \frac{1}{2l}\left\{\vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2l},\,\frac{t}{l^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2l},\,\frac{t}{l^2}\right)\right\},$$

wobei

$$(1,45)\qquad \vartheta_3(v,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2ni\pi v - n^2\pi^2\tau} = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(v+n)^2}{\tau}}$$

und die „Faltung" $F_1 * F_2$ so definiert ist:

$$(1,46)\qquad F_1(t) * F(t) = \int_0^t F_1(\tau)\,F_2(t-\tau)\,d\tau.$$

a) Anwendung des Huygensschen Prinzips in der x-Richtung.

Wir schreiben die Randwerte $A(t) \equiv 1$, $B(t) \equiv 0$, $\Phi(x) \equiv 0$ vor und schalten im Sinne des Huygensschen Prinzips bei $x_0\,(0 < x_0 < l)$ eine Zwischenstation ein, indem wir die Gerade $x = x_0$ als Rand eines kleineren Bereiches betrachten. Dann können wir für $x_0 < x < l$ den Wert $U(x,t)$ das eine Mal direkt, das andere Mal durch sprungweises Vorgehen berechnen und, da für $x_0 < x < l$ die Voraussetzungen des Satzes von Gevrey offenbar zutreffen[6]), die erhaltenen Ausdrücke gleichsetzen. Das ergibt:

$$1 * G(x,t;l) = 1 * G(x_0,t;l) * G(x-x_0,t;l-x_0),$$

woraus, da $1 * G = \int_0^t G\,d\tau$ ist, durch Differentiation folgt:

$$(1,401)\quad G(x,t;l) = G(x_0,t;l) * G(x-x_0,t;l-x_0) \text{ für } 0 < x_0 < x < l.$$

Natürlich kann man diese Relation auch einfacher nach dem reflexiven Prinzip erhalten, indem man auf die Funktion $G(x,t;l)$ in dem Halbstreifen $x_0 < x < l$, $t > 0$, wo sie auf dem linken, rechten und unteren Rand bzw. die Randwerte $G(x_0,t;l), 0, 0$ besitzt und die Voraussetzungen des Satzes von Gevrey erfüllt, die Lösungsformel (1, 42) anwendet.

Explizit geschrieben lautet das erhaltene Additionstheorem (1, 401) so:

$$(1,402)\qquad \boxed{\frac{\partial\,\vartheta_3\left(\frac{x}{2l},\,\frac{t}{l^2}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{l-x_0}\,\frac{\partial\,\vartheta_3\left(\frac{x_0}{2l},\,\frac{t}{l^2}\right)}{\partial x_0} * \frac{\partial\,\vartheta_3\left(\frac{x-x_0}{2\,(l-x_0)},\,\frac{t}{(l-x_0)^2}\right)}{\partial x}}$$
$$(0 < x_0 < x < l)$$

[6]) Man beachte, daß in $0 < x < l$ die Voraussetzungen nicht erfüllt wären.

In der Viertelebene $x > 0$, $t > 0$ artet die Funktion G aus in

$$\psi(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}, \tag{1, 403}$$

und die Anwendung des Huygensschen bzw. des reflexiven Prinzips führt auf das zuerst von Cesàro entdeckte, sehr einfache Additionstheorem:

$$\boxed{\psi(x_1 + x_2, t) = \psi(x_1, t) * \psi(x_2, t) \qquad (x_1, x_2 > 0).} \tag{1, 404}$$

Allerdings müßte man hier einen in der Viertelebene gültigen Eindeutigkeitssatz, der auf unser Beispiel zuträfe, heranziehen. Da wir aber (1, 404) in Abschnitt III viel leichter mit Hilfe einer anderen Methode beweisen können, wollen wir uns das hier sparen.

b) Anwendung des Huygensschen Prinzips in der t-Richtung.

Schreibt man die Randwerte $A(t) \equiv 0$, $B(t) \equiv 0$, $\Phi(x)$ vor und schaltet jetzt in vertikaler Richtung eine Zwischenstation ein, so erhält man ein Additionstheorem für die Funktion Γ[7]), das sich noch einfacher dadurch ableiten läßt, daß man gemäß dem reflexiven Prinzip die Lösungsformel (1, 42) auf die Funktion $\Gamma(x, y, t)$ in dem Halbstreifen $0 < x < l$, $t > t_2$, wo sie die Randwerte 0, 0, $\Gamma(x, y, t_2)$ hat und die Voraussetzungen des Gevreyschen Satzes erfüllt, zur Bestimmung des Wertes zur Zeit $t = t_1 + t_2$ anwendet:

$$\boxed{\Gamma(x, y, t_1 + t_2) = \int_0^l \Gamma(x, \xi, t_1)\, \Gamma(\xi, y, t_2)\, d\xi \quad \begin{pmatrix} 0 < x,\ y < l \\ t_1,\ t_2 > 0 \end{pmatrix}} \tag{1, 411}$$

So wie $G(x, t; l)$ im Falle der Viertelebene $x > 0$, $t > 0$ in die Funktion $\psi(x, t)$, so artet $\Gamma(x, \xi, t)$ im Falle der Halbebene $t > 0$ in die Funktion

$$\frac{1}{2}\chi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{1, 412}$$

aus, denn für das unendliche Intervall $-\infty < x < +\infty$ lautet die von Poisson herrührende Lösung, wenn auf dem Rand $t = 0$ die Funktion $\Phi(x)$ vorgeschrieben ist:

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)\, \chi(x - \xi, t)\, d\xi. \tag{1, 413}$$

---

[7]) Es findet sich nach dem Huygensschen Prinzip abgeleitet bereits in meinem 1923 gehaltenen Vortrag: Über das Problem der Wärmeleitung. Jahresber. DMV 33 (1925), S. 45—52 und nach dem reflexiven Prinzip in der unter [2]) zitierten Arbeit.

Wendet man analog zu oben das reflexive Prinzip auf die Funktion $\chi(x-y,t)$ in der t-Richtung an, so ergibt sich das Additionstheorem

$$(1,414)\qquad \boxed{\chi(x-y,t_1+t_2)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi(x-\xi,t_1)\,\chi(\xi-y,t_2)\,d\xi}$$

das sich explizit so schreiben läßt:

$$(1,415)\qquad \frac{1}{\sqrt{t_1+t_2}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t_1+t_2)}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t_1 t_2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t_1}-\frac{(\xi-y)^2}{4t_2}}d\xi$$

und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wohlbekannt ist, wo es so gedeutet wird: Gehorchen zwei zufällige Variable beide dem Gaußschen Fehlergesetz, die eine mit dem Präzisionsmaß $1/t_1$, die andere mit $1/t_2$, so gehorcht ihre Summe ebenfalls dem Gaußschen Gesetz, aber mit dem Präzisionsmaß $\frac{1}{t_1+t_2}$.

Hier gilt natürlich eine analoge Bemerkung wie bei (1, 404), daß noch die Eindeutigkeit bewiesen werden müßte. Aber auch (1, 414) werden wir in Abschnitt III nochmals auf andere Art beweisen.

5. Wir wollen die Anwendbarkeit des Huygensschen Prinzips noch an einem *anderen Randwertproblem* zeigen, wo der Typus der gewonnenen Relation ein etwas anderer ist.

Unter den Randbedingungen

$$(1,51)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\partial U}{\partial x}=C(t),\quad \lim_{x\to l}\frac{\partial U}{\partial x}=0,\quad \lim_{t\to 0}U(x,t)=0$$

lautet die Lösung von (1, 31):

$$(1,52)\qquad U(x,t)=-C(t)*\frac{1}{l}\,\vartheta_3\left(\frac{x}{2l},\frac{t}{l^2}\right).$$

Wir wenden (nach dem reflexiven Prinzip) diese Formel auf die Greensche Funktion des Problems, d. h. auf $\vartheta_3\left(\frac{x}{2l},\frac{t}{l^2}\right)$ in dem Intervall $x_0<x<l$ $(x_0>0)$ an. Die partielle Ableitung der Funktion nach x hat die Randwerte $\frac{\partial\,\vartheta_3\left(\frac{x_0}{2l},\frac{t}{l^2}\right)}{\partial x_0}$ und 0, die Funktion selbst den „Anfangswert" 0, also ergibt (1, 52) das Additionstheorem:

$$(1,53)\qquad \boxed{\vartheta_3\left(\frac{x}{2l},\frac{t}{l^2}\right)=-\frac{1}{l-x_0}\frac{\partial\,\vartheta_3\left(\frac{x_0}{2l},\frac{t}{l^2}\right)}{\partial x_0}*\vartheta_3\left(\frac{x-x_0}{2(l-x_0)},\frac{t}{(l-x_0)^2}\right)}$$

$$(0<x_0<x<l)$$

Da die früher gefundene Relation (1, 402) aus (1, 53) offenbar durch Differentiation nach x hervorgeht, so darf man (1, 53) wohl als das zentrale Additionstheorem von $\vartheta_3(v, \tau)$ hinsichtlich v ansehen. Vergleicht man es mit den in einer früheren Arbeit[8]) abgeleiteten Additionstheoremen für die Thetafunktionen, so ist es zwar von nicht ganz so glatter Bauart wie sie, dafür machten diese aber die Heranziehung von anderen Funktionen, die dort mit $\overline{\vartheta}$ bezeichnet wurden, nötig.

II. Das Eulersche Prinzip.

1. Beim Huygensschen Prinzip wird das Grundgebiet der Integration geändert, während der Typus des Randwertproblems derselbe bleibt. *Das Eulersche Prinzip*[9]) behält umgekehrt das Grundgebiet bei, bestimmt darin aber ein und dieselbe Lösung auf zwei verschiedene Arten, z. B. auf Grund zweier verschiedener Typen von Randwerten, also etwa eine Lösung der Laplaceschen Gleichung in demselben Bereich einmal auf Grund der Randwerte der Funktion, das andere Mal auf Grund der Randwerte der Normalableitung. Berechnet man die Randwerte der Ableitung auf Grund der ersten Darstellung und setzt sie in die zweite Darstellung ein, so erhält man eine meist transzendente *Relation zwischen den Greenschen Funktionen* der beiden Probleme.

Auch hier kann man wie beim Huygensschen Prinzip manche Relationen auf *einfacherem Weg* erhalten, indem man direkt die Greensche Funktion des einen Problems, wenn sie eine Lösung der Differentialgleichung ist, hernimmt, an ihr die für das andere Problem benötigten Randwerte abliest und sie in dessen Lösung einsetzt.

2. Beispiele für das Eulersche Prinzip aus der Theorie der Wärmeleitung wurden bereits in der unter[9]) zitierten Arbeit gegeben und unter anderen eine Relation zwischen den Funktionen ϑ_2 und ϑ_3 abgeleitet, die als Spezialfall die F. Bernsteinsche Integralgleichung der Thetanullfunktion $\vartheta_3(0, t)$ enthält. Die folgenden Anwendungen des Eulerschen Prinzips ergeben einige recht übersichtlich gebaute Relationen für die Funktion ϑ_3, die als Typen derartiger Relationen gedacht sind und deren Anzahl bedeutend vermehrt werden könnte.

Die auch hier natürlich notwendige *Eindeutigkeit* werden wir in unseren Beispielen nicht mit dem Satz von Gevrey garantieren können,

---

[8]) G. Doetsch, Transzendente Additionstheoreme der elliptischen Thetafunktionen und andere Thetarelationen vom Faltungstypus. Math. Annalen 90 (1923), S. 19—25.

[9]) G. Doetsch, Das Eulersche Prinzip. Randwertprobleme der Wärmeleitungstheorie und physikalische Deutung der Integralgleichung der Thetafunktion. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa (2) 2 (1933), S. 325—342.

da die Funktionen nicht bis auf den Rand hinauf stetig, ja nicht einmal beschränkt sind. Es gibt in der Literatur bisher überhaupt keinen Eindeutigkeitssatz, der bei diesen Beispielen anwendbar wäre. Es bleibt also zunächst die Möglichkeit offen, daß die auf verschiedenen Wegen erhaltenen Lösungen nicht übereinstimmen, sondern um eine sogenannte singuläre Lösung[10]), das ist eine nicht identisch verschwindende Lösung mit den Randwerten 0, differieren[11]). Wir werden jedoch in Abschnitt III die erhaltenen Relationen noch auf anderem Weg beweisen können, womit dann dieses Bedenken ausgeräumt ist.

3. Wir nehmen die Greensche Funktion des Problems aus I 5 für $l = 1$, also $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)$ her und drücken sie als Lösung des Problems in I 4 aus. Da sie die Randwerte

$$A(t) \equiv \vartheta_3(0, t), \quad B(t) \equiv \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, t\right), \quad \Phi(x) \equiv 0$$

hat, so ergibt sich für $0 < x < 1$:

$$\text{(2, 31)} \qquad \boxed{\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right) = -\vartheta_3(0, t) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)}{\partial x} + \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, t\right) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{1-x}{2}, t\right)}{\partial x}}$$

Durch Integration dieser Gleichung von 0 bis x erhält man:

$$\text{(2, 32)} \qquad \int_0^x \vartheta_3\left(\frac{\xi}{2}, t\right) d\xi = -\vartheta_3(0, t) * \left\{\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right) - \vartheta_3(0, t)\right\} + \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, t\right) * \left\{\vartheta_3\left(\frac{1-x}{2}, t\right) - \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, t\right)\right\}.$$

Für $x = 1$ ist die linke Seite, wie man leicht nachrechnet, unabhängig von t gleich 1. Für diesen Spezialwert führt also (2, 32) zu der Relation

$$\text{(2, 33)} \qquad \boxed{\left\{\vartheta_3(0, t) + \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, t\right)\right\} * \left\{\vartheta_3(0, t) - \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, t\right)\right\} = \vartheta_3(0, t)^{*2} - \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, t\right)^{*2} = 1}$$

die schon in einer früheren Arbeit aufgestellt wurde[12]). Subtrahiert man (2, 32) von (2, 33), so erhält man die formal sehr einfache Gleichung

---

[10]) Ausführlicheres hierüber siehe in der unter [3]) zitierten Arbeit, Abschnitt III.

[11]) Daß derartiges wirklich vorkommen kann, wurde in der Arbeit: Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. II. Mitteilung. Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 293 – 306 [S. 300] und in dem unter [3]) zitierten Vortrag, III, 3, an Beispielen gezeigt.

[12]) Siehe l. c. [8]), S. 25. Dort steht an Stelle von $\vartheta_3\left(\frac{1}{2}, t\right)$ die gleichbedeutende Funktion $\vartheta_0(0, t)$.

$$(2,34)\qquad \boxed{\int_x^1 \vartheta_3\left(\frac{\xi}{2}, t\right) d\xi = \vartheta_3(0,t) * \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right) - \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, t\right) * \vartheta_3\left(\frac{1-x}{2}, t\right)}$$

die nun die sachgemäße Verallgemeinerung der Relation (2, 33) darstellt, in die sie für $x = 0$ übergeht.

4. Eine andere Verallgemeinerung von (2, 33) erhalten wir, wenn wir $\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)$ statt im Intervall $0 < x < 1$ in dem Teilintervall $0 < x < x_0 < 1$ vermittels (1, 42) darstellen:

$$(2,41)\quad \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right) = \vartheta_3(0,t) * G(x,t;x_0) + \vartheta_3\left(\frac{x_0}{2}, t\right) * G(x_0 - x, t; x_0)$$

$$= -\frac{1}{x_0}\vartheta_3(0,t) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2x_0}, \frac{t}{x_0^2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{x_0}\vartheta_3\left(\frac{x_0}{2}, t\right) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x_0 - x}{2x_0}, \frac{t}{x_0^2}\right)}{\partial x}.$$

Integriert man von 0 bis x:

$$\int_0^x \vartheta_3\left(\frac{\xi}{2}, t\right) d\xi = -\frac{1}{x_0}\vartheta_3(0,t) * \left\{\vartheta_3\left(\frac{x}{2x_0}, \frac{t}{x_0^2}\right) - \vartheta_3\left(0, \frac{t}{x_0^2}\right)\right\}$$

$$+ \frac{1}{x_0}\vartheta_3\left(\frac{x_0}{2}, t\right) * \left\{\vartheta_3\left(\frac{x_0 - x}{2x_0}, \frac{t}{x_0^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, \frac{t}{x_0^2}\right)\right\}$$

und setzt dann $x_0 = x$, so steht da:

$$(2,42)\qquad \boxed{\int_0^x \vartheta_3\left(\frac{\xi}{2}, t\right) d\xi = \frac{1}{x}\left\{\vartheta_3\left(0, \frac{t}{x^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{1}{2}, \frac{t}{x^2}\right)\right\} * \left\{\vartheta_3(0,t) + \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)\right\}}$$

Diese Relation enthält wieder (2, 33) für $x = 1$.

Bemerkenswert an (2, 34) und (2, 42) ist, daß das Integral von ϑ_3 nach x sich durch ein Integral hinsichtlich t darstellen läßt.

III. Abbildung der transzendenten Relationen auf algebraische durch Funktional-Transformationen.

1. Die vermittels des Huygensschen und Eulerschen Prinzips gefundenen Relationen kann man, so weit sie Faltungsintegrale enthalten, auch auf einem ganz anderen Weg ableiten, und zwar vermittelst der *Laplace-Transformation*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}\{F\},$$

die den „Objektfunktionen“ $F(t)$ die „Resultatfunktionen“ $f(s)$ zuordnet und dabei der *Faltung* zweier Objektfunktionen F_1 und F_2 einfach das *Produkt* der Resultatfunktionen f_1 und f_2 entsprechen läßt:

$$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\} \cdot \mathfrak{L}\{F_2\}$$

(Faltungssatz), z. B. wenn $\mathfrak{L}\{F_1\}$ und $\mathfrak{L}\{F_2\}$ absolut konvergieren[13]). *Transzendente* Relationen mit Faltungsintegralen werden daher durch die Laplace-Transformation einfach in *algebraische* Relationen übersetzt, und umgekehrt kann man jene transzendenten Relationen am leichtesten aus den algebraischen durch Umkehrung der Laplace-Transformation gewinnen[14]). So können wir alle Faltungsrelationen der Abschnitte I und II, insbesondere diejenigen, wo mangels eines geeigneten Eindeutigkeitssatzes noch die Möglichkeit des Hinzutretens einer singulären Lösung erwogen werden mußte, auf neuem Wege bestätigen. Hierfür nur einige Beispiele:

Der Funktion (1, 403) entspricht als Resultatfunktion $f(s) = e^{-x\sqrt{s}}$ für $x > 0$[15]), ihrem Additionstheorem $e^{-(x_1+x_2)\sqrt{s}} = e^{-x_1\sqrt{s}} \cdot e^{-x_2\sqrt{s}}$ also das Cesàrosche Additionstheorem (1, 404).

---

[13]) Näheres hierüber siehe in G. Doetsch, Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa (2) 4 (1935), S. 71—84.

[14]) Von dieser Methode habe ich in früheren Arbeiten häufig Gebrauch gemacht, siehe z. B. l. c. [8]); ferner: Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome. Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 587—599. Vgl. auch: Summatorische Eigenschaften der Besselschen Funktionen und andere Funktionalrelationen, die mit der linearen Transformationsformel der Thetafunktion äquivalent sind. Compositio Math. 1 (1934), S. 85—97.

[15]) Für diese Tatsache möchte ich bei dieser Gelegenheit einen ganz einfachen Beweis mitteilen. Die Substitution $\frac{\alpha}{u} = v\,(\alpha > 0)$ liefert

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\alpha}{u}-u\right)^2} du = \int_0^\infty \frac{\alpha}{v^2} e^{-\left(v-\frac{\alpha}{v}\right)^2} dv;$$

also ist

$$2\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\alpha}{u}-u\right)^2} du = \int_0^\infty \left(1+\frac{\alpha}{u^2}\right) e^{-\left(\frac{\alpha}{u}-u\right)^2} du \quad \left(\frac{\alpha}{u}-u = v \text{ gesetzt}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}.$$

Damit haben wir die Grundformel

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\alpha}{u}-u\right)^2} du = \alpha \int_0^\infty \frac{1}{u^2} e^{-\left(\frac{\alpha}{u}-u\right)^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\alpha > 0)$$

Zur Funktion $\vartheta_3(v,t)$ gehört als Resultatfunktion[16])

$$\mathfrak{L}\{\vartheta_3(v,t)\} = \frac{\mathfrak{Cof}(2v-1)\sqrt{s}}{\sqrt{s}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{s}}. \tag{3,11}$$

Ferner gilt:

$$\int_0^\infty e^{-st} F\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s u} F(u)\, du \quad (\alpha > 0),$$

also

$$\mathfrak{L}\left\{F\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right\} = \alpha\, \mathfrak{L}_{\alpha s}\{F(t)\}.$$

Hieraus entnehmen wir:

$$\mathfrak{L}\left\{\vartheta_3\left(\frac{x}{2x_0}, \frac{t}{x_0^2}\right)\right\} = x_0^2 \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{x_0}-1\right)\sqrt{x_0^2 s}}{\sqrt{x_0^2 s}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{x_0^2 s}} = x_0 \frac{\mathfrak{Cof}(x-x_0)\sqrt{s}}{\sqrt{s}\,\mathfrak{Sin}\, x_0\sqrt{s}} \tag{3,12}$$

und durch Differentiation:

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial\,\vartheta_3\left(\frac{x}{2x_0}, \frac{t}{x_0^2}\right)}{\partial x}\right\} = x_0 \frac{\mathfrak{Sin}(x-x_0)\sqrt{s}}{\mathfrak{Sin}\, x_0\sqrt{s}}. \tag{3,13}$$

Damit sind wir in der Lage, die Relation (2, 41) erneut abzuleiten. Die Resultatfunktion der rechten Seite ist nämlich:

$$-\frac{1}{x_0}\frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{s}}{\sqrt{s}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{s}} \cdot x_0 \frac{\mathfrak{Sin}(x-x_0)\sqrt{s}}{\mathfrak{Sin}\, x_0\sqrt{s}} + \frac{1}{x_0}\frac{\mathfrak{Cof}(x_0-1)\sqrt{s}}{\sqrt{s}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{s}} \cdot x_0 \frac{-\mathfrak{Sin}(-x\sqrt{s})}{\mathfrak{Sin}\, x_0\sqrt{s}} \tag{3,14}$$

$$= \frac{-\mathfrak{Cof}\sqrt{s}\,\mathfrak{Sin}(x-x_0)\sqrt{s} + \mathfrak{Cof}(x_0-1)\sqrt{s}\,\mathfrak{Sin}\, x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{s}\,\mathfrak{Sin}\, x_0\sqrt{s}}.$$

---

erhalten. — Der eine Teil dieser Formel liefert:

$$\mathfrak{L}\{\psi\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{x}{2\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt = e^{-x\sqrt{s}} \int_0^\infty \frac{x}{2\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\left(\sqrt{s}\,t - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dt$$

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} = u \text{ gesetzt}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x\sqrt{s}}{2}\frac{1}{u} - u\right)^2} du = e^{-x\sqrt{s}}.$$

Aus dem anderen Teil der Grundformel ergibt sich (siehe 1, 412):

$$\mathfrak{L}\{\chi\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dt = e^{-x\sqrt{s}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\left(\sqrt{s}\,t - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)^2} dt$$

$$= e^{-x\sqrt{s}} \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{u^2} e^{-\left(\frac{x\sqrt{s}}{2}\frac{1}{u} - u\right)^2} du = \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}.$$

[16]) Siehe l. c.[8]), S. 21.

Unter Benutzung der algebraischen Additionstheoreme für Cof und Sin vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\frac{\mathfrak{Cof}\,(x-1)\sqrt{s}}{\sqrt{s}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{s}}. \tag{3,15}$$

Das ist aber gerade die Resultatfunktion der linken Seite von (2, 41).

2. Man sieht hier von einem ganz anderen Standpunkt aus den Grund für die Existenz jener transzendenten Relationen ein. Damit findet aber *eine von Hadamard aufgeworfene Frage* ihre Beantwortung. Hadamard bemerkt, daß solche transzendenten Relationen (z. B. Additionstheoreme), wie sie das Huygenssche Prinzip liefert, auch durch die *Kompositionstheorie von Volterra* entstehen, und fragt nun nach dem Zusammenhang dieser beiden Wege[17]). Unter der Komposition (erster Art) zweier Funktionen $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ versteht Volterra die Bildung

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{F}_2 = \int_x^y F_1(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi,$$

wie sie bei den iterierten Kernen einer Integralgleichung (vom Volterraschen Typ) auftritt. Einer analytischen Funktion

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ordnet er eine Funktion Φ dadurch zu, daß er z durch $z\,\xi$, dann ξ durch eine Funktion $F(x, y)$ und die Multiplikationen durch Kompositionen ersetzt:

$$\Phi(z/x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n F(x, y)^{*\,n}.$$

Genügt φ einem algebraischen Additionstheorem

$$\Theta(\varphi(z_1),\ \varphi(z_2),\ \varphi(z_1 + z_2)) = 0,$$

so erfüllt Φ das transzendente Additionstheorem

$$\Theta(\overset{*}{\Phi}(z_1/x, y),\ \overset{*}{\Phi}(z_2/x, y),\ \overset{*}{\Phi}(z_1 + z_2/x, y)) = 0,$$

wo die übergesetzten Sterne bedeuten, daß die Produkte durch Kompositionen zu ersetzen sind[18]).

Bei unseren Beispielen in III 1 entspricht der Komposition die Faltung, in die sie übergeht, wenn die Funktionen $F(x, y)$ speziell die Gestalt $F(y - x)$ haben und $x = 0$ gesetzt wird (bei Volterra der Fall des cycle

---

[17]) Siehe l. c.[1]), S. 247 und den dort erwähnten Vortrag, S. 623, 624.

[18]) V. Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes. Paris 1913, S. 157.

fermé). Die Transformation, die den Übergang von φ zu Φ bewerkstelligt, wird hier nicht bloß formal für analytische Funktionen definiert, sondern kann effektiv angegeben werden als Umkehrung der Laplace-Transformation, wodurch wir in der Lage sind, die Zusammenhänge genau zu verfolgen: Das Abbild im Resultatbereich der im Objektbereich vorliegenden partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$ ist eine gewöhnliche Differentialgleichung[19])

$$\frac{d^2 u}{d x^2} = s\,u - \Phi(x), \tag{3,21}$$

deren Lösung z. B. im Fall des Randwertproblemes I 4 die Gestalt hat:

$$\begin{aligned} u(x, s) &= a(s)\, g(x, s; l) + b(s)\, g(l - x, s; l) \\ &= a(s)\, \frac{\mathfrak{Sin}(l - x)\sqrt{s}}{\mathfrak{Sin}\, l\sqrt{s}} + b(s)\, \frac{\mathfrak{Sin}\, x\sqrt{s}}{\mathfrak{Sin}\, l\sqrt{s}}, \end{aligned} \tag{3,22}$$

wo $a(s) = \mathfrak{L}\{A\}$ und $b(s) = \mathfrak{L}\{B\}$ die Randwerte von $u(x, s)$ für $x = 0$ und $x = l$ sind. Wendet man nun auf $u(x, s)$ das Huygenssche oder einfacher auf $g(x, s; l)$ im Intervall $x_0 < x < l$ das reflexive Prinzip an, so ergibt sich, da g dort die Randwerte $g(x_0, s; l)$ und 0 hat:

$$g(x, s; l) = g(x_0, s; l) \cdot g(x - x_0, s; l - x_0),$$

explizit:

$$\frac{\mathfrak{Sin}(l - x)\sqrt{s}}{\mathfrak{Sin}\, l\sqrt{s}} = \frac{\mathfrak{Sin}(l - x_0)\sqrt{s}}{\mathfrak{Sin}\, l\sqrt{s}} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,[(l - x_0) - (x - x_0)]\sqrt{s}}{\mathfrak{Sin}(l - x_0)\sqrt{s}}.$$

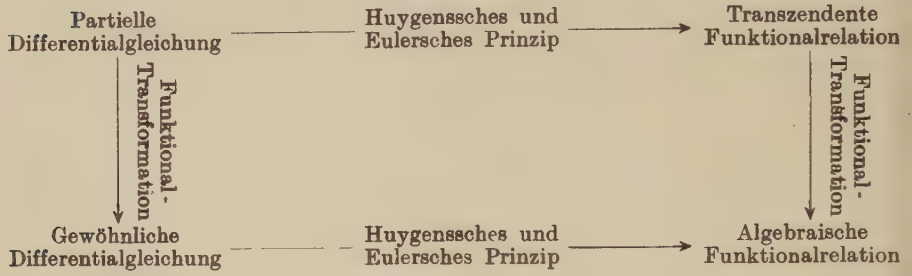
Die Greensche Funktion g im Resultatbereich erfüllt also eine algebraische Relation, und dieser muß dank des Faltungssatzes bei der Abbildung durch die Umkehrung der Laplace-Transformation (bei Volterra durch den Kompositionsprozeß) gerade die durch das Huygenssche Prinzip im Objektbereich gelieferte transzendente Relation (1, 401) entsprechen.

Ganz analog läßt sich die für den Beweis von (2, 41) vermittels Laplace-Transformation aufgestellte Formel (3, 14), (3, 15) so deuten, daß man im *Resultatbereich* die zu dem Randwertproblem, bei dem die Randwerte von $\frac{d u}{d x}$ vorgeschrieben sind, gehörige Greensche Funktion $\frac{\mathfrak{Cof}(x - 1)\sqrt{s}}{\sqrt{s}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{s}}$ nach dem Eulerschen Prinzip vermittels der Lösung (3, 22) des Problems,

[19]) Siehe die Darstellung in meinem unter [7]) zitierten Vortrag sowie in F. Bernstein und G. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. I. Mitteilung. Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 285—292.

bei dem die Randwerte von u gegeben sind, im Intervall $0 < x < x_0$ dargestellt hat. Dieser Gleichung entspricht natürlich die durch dasselbe Prinzip im *Objektbereich* abgeleitete Relation (2, 41).

Schematisch lassen sich die Zusammenhänge so darstellen:



Ganz *allgemein* kann man sagen: Die Anwendung des Huygensschen und Eulerschen Prinzips bei einer partiellen Differentialgleichung wird *transzendente Relationen* liefern. Übersetzt man die Differentialgleichung vermittels einer geeigneten *Funktional-Transformation* in eine andere, einfachere Gleichung (wie es die Operatorenmethode[20]) tut), deren Lösungen bei Anwendung des Huygensschen und Eulerschen Prinzips *algebraische* Relationen erfüllen, so werden diese durch Umkehrung der Funktionaltransformation auf jene transzendenten Relationen *abgebildet*. Mit der Aufstellung der Funktional-Transformation hat man dann also die tiefste Einsicht in das Wesen des ganzen Mechanismus gewonnen. — Die Gestalt der transzendenten Relationen kann es übrigens nahelegen, welcher Art die abbildende Transformation sein muß. So weist z. B. das Auftreten von Faltungsintegralen stets auf die Laplace- bzw. Fourier-Transformation hin.

3. In III 1 haben wir die Abbildung der transzendenten Relationen auf algebraische zunächst einmal für diejenigen Additionstheoreme praktisch durchgeführt, die sich durch Anwendung des Huygensschen Prinzips *in der x-Richtung* ergeben hatten. Bei ihnen wurde die Funktional-Transformation in der t-Richtung ausgeübt. Wir wollen nun noch — durch Transformation in der x-Richtung — die durch Anwendung des Huygensschen Prinzips *in der t-Richtung* gewonnenen Additionstheoreme in al-

[20]) „Begründet" wird eine solche Operatorenmethode am wirksamsten durch die zugrunde liegende Funktional-Transformation. So wird z. B. für eine dieser Methoden, den sogenannten Heaviside-Kalkül, die Begründung gerade durch die Laplace-Transformation geliefert. Siehe G. Doetsch, Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül). Jahresber. DMV **43** (1934), S. 238—251.

gebraische überführen. Das Theorem (1, 411) enthält eine Volterrasche Komposition zweiter Art, die sich von der erster Art dadurch unterscheidet, daß die Integrationsgrenzen fest sind. Das Theorem (1, 414) stellt eine Ausartung dar: hier sind die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$. Wir wollen uns in der gegenwärtigen Arbeit auf die Betrachtung von (1, 414) beschränken und die von (1, 411) auf eine andere Gelegenheit verschieben, wo die zugrunde liegende Transformation und ihre Anwendung zur Integration von Differentialgleichungen näher erörtert werden soll[21]).

Auf (1, 414) wurden wir durch folgendes *Randwertproblem* geführt: Die Differentialgleichung (1, 31) in der Halbebene $t > 0$ zu integrieren, wenn auf dem Rand $t = 0$ der Wert

$$\lim_{t \to 0} U(x, t) = \Phi(x) \tag{3, 31}$$

vorgeschrieben ist. Die hier herrschenden Zusammenhänge werden wir im Sinne von III 2 sofort durchschauen, wenn wir die Funktion U der *zweiseitigen Laplace-Transformation* in der x-Richtung:

$$u(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} U(x, t)\, dx = \mathfrak{L}_{II}\{U\}$$

unterwerfen. Dadurch geht (1, 31) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$s^2 u = \frac{du}{dt} \tag{3, 32}$$

über, und die Randbedingung (3, 31) transformiert sich in folgende[22]):

$$\lim_{t \to 0} u(s, t) = \mathfrak{L}_{II}\{\Phi\} = \varphi(s). \tag{3, 33}$$

Unter dieser Bedingung lautet die Lösung von (3, 32):

$$u(s, t) = \varphi(s)\, e^{s^2 t}. \tag{3, 34}$$

Dem Produkt zweier (absolut konvergenter) Resultatfunktionen $\mathfrak{L}_{II}\{F_1\}$ und $\mathfrak{L}_{II}\{F_2\}$ entspricht hier im Objektbereich ein Faltungsintegral, das so aussieht:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\xi)\, F_2(x - \xi)\, d\xi. \tag{3, 35}$$

---

[21]) Erscheint unter dem Titel: „Integration von Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation" in Math. Annalen.

[22]) Wegen der Vertauschung der Grenzprozesse sind hier dieselben Bemerkungen wie in der unter [19]) angegebenen Arbeit S. 288, 289 zu machen. Siehe auch den unter [3]) zitierten Vortrag, Abschnitt III, 5.

Ferner ist[23])

$$e^{s^2 t} = \mathfrak{L}_{II}\{\tfrac{1}{2}\chi(x,t)\}. \tag{3,36}$$

Also gehört zu $u(s,t)$ im Objektbereich die bekannte Lösung (1, 413).

Nun hat die Greensche Funktion $e^{s^2 t}$ im Resultatbereich das algebraische Additionstheorem

$$e^{s^2(t_1+t_2)} = e^{s^2 t_1} \cdot e^{s^2 t_2}, \tag{3,37}$$

woraus die Umkehrung von $\mathfrak{L}_{II}$ nach dem Faltungssatz das transzendente Additionstheorem (1, 414) für die Greensche Funktion $\frac{1}{2}\chi(x,t)$ im Objektbereich entstehen läßt. Damit ist auch dieses vermittels der in diesem Abschnitt entwickelten Gedankengänge abgeleitet.

---

[23]) Das ergibt sich aus der in G. Doetsch, Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung. Journ. f. d. r. u. a. Math. 167 (1932), S. 274—293 [S. 280] abgeleiteten Formel

$$\mathfrak{L}_{II}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4}}\right\} = e^{s^2}.$$

(Eingegangen am 22. Juli 1935.)

Verzweigungstheorie in allgemeinen Ordnungen algebraischer Zahlkörper.

Von

Heinrich Grell in Halle (Saale).

Die Körperdifferente $\mathfrak{D}$ eines endlichen algebraischen Zahlkörpers K bildet für die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ ein Charakteristikum der Verzweigung bei der Zerfällung der rationalen Primzahlen p in Primideale. Sie ordnet jedem Primideal $\mathfrak{P}$ eine nichtnegative ganze Verzweigungszahl $v(\mathfrak{P})$ zu, den Exponenten seiner in $\mathfrak{D}$ aufgehenden Potenz, die einzig für diejenigen Primideale wirklich positiv ausfällt, die mindestens quadratische Teiler der zugehörigen Primzahl sind. Der Dedekindsche Differentensatz lehrt die Zusammensetzung von $v(\mathfrak{P})$ aus einfachen, in der Arithmetik von $\mathfrak{O}$ allein durch $\mathfrak{P}$ bestimmten Zahlen: ist $\mathfrak{P}^e$ die genaue in p aufgehende Potenz von $\mathfrak{P}$, so wird $v(\mathfrak{P}) = e - 1 + \varrho$; dabei verschwindet die Supplementzahl ϱ für alle und nur die Fälle mit $e \not\equiv 0 \,(p)$.

Aus dem Differentensatz gewinnt man durch Übergang zu den Idealnormen die gröbere Aussage des Diskriminantensatzes: alle und nur die Primzahlen p mit mindestens quadratischen Faktoren sind Teiler der Diskriminante. E. Noether vermochte in ihrer Arbeit „Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers" [Journ. f. d. reine u. angew. Math. 157 (1927), S. 82—104] ihn von der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ auf eine beliebige Ordnung $\mathfrak{o}$ sinngemäß zu erweitern: die Diskriminantenteiler p sind durch das Auftreten einer eigentlichen Primärkomponente bei ihrer Zerlegung in $\mathfrak{o}$ charakterisiert. Dementsprechend erhebt sich die Frage nach einem Analogon des feineren Differentensatzes für beliebige Ordnungen.

Aus der Idealtheorie der allgemeinen Ordnungen ist bekannt, daß für ein Primärideal $\mathfrak{q}$ dessen Länge $\lambda(\mathfrak{q})$ den Platz einnimmt, den für die spezielleren Primidealpotenzen in der Hauptordnung der Exponent inne hat. Weil nun aber alle Längenbeziehungen zwischen Idealen und Moduln in nicht-maximalen Ordnungen $\mathfrak{o}$ bei deren Multiplikation und Division unübersichtlich werden, sofern nicht gerade $\mathfrak{o}$ einen umkehrbaren Komplementärmodul ($\mathfrak{o}'\mathfrak{d} = \mathfrak{o}$) besitzt, erweist es sich als unzweckmäßig, die als Modulquotient $\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}'}$ der Ordnung $\mathfrak{o}$ und ihres Komplementärmoduls $\mathfrak{o}'$ erklärte Ordnungsdifferente $\mathfrak{d}$ und die Längen ihrer zu den verschiedenen Primidealen gehörigen Primärkomponenten als Kennzeichen der Verzweigung zu nehmen.

Vielmehr wird diese gemessen am Verzweigungsmodul $\mathfrak{v}$ der Ordnung $\mathfrak{o}$. Er ist definiert als Restklassenmodul $\mathfrak{o}' | \mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{o}$ als Operatorenbereich und den $\mathfrak{o}$-Moduln als alleinigen zulässigen Untergruppen. Entsprechend den Primidealen $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ erfährt $\mathfrak{v}$ eine direkte Summenzerlegung in die formal unendlich vielen Primärgruppen $\mathfrak{v}(\mathfrak{p})$. Die Länge von $\mathfrak{v}(\mathfrak{p})$ im Sinn der zulässigen Untergruppen ist als Verzweigungszahl $v(\mathfrak{p})$ erklärt; für alle und nur die singulären $\mathfrak{p}$ mit einer eigentlichen Primärkomponente in der Zerlegung des zugehörigen p fällt $v(\mathfrak{p})$ wirklich positiv aus.

Der Verzweigungssatz des § 9 gibt nun den additiven Aufbau von $v(\mathfrak{p})$ aus Bestandteilen, die allein mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}$ sowie der durch die Kenntnis von $\mathfrak{o}$ schon eindeutig festgelegten Hauptordnung $\mathfrak{O}$ des Quotientenkörpers K von $\mathfrak{o}$ bekannt sind. Es setzt sich $v(\mathfrak{p})$ zusammen aus drei nichtnegativen Summanden; der erste ist eine Verallgemeinerung der Größe $e - 1$ in der Hauptordnung; der zweite entspricht der dortigen Supplementzahl ϱ; der dritte aber wird hier zum erstenmal sichtbar: er mißt den „unechten", „außerwesentlichen" Teil der Verzweigung.

Aus dem Verzweigungssatz erhält man durch Übergang zu den Normen die genaue Primärzerlegung der Ordnungsdiskriminante und als deren Spezialfall den E. Noetherschen Satz. Es ergibt sich weiter, daß die Primideale der Ordnungsdifferente mit den singulären zusammenfallen; auch aus dieser abgeschwächten Aussage läßt sich der E. Noethersche Satz noch folgern.

Zum Beweis des Verzweigungssatzes wird vorerst der Begriff des Grades eines allgemeinen Ideals wesentlich einfacher und zwingender gefaßt als in einer früheren Arbeit[1]); die diesbezüglichen Sätze werden neu bewiesen und die Übereinstimmung mit der alten Definition festgestellt.

Die Aufgabe der Längenbestimmung der Primärgruppen von $\mathfrak{v}$ wird dadurch bewältigt, daß man zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ und ihren Komplementärmodul $\mathfrak{O}'$ einschiebt. Den von dem Mittelstück $\mathfrak{O}' | \mathfrak{O}$ der Reihe $\mathfrak{o}'$, $\mathfrak{O}'$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{o}$ für ein einzelnes $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ gelieferten Beitrag bestimmt man zunächst für ein entsprechendes Ideal der Hauptordnung durch deren als bekannt vorauszusetzenden Differentensatz; die Überführung in Charakteristika, die möglichst allein von $\mathfrak{o}$ (und $\mathfrak{p}$) abhängen, leistet ein Hilfssatz, der das Äquivalent der Singularitätenauflösung in Zahlkörpern bedeutet. $\mathfrak{o}' | \mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O} | \mathfrak{o}$ aber erweisen sich für jedes $\mathfrak{p}$ auf Grund Dedekindscher Sätze über Moduln und ihre Komplemente als völlig symmetrisch um $\mathfrak{O}' | \mathfrak{O}$ gelagert. Beide liefern zu jedem $v(\mathfrak{p})$ den

[1]) Siehe § 3 der unter (6) genannten Arbeit des am Ende der Einleitung befindlichen Literaturnachweises.

gleichen Betrag, der sich mittels gewisser für die Primärkomponenten des Führers $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}}$ charakteristischer Ringe zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$ noch besonders deuten läßt. Dieser Doppelsummand von $v(\mathfrak{p})$ ist das Maß für die außerwesentliche Verzweigung; er geht bei Bildung der Normen in den außerwesentlichen quadratischen Faktor der Ordnungsdiskriminante über.

Die genaue Längenbestimmung der Ordnungsdifferente ist im allgemeinen noch nicht erledigt. Sie ergibt sich aber aus dem Verzweigungssatz sofort dann, wenn $\mathfrak{o}'$ umkehrbar, also $\mathfrak{d}\,\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$ wird. Dann nämlich wird der Verzweigungsmodul $\mathfrak{v}$ zu dem Restklassenmodul $\mathfrak{o} \mid \mathfrak{d}$ $\mathfrak{o}$-modulisomorph; umgekehrt zieht die $\mathfrak{o}$-Modulisomorphie von $\mathfrak{v}$ zum Restklassenmodul $\mathfrak{o} \mid \mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}$ nach einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{o}$ zunächst $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$ und dann die Umkehrbarkeit von $\mathfrak{o}'$ nach sich. Diese die Umkehrbarkeit von $\mathfrak{o}'$ charakterisierende Bedingung rechtfertigt vollkommen den Verzicht auf die Ordnungsdifferente in einer allgemeinen Verzweigungstheorie und die Einführung des Verzweigungsmoduls, weil sonst Ordnungen mit nichtumkehrbarem Komplement von der Behandlung notwendig ausgeschlossen bleiben müßten.

Die Umkehrbarkeit des Komplementärmoduls $\mathfrak{o}'$ von $\mathfrak{o}$ ist nach Dedekind eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die endlichen Moduln $\mathfrak{m}$ des Körpers mit $\mathfrak{m}^0 = \mathfrak{o}^2$) eine multiplikative Gruppe bilden. Die nunmehr also bestehende Äquivalenz dieser Gruppeneigenschaft und einer bestimmten Struktur des Verzweigungsmoduls führt sowohl selbst wie durch ihren Beweis auf die Frage nach weiteren diese Gruppeneigenschaft kennzeichnenden Bedingungen. Für die Umkehrbarkeit von $\mathfrak{o}'$ ergibt sich so einmal $\mathfrak{d}^0 = \mathfrak{o}$ als notwendig und hinreichend, zum andern, daß die Primärkomponenten aller im außerwesentlichen Teiler der Ordnungsdiskriminante aufgehenden Primzahlen irreduzible Ideale (im E. Noetherschen Sinn) sind. Dieses letzte Ergebnis erlaubt es, die Ordnungen mit Gruppeneigenschaft der zugehörigen Moduln $\mathfrak{m}\,(\mathfrak{m}^0 = \mathfrak{o})$ unter den allgemeinen Ordnungen dadurch zu charakterisieren, daß die in $\mathfrak{o}$ liegenden Primärideale $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}^0 = \mathfrak{o}$ sämtlich irreduzibel sind; fordert man, daß alle in der Ordnung liegenden Primärideale überhaupt irreduzibel sind, so fällt die Ordnung mit der Hauptordnung zusammen. Unter diesem Gesichtspunkt einer idealtheoretischen Charakterisierung der Ordnungen mit umkehrbarem Komplement, wie sie zuerst E. Noether für die speziellere Hauptordnung durchgeführt hat, gewinnen diese letztgenannten Resultate eine über die Verzweigungstheorie hinausreichende Bedeutung.

---

[2]) $\mathfrak{m}^0 = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}$; siehe § 2 dieser Arbeit.

Literatur.

(1) Dedekind, R., Gesammelte Werke, Bd. I, Bd. II, Bd. III; Braunschweig 1930—1932. Zitiert mit D I, D II, D III.

(2) Van der Waerden, B. L., Moderne Algebra, Bd. I, Bd. II; Berlin 1930—1931. Zitiert mit W I und W II.

(3) Noether, E., Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen 96 (1926), S. 26—61. Zitiert mit N.

(4) Weber, W., Umkehrbare Ideale, Math. Zeitschr. 34 (1931), S. 131—157.

(5) Grell, H., Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, Math. Annalen 97 (1927), S. 490—523. Zitiert mit G I.

(6) Grell, H., Zur Theorie der Ordnungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen 97 (1927), S. 524—558. Zitiert mit G II.

(7) Krull, W., Idealtheorie. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Bd. IV, 3; Berlin 1935. Zitiert mit K.

I. Teil.

Vorbereitende Betrachtungen.

§ 1.

Ordnungen in Zahlkörpern.

Über dem Körper P der Rationalzahlen mit dem Ring Γ der ganzen rationalen Zahlen sei K ein endlicher algebraischer Zahlkörper n-ten Grades mit der Hauptordnung $\mathfrak{O}$. $\mathfrak{o}$ sei eine endliche Γ-Ordnung vom Range n aus K, also ein Γ umfassender Unterring von $\mathfrak{O}$. Nach Dedekind[3]) und E. Noether[4]) läßt sich jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{o}$ eindeutig darstellen als Produkt endlich vieler paarweise teilerfremder Primärideale; zwei verschiedene Primideale sind teilerfremd.

§ 2.

Moduln und Komplementärmoduln.

Sämtliche in diesem Paragraphen auftretenden Γ-Moduln sollen den Rang n besitzen und in K enthalten sein. Ist $\mathfrak{m}$ ein solcher Modul, so versteht man unter seinem Komplementärmodul $\mathfrak{m}'$ bez. Γ die Gesamtheit der Elemente μ' von K, für die bei beliebigem μ aus $\mathfrak{m}$ die Spur $s(\mu\mu')$ stets ganz rational wird. Bedeutet $\mu_1, \ldots, \mu_n$ eine Γ-Modulbasis von $\mathfrak{m}$, so erhält man eine für $\mathfrak{m}'$ durch Auflösen des Gleichungssystems $\mu_i = \sum_{j=1}^{n} s(\mu_i \mu_j)\mu_j'$; $i = 1, \ldots, n$. Für jedes System $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von n linear unabhängigen Zahlen ist die Spurendeterminante von Null verschieden, $|s(\alpha_i\alpha_j)| \neq 0$.

---

[3]) D III, XLIX, § 172 (S. 303).

[4]) N § 7, 3.

Die Gesamtheit $\mathfrak{m}^0 = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}$ der für einen Γ-Modul $\mathfrak{m}$ zulässigen Multiplikatoren aus K, d. h. das System aller Elemente λ mit $\lambda\,\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{m}$[5]) bildet eine endliche Γ-Ordnung vom Rang n; sie heißt die zu $\mathfrak{m}$ gehörige Ordnung. $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$ haben dieselbe zugehörige Ordnung.

Ist $\mathfrak{n}$ Untermodul von $\mathfrak{m}$, so gilt für die Komplementärmoduln $\mathfrak{m}' \leqq \mathfrak{n}'$; echten Untermoduln $\mathfrak{n}$ entsprechen echte Obermoduln $\mathfrak{n}'$. Für Durchschnittsmodul $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$ und Vereinigungsmodul $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ zweier Moduln $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gelten die Beziehungen $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})' = \mathfrak{m}' \cap \mathfrak{n}'$ und $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}') = (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n})'$.

Der Modulquotient $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$ zweier Moduln $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ ist erklärt als Gesamtheit der Elemente λ aus K mit $\lambda\,\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$. Es bestehen die Gleichungen

$$(\mathfrak{m}\,\mathfrak{n})' = \frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{n}} = \frac{\mathfrak{n}'}{\mathfrak{m}}; \qquad \mathfrak{m}\,\mathfrak{n} = \left(\frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{n}}\right)' = \left(\frac{\mathfrak{n}'}{\mathfrak{m}}\right)'\ ^{6}).$$

§ 3.

Gruppentheoretische Hilfsmittel.

$\mathfrak{G}$ sei ein Modul in bezug auf eine Ordnung $\mathfrak{o}$; die Einschränkung des § 2, daß $\mathfrak{G}$ den Rang n bez. Γ besitzen und in K gelegen sein sollte, wird im folgenden aufgehoben. Null- und Einheitselement von $\mathfrak{o}$ wirken als Null- und Einheitsoperator für $\mathfrak{G}$, wenn die üblichen Annahmen gemacht werden[7]). Ein Ideal aus $\mathfrak{o}$ heißt annullierendes Ideal für $\mathfrak{G}$, wenn jedes Idealelement als Nulloperator wirkt. Der größte gemeinsame Teiler aller annullierenden Ideale ist selbst annullierendes Ideal und heißt der Annullator von $\mathfrak{G}$. Legt man an Stelle von $\mathfrak{o}$ den Restklassenring $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{g}$ nach dem Annullator $\mathfrak{g}$ zugrunde, indem das Produkt einer Restklasse $\bar{\omega}$ mit einem Element G aus $\mathfrak{G}$ durch $\bar{\omega}\,G = \omega\,G$ festgesetzt wird, so wird in $\bar{\mathfrak{o}}$ der Annullator von $\mathfrak{G}$ gleich dem Nullideal (Übergang zum „absoluten" Operatorenbereich). Ist der $\mathfrak{o}$-Modul $\mathfrak{H}$ Untermodul von $\mathfrak{G}$, so versteht man unter dem $\mathfrak{H}$-Führer von $\mathfrak{G}$ den Annullator der als $\mathfrak{o}$-Modul aufgefaßten Restklassengruppe $\mathfrak{G}\,|\,\mathfrak{H}$.

Ein $\mathfrak{o}$-Modul heiße Primärmodul, wenn sein Annullator ein (vom Null- und Einheitsideal verschiedenes) Primärideal aus $\mathfrak{o}$ ist. Es gilt der

Satz 1: *Jeder $\mathfrak{o}$-Modul $\mathfrak{G}$ mit einem vom Null- und Einheitsideal verschiedenen Annullator läßt sich eindeutig darstellen als direkte Summe endlich vieler Primärmoduln mit paarweise teilerfremden Annullatoren; hat*

---

[5]) $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$ bedeutet: $\mathfrak{n}$ ist Untermenge von $\mathfrak{m}$; ist $\mathfrak{n}$ echte Untermenge, so schreiben wir $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$.

[6]) Für einen Beweis der in § 2 genannten Resultate siehe D I, Über die Diskriminanten endlicher Körper, § 9.

[7]) Vgl. W I, § 38.

der Annullator $\mathfrak{g}$ *von* $\mathfrak{G}$ *die Primäridealzerlegung* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dots \mathfrak{g}_s$, *so wird* $\mathfrak{G}$ *direkte Summe von* s *Primärmoduln* $\mathfrak{G}_i$ *mit* $\mathfrak{g}_i$ *als Annullator* $(i = 1, \dots, s)$.

Es wird nämlich der Restklassenring $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o} \mid \mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}_1^*} + \dots + \overline{\mathfrak{g}_s^*}$ direkte Summe der Restklassenideale $\overline{\mathfrak{g}_i^*}$ mit $\mathfrak{g}_i^* = \mathfrak{g}_1 \dots \mathfrak{g}_{i-1}\, \mathfrak{g}_{i+1} \dots \mathfrak{g}_s$. Dann sind die $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{g}_i^* \mathfrak{G}$ die fraglichen Primärmoduln. Liegt in $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_1 + \dots + \mathfrak{S}$ eine zweite Darstellung durch Primärmoduln mit paarweise teilerfremden Annullatoren $\mathfrak{s}_i$ vor, so ist das annullierende Ideal $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \dots \mathfrak{s}_t$ Annullator von $\mathfrak{G}$, da kein $\mathfrak{s}_i$ durch einen echten Teiler ersetzt werden kann; es wird also $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$, und bei geeigneter Anordnung $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{g}_i$ $(i = 1, \dots, s)$. Dann aber ergibt sich

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{g}_i^* \mathfrak{G} = (\mathfrak{g}_i^* \mathfrak{S}_i,\ (0)) = (\mathfrak{g}_i^* \mathfrak{S}_i,\ \mathfrak{g}_i \mathfrak{S}_i) = (\mathfrak{g}_i^*,\ \mathfrak{g}_i)\, \mathfrak{S}_i = \mathfrak{o}\, \mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_i.$$

Wegen der soeben bewiesenen Eindeutigkeit der Zerlegung in Primärmoduln und weil jeder Teiler eines Primärideals wieder Primärideal ist, erkennt man:

Folgerung 1. *Enthält der Modul* $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \dots + \mathfrak{G}_s$ *mit dem Annullator* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dots \mathfrak{g}_s$ *und den Primärmodulkomponenten* $\mathfrak{G}_i$ *den Untermodul* $\mathfrak{H}$, *so wird* $\mathfrak{H}$ *direkte Summe derjenigen Primärmoduln* $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{g}_i^* \mathfrak{H}$, *die vom Nullmodul verschieden ausfallen. Die Annullatoren der* $\mathfrak{H}_i$ *sind Teiler der Primärideale* $\mathfrak{g}_i$.

Beim Beweis des Verzweigungssatzes (§ 9) ist die Kenntnis der Restklassengruppen $\mathfrak{G}_i \mid \mathfrak{H}_i$ von Bedeutung; sie ergibt sich folgendermaßen. Setzt man

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_i} = (\mathfrak{H},\ \mathfrak{G}_i^*) \cap \mathfrak{G}_i \text{ mit } \mathfrak{G}_i^* = \mathfrak{G}_1 + \dots + \mathfrak{G}_{i-1} + \mathfrak{G}_{i+1} + \dots + \mathfrak{G}_s,$$

so wird nach einem bekannten gruppentheoretischen Resultat[8])

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_1} + \dots + \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_s} = (\mathfrak{H},\ \mathfrak{G}_1^*) \cap \dots \cap (\mathfrak{H},\ \mathfrak{G}_s^*).$$

Bezeichnet man für einen Augenblick die rechte Seite mit $\mathfrak{B}$, so ist jedenfalls $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{B}$. Andererseits ist $\mathfrak{B} \leqq (\mathfrak{H},\ \mathfrak{G}_i^*)$, also

$$\mathfrak{g}_i^* \mathfrak{B} \leqq (\mathfrak{g}_i^* \mathfrak{H},\ \mathfrak{g}_i^* \mathfrak{G}_i^*) = \mathfrak{g}_i^* \mathfrak{H},$$

da ja $\mathfrak{g}_i^*$ das Produkt der sämtlichen zu den Summanden von $\mathfrak{G}_i^*$ gehörigen Annullatoren ist. Somit wird auch die Vereinigungsgruppe der $\mathfrak{g}_i^* \mathfrak{B}$ Untergruppe der Vereinigungsgruppe der $\mathfrak{g}_i^* \mathfrak{H}$, d. h. $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{H}$, also $\mathfrak{H} = \mathfrak{B} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_1} + \dots + \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_s}$. Da die $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_i}$ als Untermoduln der $\mathfrak{G}_i$ Primärmoduln sind, muß wegen der zuerst bewiesenen Eindeutigkeit $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_i} = \mathfrak{H}_i$ gelten.

---

[8]) Siehe G I, § 2, Satz 3.

Nun ergibt sich nach dem ersten Isomorphiesatz[9]) die

Folgerung 2: $\mathfrak{G}_i | \mathfrak{H}_i \simeq \mathfrak{G} | (\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_i^*)$.

Da man genau wie beim Nachweis von $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ schließen kann, daß $(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_i^*) \cap (\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_i) = \mathfrak{H}$, erhält man als

Folgerung 3: $\mathfrak{G} = (\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_1) + \ldots + (\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_s)$ ist direkte Summe bez. $\mathfrak{H}$, wenn die Komponenten, die gleich $\mathfrak{H}$ sind, fortgelassen werden.

Ausdrücklich sei bemerkt, daß die Isomorphie in Folgerung 2 auch dann noch gültig bleibt, wenn $\mathfrak{H}_i = (0)$ oder sogar $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{H}_i = (0)$ wird, wenn man also beispielsweise annimmt, daß $\mathfrak{H}$ Untermodul eines in Primärmoduln zerlegten Moduls sei und bei der Zerspaltung von $\mathfrak{H}$ gemäß der Folgerung 1 einige Komponenten $\mathfrak{H}_i$ nur formal auftreten, weil sie zum Nullmodul werden.

II. Teil.

Neubegründung der Grad- und Normentheorie.

§ 4.

Der Grad eines Ideals.

$\mathfrak{o}$ sei eine endliche Γ-Ordnung vom Rang n aus K, $\mathfrak{t}$ eine in $\mathfrak{o}$ enthaltene endliche Γ-Ordnung, über deren Quotientenkörper nichts vorausgesetzt wird. Im Restklassenring von $\mathfrak{o}$ nach einem Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ kann man eine endliche Kompositionsreihe von Γ-Moduln, also auch eine von $\mathfrak{t}$-Moduln ziehen. Die Länge dieser Kompositionsreihe von $\mathfrak{t}$-Moduln ist nach dem Jordan-Hölderschen Satz eine Invariante von $\mathfrak{a}$; sie heißt der *Grad* $g_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ bez. $\mathfrak{t}$. (Dem Nullideal wäre der Grad ∞ zuzuschreiben.)

Zum Beweis der Gradsätze dienen folgende Vorbemerkungen:

a) $\mathfrak{t}$-operatorisomorphe $\mathfrak{t}$-Moduln von endlicher Länge der $\mathfrak{t}$-Modulkette haben dieselbe Länge.

b) Ein Ideal $\mathfrak{c}$ heißt unmittelbarer Teiler des Ideals $\mathfrak{b}$, wenn kein von beiden verschiedenes Ideal $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{b} < \mathfrak{e} < \mathfrak{c}$ existiert. Ist $\mathfrak{q}$ Primärideal zum Primideal $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}_1$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{q}$, so wird $\mathfrak{q}_1 | \mathfrak{q}$ $\mathfrak{o}$-operatorisomorph zu $\mathfrak{o} | \mathfrak{p}$. Der Beweis ergibt sich so[10]):

Ist $q_1 \equiv 0 (\mathfrak{q}_1)$, $\not\equiv 0 (\mathfrak{q})$, also $\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{q}, \mathfrak{o} q_1)$, so wird $\mathfrak{q}_1 | \mathfrak{q} \simeq \mathfrak{o} q_1 | \mathfrak{o} q_1 \cap \mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{o}} \bar{q}_1$; $\mathfrak{q}_1 | \mathfrak{q}$ ist einfach. Durch $\omega \to \bar{\omega} \bar{q}_1$ entsteht also ein Gruppen-

---

[9]) Siehe W I, § 40.

[10]) Siehe auch W II, § 121, Satz 2; G II, § 1, Satz 3 und § 13, 4 g), Hilfssatz 5 der vorliegenden Arbeit.

homomorphismus von $\mathfrak{o}$ auf $\bar{\mathfrak{o}}\,\bar{q}_1$. Da eine geeignete Potenz $\mathfrak{p}^\varrho$ Vielfaches von $\mathfrak{q}$, also auch $\overline{\mathfrak{p}^\varrho\,q} = \bar{0}$, so muß die Gesamtheit $\mathfrak{a}$ der bei dem Homomorphismus in die Null übergehenden Elemente von $\mathfrak{o}$ ein Idealteiler von $\mathfrak{p}^\varrho$ sein und genau gleich $\mathfrak{p}$ werden, da der Restklassenring $\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{a}$ nach dem Homomorphiesatz[11]) einfach sein muß; es wird also $\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{q}_1\,|\,\mathfrak{q}$.

Mit diesen Hilfsmitteln ergeben sich die folgenden Gradsätze.

Satz 2. *Der Grad eines Ideals ist gleich der Summe der Grade seiner Primärkomponenten.*

Beweis. Aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_t$ folgt für den Restklassenring $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{a}$ die Darstellung $\bar{\mathfrak{o}} = \overline{\mathfrak{q}_1^*} + \ldots + \overline{\mathfrak{q}_t^*}$ mit $\mathfrak{q}_i^* = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_{i-1}\,\mathfrak{q}_{i+1} \ldots \mathfrak{q}_t$ und $\overline{\mathfrak{q}_i^*} = \mathfrak{q}_i^*\,|\,\mathfrak{a}$. Die Länge einer Kompositionsreihe von t-Moduln in $\bar{\mathfrak{o}}$ wird somit gleich der Summe der entsprechenden Längen der $\overline{\mathfrak{q}_i^*}$, und diese sind wegen des t-Modulisomorphismus $\overline{\mathfrak{q}_i^*} \simeq \mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{q}_i$ identisch mit den Gradzahlen der $\mathfrak{q}_i$.

Die *Länge eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{o}$ ist definiert als Länge einer von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{o}$ gezogenen Kompositionsreihe von Idealen. Die Länge $\lambda(\mathfrak{a})$ ist also gleich dem Grad $g_\mathfrak{o}(\mathfrak{a})$.

Satz 3. *Der bez.* t *genommene Grad* $g_\mathfrak{t}(\mathfrak{q})$ *eines Primärideals* $\mathfrak{q}$ *der Länge* $\lambda(\mathfrak{q})$ *ist gleich dem* $\lambda(\mathfrak{q})$*-fachen des Grades* $g_\mathfrak{t}(\mathfrak{p})$ *des zu* $\mathfrak{q}$ *gehörigen Primideals* $\mathfrak{p}$.

Beweis. $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{p} = \mathfrak{q}_{\lambda-1}, \mathfrak{o} = \mathfrak{q}_\lambda$ sei eine zu $\mathfrak{q}$ gehörige Kompositionsreihe von jeweils unmittelbaren Idealteilern. Dann ist $g_\mathfrak{t}(\mathfrak{q})$ offenbar gleich der Summe der Längen q_i der Kompositionsreihen von t-Moduln von $\mathfrak{q}_i$ nach $\mathfrak{q}_{i+1}$. Wegen $\mathfrak{q}_{i+1}\,|\,\mathfrak{q}_i \simeq \mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{o}$-Modulisomorphie!) ist jedes q_i gleich $g_\mathfrak{t}(\mathfrak{p})$, also $g_\mathfrak{t}(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}) \cdot g_\mathfrak{t}(\mathfrak{p})$.

Bemerkung. Um die Identität des hier auseinandergesetzten Gradbegriffs mit dem in einer früheren Arbeit nachzuweisen[12]), braucht man wegen der beidemal genau gleichlautenden Gradsätze nur an den Primidealen sich um die Identität der Grade zu kümmern. Besitzt das Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{t}$ das Verengungsideal $\mathfrak{p}_\mathfrak{t} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{t}$, so war früher der Grad von $\mathfrak{p}$ bez. $\mathfrak{t}$ definiert als Rang des Restklassenkörpers $\mathfrak{o}\,|\,\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{o}}$ in bezug auf den Restklassenkörper $\mathfrak{t}\,|\,\mathfrak{p}_\mathfrak{t} = \bar{\mathfrak{t}}$. Sei f dieser Rang und $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_f$ eine bez. $\bar{\mathfrak{t}}$ linear unabhängige Basis von $\bar{\mathfrak{o}}$; dann entsteht aus der $\bar{\mathfrak{t}}$-Modulkompositionsreihe $\bar{\mathfrak{t}}\,\bar{\omega}_1, \bar{\mathfrak{t}}\,\bar{\omega}_1 + \bar{\mathfrak{t}}\,\bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{t}}\,\bar{\omega}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{t}}\,\bar{\omega}_{f-1}$, $\bar{\mathfrak{t}}\,\bar{\omega}_1 + \ldots + \bar{\mathfrak{t}}\,\bar{\omega}_f = \bar{\mathfrak{o}}$ durch Auflösen der Klassen eine von $\mathfrak{p}$ nach $\mathfrak{o}$.

---

[11]) Siehe W I, § 39.

[12]) G II, § 3.

§ 5.

Normentheorie.

Die bezüglich Γ gebildete Norm $N_\Gamma(\mathfrak{a})$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{o}$ ist erklärt als dasjenige Ideal in Γ, das aus der Determinante der Übergangssubstitution einer linear unabhängigen Γ-Modulbasis von $\mathfrak{a}$ zu einer ebensolchen von $\mathfrak{o}$ abgeleitet ist. Die Norm wird gleich dem Produkt der Elementarteiler[13]) des Restklassenmoduls $\mathfrak{o}|\mathfrak{a}$. Γ-modulisomorphe Restklassenmoduln haben dieselben Elementarteiler. Man beweist nun durch völlig entsprechende Schlüsse die den beiden Gradsätzen des § 4 entsprechenden Normensätze

Satz 4: *Die Norm eines Ideals ist gleich dem Produkt der Normen seiner Primärkomponenten*, sowie

Satz 5: *Die Norm eines Primärideals* $\mathfrak{q}$ *der Länge* $\lambda(\mathfrak{q})$ *ist gleich der* $\lambda(\mathfrak{q})$*-ten Potenz der Norm seines zugehörigen Primideals.*

Bezeichnet weiter $\mathfrak{k}$ die Hauptordnung eines Unterkörpers k von K, so gilt

Satz 6: *Der Grad* $g_\mathfrak{k}(\mathfrak{a})$ *eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{o}$ *ist gleich der Anzahl der Primidealfaktoren der bezüglich* $\mathfrak{k}$ *gebildeten Norm* $N_\mathfrak{k}(\mathfrak{a})$ *in* $\mathfrak{k}$, sowie

Satz 7: $N_\Gamma(\mathfrak{a}) = n_\Gamma(N_\mathfrak{k}(\mathfrak{a}))$. Dabei bedeutet n_Γ Normenbildung in $\mathfrak{k}$ bez. Γ.

Zum Beweis von Satz 6 und 7 braucht man wieder nur Primideale in $\mathfrak{o}$ zu betrachten. $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{f-1}, \mathfrak{c}_f = \mathfrak{o}$ sei eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{k}$-Moduln, $\mathfrak{p}_\mathfrak{k} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{k}$ sei das Verengungsideal von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{k}$. Aus $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{o}$ und den $\mathfrak{c}_i$ bilde man durch Hinzunahme aller zu $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ teilerfremden Elemente aus $\mathfrak{k}$ die Quotientenringe und Quotientenmoduln: $\tilde{\mathfrak{k}}$, $\tilde{\mathfrak{o}}$, $\tilde{\mathfrak{c}}_i$; $\tilde{\mathfrak{k}}$ ist Hauptidealring. Die $\tilde{\mathfrak{c}}_i$ entsprechen nach den üblichen Schlüssen[14]) umkehrbar eindeutig den $\mathfrak{c}_i$: $\mathfrak{c}_i = \tilde{\mathfrak{c}}_i \cap \mathfrak{o}$, $\tilde{\mathfrak{c}}_i = \mathfrak{c}_i \cdot \tilde{\mathfrak{k}}$, und bei $\tilde{\mathfrak{p}}_\mathfrak{k} = \mathfrak{p}_\mathfrak{k} \cdot \tilde{\mathfrak{k}}$ sind die $\tilde{\mathfrak{c}}_i | \tilde{\mathfrak{c}}_{i-1}$ $\tilde{\mathfrak{k}}$-modulisomorph $\tilde{\mathfrak{k}} | \tilde{\mathfrak{p}}_\mathfrak{k}$. Bei $\tilde{\mathfrak{p}}_\mathfrak{k} = \tilde{\mathfrak{k}}\tilde{\pi}$ wird also das bez. $\tilde{\mathfrak{k}}$ genommene Elementarteilerprodukt von $\tilde{\mathfrak{c}}_i | \tilde{\mathfrak{c}}_{i-1}$ gleich $\tilde{\pi}$ (bis auf Einheiten), also die Übergangsdeterminante einer $\tilde{\mathfrak{k}}$-Basis von $\tilde{\mathfrak{p}}$ zu einer von $\tilde{\mathfrak{o}}$ gleich $\tilde{\pi}^f$. Nach Definition der Norm hat man damit $N_\mathfrak{k}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_\mathfrak{k}^f$, womit Satz 6 bewiesen ist.

Wegen der $\mathfrak{k}$-Modulisomorphie $\mathfrak{c}_i | \mathfrak{c}_{i-1} \simeq \mathfrak{k} | \mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ wird $N_\Gamma(\mathfrak{p})$ die f-te Potenz von $n_\Gamma(\mathfrak{p}_\mathfrak{k})$. Da nach dem soeben bewiesenen

$$n_\Gamma(\mathfrak{p}_\mathfrak{k})^f = n_\Gamma(\mathfrak{p}_\mathfrak{k}^f) = n_\Gamma(N_\mathfrak{k}(\mathfrak{p}))$$

gilt, ist auch Satz 7 bewiesen[14a]).

---

[13]) W II, § 106.

[14]) G II, § 2.

[14a]) Siehe auch K § 4, 33.

III. Teil.

Die Verzweigungstheorie der allgemeinen Ordnung.

§ 6.

Der Verzweigungsmodul einer Ordnung.

Wie in § 1 sei $\mathfrak{o}$ eine endliche Γ-Ordnung vom Rang n; sie ist nach § 2 in ihrem Komplementärmodul $\mathfrak{o}'$ enthalten. Der zu $\mathfrak{o}$ bez. Γ gehörige *Verzweigungsmodul* $\mathfrak{v}$ ist definiert als Restklassenmodul $\mathfrak{o}' | \mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{o}$ als Operatorenbereich; wie üblich ist das Produkt $\omega \bar{\alpha}$ eines Elementes ω aus $\mathfrak{o}$ und eines Elementes $\bar{\alpha}$ aus $\mathfrak{v}$ definiert durch $\overline{\omega \alpha}$, wenn der Querstrich Restklassenbildung nach $\mathfrak{o}$ andeutet. Zulässige Untergruppen in $\mathfrak{v}$ sind also allein die $\mathfrak{o}$-Moduln. Der im Körper K gebildete Modulquotient $\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}'}$ werde die *Differente von* $\mathfrak{o}$ genannt; man überzeugt sich sofort, daß $\mathfrak{d}$ der Annullator von $\mathfrak{v}$ ist. $\mathfrak{d}$ ist vom Nullideal verschieden; $\mathfrak{d}$ enthält nämlich das von Null verschiedene Element $|s(\omega_i \omega_j)|$, wie man durch Auflösen der für entsprechende Basen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ und $\omega_1', \ldots, \omega_n'$ von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}'$ bestehenden Gleichungen $\omega_i = \sum_{j=1}^{n} s(\omega_i \omega_j)\, \omega_j' \; (i = 1, \ldots, n)$ erkennt.

§ 7.

Die zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ gehörige Verzweigungszahl.

$\mathfrak{v}$ besitzt eine Kompositionsreihe endlicher Länge von Γ-Moduln, erst recht also von $\mathfrak{o}$-Moduln. Aus zwei Untergruppen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{y}$ ergeben sich nämlich durch Auflösen der Restklassen nach $\mathfrak{o}$ zwei $\mathfrak{o}$-Moduln $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ mit $\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{X} \leqq \mathfrak{Y} \leqq \mathfrak{o}'$. Bildet man nun für eine linear unabhängige Γ-Modulbasis von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ die Determinante der Übergangssubstitution zu einer ebensolchen Basis von $\mathfrak{o}'$, so wird die zu $\mathfrak{Y}$ gehörige Determinante $d_{\mathfrak{Y}}$ Teiler der zu $\mathfrak{X}$ gehörigen $d_{\mathfrak{X}}$, und zwar dann und nur dann echter Teiler, wenn $\mathfrak{Y}$ echte Obergruppe von $\mathfrak{X}$ ist, und beide Determinanten sind Teiler der entsprechenden Determinante von $\mathfrak{o}$, d. h. der von Null verschiedenen Zahl $|s(\omega_i \omega_j)| = d$. Daraus folgt die Behauptung. Mit $\mathfrak{v}$ hat auch jede (zulässige) Untergruppe $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{v}$ eine Kompositionsreihe endlicher Länge von Γ-Moduln und erst recht von $\mathfrak{o}$-Moduln. Die eindeutig bestimmte Länge der Kompositionsreihen von $\mathfrak{o}$-*Moduln* für $\mathfrak{v}$ bzw. eine beliebige Untergruppe $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{v}$ werde kurz als die *Länge von* $\mathfrak{v}$ *bzw.* $\mathfrak{x}$ bezeichnet.

Die Ordnungsdifferente $\mathfrak{d}$ gestattet als Ideal aus $\mathfrak{o}$ hier die eindeutige Zerlegung in Primärkomponenten $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}(\mathfrak{p}_i)$ zum zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}_i \; (i = 1, \ldots, s)$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{d}_s = \mathfrak{d}(\mathfrak{p}_1) \ldots \mathfrak{d}(\mathfrak{p}_s)$. Nach § 3,

Satz 1 wird dann $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \ldots + \mathfrak{v}_s = \mathfrak{v}(\mathfrak{p}_1) + \ldots + \mathfrak{v}(\mathfrak{p}_s)$ direkte Summe der Primärmoduln $\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}(\mathfrak{p}_i)$ mit den zugehörigen Annullatoren $\mathfrak{d}_i$.

Die zu einem in $\mathfrak{d}$ aufgehenden Primideal $\mathfrak{p}_i$ gehörige Verzweigungszahl $v(\mathfrak{p}_i)$ ist definiert als Länge des Primärmoduls $\mathfrak{v}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Für die zu $\mathfrak{d}$ teilerfremden Primideale des Ringes $\mathfrak{o}$ wird die zugehörige Verzweigungszahl gleich Null gesetzt. Es ist also $\mathfrak{v}(\mathfrak{p}) > 0$ für alle und nur die in der Ordnungsdifferente $\mathfrak{d}$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$.

§ 8.

Zu diesen beiden soeben erläuterten grundlegenden Begriffen treten einige weitere, die zur Formulierung des Verzweigungssatzes benötigt werden.

1. *Hauptradikal eines Ideals der Ordnung und dazu gehörige Bestandteile.* Das *Hauptradikal* $\mathfrak{W}(\mathfrak{a})$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{o}$ ist erklärt als Produkt der sämtlichen Primideale, die in seinem Erweiterungsideal $\mathfrak{A} = \mathfrak{O}\mathfrak{a}$ in der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ aufgehen. Die Bezeichnung rührt daher, daß dieses Primidealprodukt das Radikal des Restklassenringes $\mathfrak{O} \mid \mathfrak{A}$ wird.

Für ein beliebiges Ideal $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{O}$ ist der zu einem Hauptradikal $\mathfrak{W}(\mathfrak{a})$ gehörige Bestandteil $\mathfrak{B}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{a})}$ bestimmt als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches aller zu $\mathfrak{W}(\mathfrak{a})$ nicht teilerfremden Primärkomponenten von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{O}$.

2. *Der Supplementfaktor der Körperdifferente.* $\mathfrak{D}$ sei die Körperdifferente, d. h. die Differente $\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{O}}{\mathfrak{O}'}$ der Hauptordnung $\mathfrak{O}$. Für ein in $\mathfrak{D}$ aufgehendes Primideal $\mathfrak{P}$ bezeichne $\mathfrak{P}^e$ die genaue in der zugehörigen Primzahl p aufgehende Potenz. Der Supplementfaktor $\mathfrak{S}$ ist dann gegeben durch $\mathfrak{S} = \mathfrak{D} : \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{e-1}$, wo das Produkt über alle in $\mathfrak{D}$ aufgehenden Primideale zu nehmen ist. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Ordnung $\mathfrak{o}$ wird der zum Hauptradikal $\mathfrak{W}(\mathfrak{p})$ gehörige Bestandteil $\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p})}$ des Supplementfaktors auftreten.

3. *Der Führer einer Ordnung $\mathfrak{o}$ nach der Hauptordnung.* Der Führer von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{O}$ ist erklärt als $\mathfrak{o}$-Führer von $\mathfrak{O}$, d. h. als Annullator der Restklassengruppe $\mathfrak{O} \mid \mathfrak{o}$ (vgl. § 3). Man erkennt sofort, daß diese Definition äquivalent ist mit den gebräuchlichen, die $\mathfrak{f}$ als Modulquotienten $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}}$ oder als größten gemeinsamen Teiler aller in $\mathfrak{o}$ gelegenen Ideale von $\mathfrak{O}$ erklären.

Da die Ordnungsdifferente $\mathfrak{d}$ der $\mathfrak{o}$-Führer von $\mathfrak{o}'$ ist, muß $\mathfrak{f}$ ein Teiler von $\mathfrak{d}$ werden; genauer gilt $\mathfrak{d} \leqq \mathfrak{f}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{f}^2\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{d}$, wie man sofort einsieht, wenn man beachtet, daß die Körperdifferente $\mathfrak{D}$ der $\mathfrak{O}$-Führer von $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{f}$ wegen $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{O}'}{\mathfrak{o}'}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{o}' \leqq \mathfrak{O}'$ auch der $\mathfrak{O}'$-Führer von $\mathfrak{o}'$ ist.

4. Aus Satz 1 ergibt sich sofort

Satz 8: *Besitzt in der Ordnung* $\mathfrak{o}$ *der Führer* $\mathfrak{f}$ *die Primärideal-zerlegung* $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(\mathfrak{p}_1) \dots \mathfrak{f}(\mathfrak{p}_r) = \mathfrak{f}_1 \dots \mathfrak{f}_r$, *so wird die Hauptordnung* $\mathfrak{O}$ *direkte Summe bezüglich* $\mathfrak{o}$ *der* r *Ringe* $\mathfrak{t}_i = (\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\mathfrak{f}_i^*)$. *Die Führer von* $\mathfrak{o}$ *zu den* $\mathfrak{t}_i$ *sind die Primärkomponenten des Führers* $\mathfrak{f}$ *in* $\mathfrak{o}$, *die von den* $\mathfrak{t}_i$ *zu* $\mathfrak{O}$ *werden die* $\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i^*$. *Die Ringe* $\mathfrak{s}_i = (\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_{i-1}, \mathfrak{t}_{i+1}, \dots, \mathfrak{t}_r)$ *haben* $\mathfrak{o}$ *zum Durchschnitt; für sie ist* $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_i} = \mathfrak{f}_i^*$; $\frac{\mathfrak{s}_i}{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}\mathfrak{f}_i$; *die* $\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i$ *sind Primärideale in* $\mathfrak{s}_i$ $(i = 1, \dots, r)$.

Beweis: Da $\mathfrak{f}$ der Annullator des Restklassenmoduls $\overline{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}|\mathfrak{o}$ ist, wird $\overline{\mathfrak{O}}$ direkte Summe der $\bar{\mathfrak{t}}_i = \overline{\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i^*}$, die beim Auflösen der Restklassen wegen $\mathfrak{t}_i^2 \leqq \mathfrak{t}_i$ Ringe $\mathfrak{t}_i$ ergeben, die $\mathfrak{f}_i$ als Annullator von $\mathfrak{t}_i|\mathfrak{o}$ haben; $\mathfrak{f}_i$ ist also der Führer von $\mathfrak{t}_i$. Für $\mathfrak{s}_i = (\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_{i-1}, \mathfrak{t}_{i+1}, \dots, \mathfrak{t}_r) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\mathfrak{f}_i)$ hat man nach dem ersten Isomorphiesatz $\mathfrak{t}_i|\mathfrak{o} \simeq \mathfrak{O}|\mathfrak{s}_i$. Daß $\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i^*$ der Führer von $\mathfrak{t}_i$ nach der Hauptordnung ist, sieht man so ein: da $\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i^*$ Ideal in $\mathfrak{t}_i$ ist, kann der Führer $\tilde{\mathfrak{f}}_i = \frac{\mathfrak{t}_i}{\mathfrak{O}}$ nur ein Teiler von $\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i^*$ sein. Bei einem echten Teiler $\tilde{\mathfrak{f}}_i$ wäre wegen $\tilde{\mathfrak{f}}_i\,\mathfrak{O} \leqq \mathfrak{t}_i$ und $\mathfrak{f}_i\mathfrak{t}_i \leqq \mathfrak{o}$ das Ideal $\mathfrak{f}_i\tilde{\mathfrak{f}}_i$ Vielfaches von $\mathfrak{f}$, müßte aber zum andern wegen $\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i^* < \tilde{\mathfrak{f}}_i$ echter Teiler sein. Ebenso einfach ergibt sich $\mathfrak{f}_i^* = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_i}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i = \frac{\mathfrak{s}_i}{\mathfrak{O}}$.

$\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i$ ist in $\mathfrak{s}_i$ Primärideal. Denn da $\mathfrak{f}_i = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{t}_i}$, also $\mathfrak{t}_i\mathfrak{f}_i = \mathfrak{t}_i$, wird $\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i = (\mathfrak{s}_i, \mathfrak{t}_i)\mathfrak{f}_i = (\mathfrak{s}_i\mathfrak{f}_i, \mathfrak{f}_i) = \mathfrak{s}_i\mathfrak{f}_i$; $\mathfrak{s}_i\mathfrak{f}_i$ aber ist als Erweiterungsideal des zum Führer $\mathfrak{f}_i^* = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_i}$ teilerfremden Primärideals $\mathfrak{f}_i$ in $\mathfrak{o}$ selber Primärideal in $\mathfrak{s}_i$, da $\mathfrak{s}_i|\mathfrak{s}_i\mathfrak{f}_i \simeq \mathfrak{o}|\mathfrak{f}_i$[15]).

5. *Der Index* k $(\mathfrak{o}, \mathfrak{p})$ *eines Primideals* $\mathfrak{p}$ *der Ordnung* $\mathfrak{o}$ *in bezug auf die Hauptordnung.* Ist wieder $\mathfrak{f}$ der Führer von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{O}$, so wird *für ein zum Führer teilerfremdes Primideal* $\mathfrak{p}$ *der Ordnung* $\mathfrak{o}$ *der Index* k $(\mathfrak{o}, \mathfrak{p})$ *gleich Null* gesetzt. *Für ein in* $\mathfrak{f}$ *aufgehendes Primideal* $\mathfrak{p}_i$ *ist* k $(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}_i)$ *festgesetzt als Länge einer Kompositionsreihe von* $\mathfrak{o}$*-Moduln, die von* $\mathfrak{o}$ *zu demjenigen (eindeutig bestimmten) der Ringe* $\mathfrak{t}_i$ *aus* 4. *gezogen ist, dessen* $\mathfrak{o}$*-Führer durch* $\mathfrak{p}_i$ *teilbar wird.*

§ 9.

Der Verzweigungssatz.

Satz 9. *Für eine rationale Primzahl* p *gelte in der Ordnung* $\mathfrak{o}$ *die Zerlegung* $\mathfrak{o}\,p = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a}$, *wo* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{a}$ *teilerfremdes Primärideal der*

[15]) Vgl. hierzu G I, § 8; für die Theorie der zum Führer teilerfremden Ideale sei einmal für immer auf G I, § 7 verwiesen.

Länge $\lambda(\mathfrak{q})$ *mit* $\mathfrak{p}$ *als zugehörigem Primideal ist. Es sei* $\mathfrak{W}(\mathfrak{p})$ *das zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige Hauptradikal,* $\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p})}$ *der zu* $\mathfrak{W}(\mathfrak{p})$ *gehörige Bestandteil des Supplementfaktors* $\mathfrak{S}$ *der Körperdifferente* $\mathfrak{D}$. $k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p})$ *bezeichne den zum Primideal* $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathfrak{o}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{O}$ *gehörigen Index; der Grad eines Ideals* $\mathfrak{B}$ *aus* $\mathfrak{O}$ *bezüglich* $\mathfrak{o}$ *sei durch* $g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{B})$ *bezeichnet.*

Dann gilt für die zu $\mathfrak{p}$ *gehörige Verzweigungszahl*

$$v(\mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{q}) - g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{W}(\mathfrak{p})) + g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p})}) + 2 \cdot k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}).$$

Zusatz 1: Die in der Formulierung des Verzweigungssatzes auftretenden Summanden $\lambda(\mathfrak{q}) - g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{W}(\mathfrak{p}))$, $g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p})})$ und $k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p})$ sind *nichtnegative ganze Zahlen*; infolgedessen wird $v(\mathfrak{p}) = 0$ dann und nur dann, wenn alle drei verschwinden.

Zusatz 2: Dann und nur dann ist $v(\mathfrak{p}) > 0$, wenn $\lambda(\mathfrak{q}) \geqq 2$, d. h. die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ eigentlich ist.

$k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p})$ gestattet eine oft bequeme Berechnung gemäß

Zusatz 3: Ist $\mathfrak{f}(\mathfrak{p})$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente des Führers $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}}$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{p})$ deren Erweiterungsideal $\mathfrak{O}\mathfrak{f}(\mathfrak{p})$, so wird

$$k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}) = g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{F}(\mathfrak{p})) - \lambda(\mathfrak{f}(\mathfrak{p})).$$

Man erkennt leicht, daß für zum Führer $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}}$ teilerfremde Primideale $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{o}$ die Verzweigungszahl $v(\mathfrak{p})$ gleich wird dem Exponenten δ des Erweiterungsideals $\mathfrak{P} = \mathfrak{O}\mathfrak{p}$ in der Körperdifferente $\mathfrak{D}$. Ebenso einfach überzeugt man sich davon, daß für $\mathfrak{o} = \mathfrak{O}$ Satz 9 in den bekannten Dedekindschen Differentensatz übergeht.

§ 10.

Der Beweis des Verzweigungssatzes.

1. Neben den schon in den vorangehenden Paragraphen gegebenen Hilfsmitteln beruht der Beweis vor allem auf dem folgenden in einer früheren Arbeit unter unnötigen Einschränkungen[16]) abgeleiteten

---

[16]) G II, § 6, 2. Die unter Absatz A der soeben zitierten Stelle getroffene Annahme, daß $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$ einen Hauptidealring enthalten, in bezug auf den sie endliche Moduln sind, oder die in Absatz B geforderte, daß $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$ in einer separablen Körpererweiterung des als Multiplikationsring vorausgesetzten Grundbereiches liegen, sind also beidemal für das jetzt gegebene Beweisverfahren überflüssig; wesentlich ist nur, daß die Voraussetzungen der in § 4 entwickelten Gradtheorie zutreffen. Siehe dazu K § 4, 33 und auch noch H. Grell, Über die Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie in endlichen Erweiterungen 1. und 2. Art, Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 503—505.

Hilfssatz 1: In $\mathfrak{o}$ sei das Primärideal $\mathfrak{q}$ von der Länge $\lambda(\mathfrak{q})$ und der Ordnung $\mathfrak{q}^0 = \mathfrak{o}$ umkehrbar[17]). In $\mathfrak{O}$ besitze das Erweiterungsideal $\mathfrak{Q} = \mathfrak{O}\mathfrak{q}$ die Primidealzerlegung $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_t^{e_t}$; $g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{P}_i)$ sei der Grad von $\mathfrak{P}_i$ bezüglich $\mathfrak{o}$ $(i = 1, \dots, t)$. Dann gilt

$$\lambda(\mathfrak{q}) = e_1 g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{P}_1) + \dots + e_t g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{P}_t).$$

Beweis: Wegen der in § 4 entwickelten Gradgesetze braucht lediglich $\lambda(\mathfrak{q}) = g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{q}) = g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{Q})$ bewiesen zu werden. Die zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{O}\mathfrak{q}$ gelegenen $\mathfrak{o}$-Moduln entsprechen wegen $\mathfrak{q}\mathfrak{q}^{-1} = \mathfrak{o}$ umkehrbar eindeutig den zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$ gelegenen, und dabei gehen Kompositionsreihen ineinander über. Die Länge einer von $\mathfrak{q}$ über $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{O}$ gezogenen $\mathfrak{o}$-Modulkompositionsreihe ist gleich der einer über $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{O}$ gezogenen; von $\mathfrak{q}$ nach $\mathfrak{o}$ muß sich nach dem soeben bemerkten dieselbe Länge ergeben wie von $\mathfrak{Q}$ nach $\mathfrak{O}$, d. h. $\lambda(\mathfrak{q}) = g_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{Q})$.

2. Zur Bestimmung von $v(\mathfrak{p})$ schalte man zwischen $\mathfrak{o}$ und seinen Komplementärmodul $\mathfrak{o}'$ die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ und deren Komplementärmodul $\mathfrak{O}'$ ein; es ist dann $\mathfrak{o} < \mathfrak{O} < \mathfrak{O}' < \mathfrak{o}'$. Bei Restklassenbildung nach $\mathfrak{o}$ gehen $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{o}'$ über in $\mathfrak{o}$-Moduln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{v}$; ihre Primärmoduln sind nach Satz 1 und Folgerung 1 gegeben durch $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{d}_i^* \mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{d}_i^* \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{v}_i = \mathfrak{d}_i^* \mathfrak{v}$, wenn die Ordnungsdifferente $\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}'}$ in $\mathfrak{o}$ die Primäridealzerlegung $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 \dots \mathfrak{d}_s$ besitzt und $\mathfrak{d}_i^* = \mathfrak{d}_1 \dots \mathfrak{d}_{i-1} \mathfrak{d}_{i+1} \dots \mathfrak{d}_s$ gesetzt wurde $(i = 1, \dots, s)$. Die zu dem in $\mathfrak{d}_i$ aufgehenden Primideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ gehörige Verzweigungszahl $v(\mathfrak{p}_i)$ ist dann die Summe der Längen der $\mathfrak{o}$-Modulkompositionsreihen von $\mathfrak{v}_i | \mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{y}_i | \mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{x}_i$.

3. Die Numerierung der Primärkomponenten $\mathfrak{d}_i$ von $\mathfrak{d}$ sei so gewählt, daß $\mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{d}_r$ $(r \leqq s)$ zu dem in $\mathfrak{d}$ aufgehenden Führer $\mathfrak{f}$ nicht teilerfremd sind, hingegen bei $r < s$ die Ideale $\mathfrak{d}_{r+1}, \dots, \mathfrak{d}_s$ zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd ausfallen. Man setze $\mathfrak{f}_i = (\mathfrak{f}, \mathfrak{d}_i)$ und $\mathfrak{f}_i^* = (\mathfrak{f}, \mathfrak{d}_i^*)$; dann wird für $r < i \leqq s$ das Ideal $\mathfrak{f}_i^* = \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 \dots \mathfrak{f}_r$ die Primäridealzerlegung von $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{o}$. Unter dem durch $\mathfrak{d}_i$ bzw. $\mathfrak{d}_i^*$ bestimmten Bestandteil von $\mathfrak{D}$ verstehe man die in $\mathfrak{O}$ gelegenen Ideale $\mathfrak{D}_i = (\mathfrak{D}, \mathfrak{O}\mathfrak{d}_i)$ und $\mathfrak{D}_i^* = (\mathfrak{D}, \mathfrak{O}\mathfrak{d}_i^*)$; natürlich wird bei $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{O}$ das zugehörige $\mathfrak{D}_i^* = \mathfrak{D}$, da ja $\mathfrak{d}$ Teiler von $\mathfrak{D}$ ist.

4. Aus den Primärmoduln $\mathfrak{x}_i$ von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_i$ von $\mathfrak{y}$ entstehen durch Auflösen der Restklassen die $\mathfrak{o}$-Moduln $(\mathfrak{o}, \mathfrak{O}'\mathfrak{d}_i^*)$ und $(\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\mathfrak{d}_i^*)$; wegen $\mathfrak{D}_i = (\mathfrak{D}, \mathfrak{O}\mathfrak{d}_i)$, also $\mathfrak{O}'\mathfrak{D}_i = (\mathfrak{O}\mathfrak{d}_i, \mathfrak{D})\mathfrak{O}'$ hat man dann nach dem ersten

[17]) Für die Definition der Umkehrbarkeit siehe den Anfang von § 12. Ist $\mathfrak{q}$ größte Primärkomponente eines Hauptideals $\mathfrak{o}\alpha = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a}$ mit $(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$, so wird wegen $\mathfrak{o} = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{a}\alpha^{-1}$ nach § 12 $\mathfrak{q}$ umkehrbar; Hilfssatz 2 dieses Paragraphen zeigt, daß umgekehrt jedes umkehrbare Primärideal $\mathfrak{q}$ der Ordnung $\mathfrak{q}^0 = \mathfrak{o}$ größte Primärkomponente eines Hauptideals ist.

und zweiten Isomorphiesatz[18]) und nach Satz 1, Folgerung 1 und 2 die Beziehung

$$\mathfrak{y}_i|\mathfrak{x}_i \simeq \mathfrak{O}'\mathfrak{d}_i^*|\mathfrak{O}\mathfrak{d}_i^* \simeq \mathfrak{O}'|(\mathfrak{O},\mathfrak{O}'\mathfrak{d}_i) = \mathfrak{O}'|\mathfrak{O}'\mathfrak{D}_i.$$

Nun ist $\mathfrak{O}'$ von der Form $\mathfrak{O}' = (\mathfrak{O}'\mathfrak{D}_i, \mathfrak{O}\lambda)$ bei passendem λ aus dem Körper K. Bezeichnet nämlich ΓD die Körperdiskriminante, so wird $D\mathfrak{O}'$ ein Ideal $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{O}$, das Teiler von $\mathfrak{B}\mathfrak{D}_i$ ist, also in der Form $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}\mathfrak{D}_i, \mathfrak{O}\beta)$ mit $\mathfrak{O}\beta = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}_i) = \mathfrak{O}$ angenommen werden kann. $\lambda = \beta D^{-1}$ ist dann das gesuchte Element. Nach dem ersten Isomorphiesatz hat man

$$\mathfrak{O}'|\mathfrak{O}'\mathfrak{D}_i = (\mathfrak{O}'\mathfrak{D}_i, \mathfrak{O}\lambda)|\mathfrak{O}'\mathfrak{D}_i \simeq \mathfrak{O}\lambda|\mathfrak{O}'\mathfrak{D}_i \cap \mathfrak{O}\lambda \simeq \mathfrak{O}\beta|\mathfrak{O}\beta \cap \mathfrak{B}\mathfrak{D}_i.$$

Ist ein Element $\omega\beta$ aus $\mathfrak{O}\beta$ in $\mathfrak{B}\mathfrak{D}_i$ enthalten, so wird

$$\mathfrak{O}\omega\beta = \omega\mathfrak{C}\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{D}_i\mathfrak{B}, \quad \omega\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{D}_i,$$

also wegen $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D}_i) = \mathfrak{O}$ auch $\omega \equiv \hat{o}\ (\mathfrak{D}_i)$, d. h. $\mathfrak{O}\beta \cap \mathfrak{B}\mathfrak{D}_i \leqq \mathfrak{D}_i\beta$. Da auch $\mathfrak{D}_i\beta \leqq \mathfrak{O}\beta \cap \mathfrak{B}\mathfrak{D}_i$, hat man $\mathfrak{O}\beta \cap \mathfrak{B}\mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_i\beta$, somit schließlich die $\mathfrak{O}$-Modulisomorphie

$$\mathfrak{O}'|\mathfrak{O}'\mathfrak{D}_i \simeq \mathfrak{O}\beta|\mathfrak{D}_i\beta \sim \mathfrak{O}|\mathfrak{D}_i.$$

Demnach entsprechen die zwischen $\mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{y}_i$ gelegenen $\mathfrak{o}$-Moduln umkehrbar eindeutig den zwischen $\mathfrak{D}_i$ und $\mathfrak{O}$ gelegenen; es ist also die Länge einer $\mathfrak{o}$-Modulkompositionsreihe von $\mathfrak{y}_i|\mathfrak{x}_i$ gleich $g_0(\mathfrak{D}_i)$.

Sei nun $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{q}$ seine zugehörige Primärkomponente in der Zerlegung $\mathfrak{o}p = \mathfrak{q}\cdot\mathfrak{a}$ der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen rationalen Primzahl p, also $(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$; $\mathfrak{O}\mathfrak{q} = \mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{P}_g^{e_g}\mathfrak{P}_{g+1}^{e_{g+1}} \ldots \mathfrak{P}_h^{e_h}$ sei die Primidealzerfällung des Erweiterungsideals $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{q}$ in der Hauptordnung $\mathfrak{O}$. Dabei sollen $\mathfrak{P}_{g+1}, \ldots, \mathfrak{P}_h$ die (eventuell gar nicht auftretenden) Primideale von $\mathfrak{Q}$ bedeuten, die zur Körperdifferente $\mathfrak{D}$ teilerfremd sind, während $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_g$ in $\mathfrak{D}$ aufgehen (auch hier ist eventuell $e_r = \ldots = e_g = 0$ zu setzen, was aber natürlich nur dann eintreten kann, wenn $\mathfrak{P}_{g+1}, \ldots, \mathfrak{P}_h$ wirklich vorkommen). Da das Ideal $\mathfrak{Q}$ wegen $\mathfrak{O}p = \mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{O}\mathfrak{a}$ und $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{O}\mathfrak{a}) = \mathfrak{O}$ die Primideale $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_h$ in der genauen Potenz enthält, mit der sie in $\mathfrak{O}p$ auftreten, müssen nach dem Dedekindschen Differentensatz für die Hauptordnungen die Exponenten $e_{g+1}, \ldots, e_h$, falls sie überhaupt von Null verschieden sind, sämtlich gleich der Eins werden; $\mathfrak{P}_{g+1}, \ldots, \mathfrak{P}_h$ liefern also keinen Beitrag zum Supplementfaktor $\mathfrak{S}$ der Körperdifferente, erst recht also auch keinen zu dem zum Hauptradikal $\mathfrak{W}(\mathfrak{p})$ gehörigen Bestandteil $\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p})}$ von $\mathfrak{S}$, somit auch nicht zu dessen Grad $g_0(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p})})$. Nach dem unter 1. genannten Hilfssatz wird nun

$$\lambda(\mathfrak{q}) = e_1 g_0(\mathfrak{P}_1) + \ldots + e_g g_0(\mathfrak{P}_g) + e_{g+1} g_0(\mathfrak{P}_{g+1}) + \ldots + e_h g_0(\mathfrak{P}_h);$$

[18]) W I, § 40.

das Hauptradikal $\mathfrak{W}(\mathfrak{p})$ hat die Gestalt $\mathfrak{W}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_g \mathfrak{P}_{g+1} \dots \mathfrak{P}_h$, wobei unter Umständen die eine oder andere der beiden Serien $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_g$ bzw. $\mathfrak{P}_{g+1}, \dots, \mathfrak{P}_h$ fortfallen kann. Auf jeden Fall heben sich in der Differenz $\lambda(\mathfrak{q}) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p}))$ die seitens der Primideale $\mathfrak{P}_{g+1}, \dots, \mathfrak{P}_h$ eingehenden Beiträge heraus; sie ist also bei $e_1 = \dots = e_g = 0$ selbst gleich Null, andernfalls wird

$$\lambda(\mathfrak{q}) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p})) = (e_1 - 1)\, g_0(\mathfrak{P}_1) + \dots + (e_g - 1)\, g_0(\mathfrak{P}_g).$$

Es sei nun $\mathfrak{p}$ gleich einem der in der Ordnungsdifferente aufgehenden Primideale, etwa $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. Wird der durch $\mathfrak{d}_i$ bestimmte Bestandteil von $\mathfrak{D}$ gleich $\mathfrak{O}$, also $(\mathfrak{D}, \mathfrak{O}\,\mathfrak{d}_i) = \mathfrak{O}$, so erhält man nach dem soeben ausgeführten $\lambda(\mathfrak{q}_i) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p})) = g_0(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p}_i)}) = g_0(\mathfrak{D}_i) = 0$, also

$$g_0(\mathfrak{D}_i) = \lambda(\mathfrak{q}_i) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p}_i)) + g_0(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p}_i)}).$$

Andernfalls gelte für $\mathfrak{D}_i = (\mathfrak{D}, \mathfrak{O}\,\mathfrak{d}_i)$ die Zerlegung $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{P}_1^{\delta_1} \dots \mathfrak{P}_g^{\delta_g}$ mit $\delta_j = (e_j - 1) + \varrho_j$, wo die ϱ_j die Hensel-Oreschen Supplementzahlen sind. Es wird dann

$$\begin{aligned} g_0(\mathfrak{D}_i) &= \sum_1^g (e_j - 1)\, g_0(\mathfrak{P}_j) + \sum_1^g \varrho_j \cdot g_0(\mathfrak{P}_j) \\ &= \sum_1^g (e_j - 1)\, g_0(\mathfrak{P}_j) + g_0(\mathfrak{P}_1^{\varrho_1} \dots \mathfrak{P}_g^{\varrho_g}) \\ &= \lambda(\mathfrak{q}) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p}_i)) + g_0(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p}_i)}). \end{aligned}$$

Die Gleichung $g_0(\mathfrak{D}_i) = \lambda(\mathfrak{q}_i) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p}_i)) + g_0(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p}_i)})$ gilt also in allen Fällen. $\lambda(\mathfrak{q}_i) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p}_i)) + g_0(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p}_i)})$ ist also stets die Länge der $\mathfrak{o}$-Modulkompositionsreihe von $\mathfrak{y}_i | \mathfrak{x}_i$, wenn $\mathfrak{p}_i$ das zum Primärmodul $\mathfrak{v}_i$ gehörige Primideal im Ring $\mathfrak{o}$ bezeichnet.

5. Da $\mathfrak{f}$ der Annullator von $\mathfrak{O}|\mathfrak{o}$ und somit für $i = 1, \dots, r$ immer $\overline{\mathfrak{O}\,\mathfrak{f}_i^*} = \overline{\mathfrak{O}\,\mathfrak{d}_i^*}$ ist, wird $(\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\,\mathfrak{d}_i^*) = (\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\,\mathfrak{f}_i^*) = \mathfrak{t}_i$, also die Länge von $\mathfrak{x}_i$ gleich der von $\mathfrak{t}_i$, d. h. gleich $k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}_i)$.

6. Nach Satz 1, Folgerung 2 wird

$$\mathfrak{v}_i | \mathfrak{y}_i \sim \mathfrak{v} | (\overline{\mathfrak{O}'}, \overline{\mathfrak{o}'\,\mathfrak{d}_i}) \simeq \mathfrak{o}' | (\mathfrak{O}', \mathfrak{o}'\,\mathfrak{d}_i),$$

nach Folgerung 3 wird $\mathfrak{o}'$ direkte Summe der $(\mathfrak{O}', \mathfrak{o}'\,\mathfrak{d}_i^*)$ bezüglich $\mathfrak{O}'$ $(i = 1, \dots, r)$. Somit wird $\mathfrak{O}'$ direkter Durchschnitt der $(\mathfrak{O}', \mathfrak{o}'\,\mathfrak{d}_i)$ bezüglich $\mathfrak{o}'$ $(i = 1, \dots, r)$, demnach zufolge der in § 2 angeführten Sätze über Komplementärmoduln $\mathfrak{O}$ direkte Summe der $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{O} \cap \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{d}_i}$ bezüglich $\mathfrak{o}$. Wegen $\mathfrak{c}_i \leqq \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{d}_i}$ besitzt $\mathfrak{c}_i | \mathfrak{o}$ einen in $\mathfrak{d}_i$ aufgehenden Annullator; daraus folgt nach Satz 1 und seiner Folgerung 1, daß $\mathfrak{O} \cap \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{d}_i} = (\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\,\mathfrak{f}_i^*) = \mathfrak{t}_i$ wird. Da die Länge von $\mathfrak{v}_i | \mathfrak{y}_i$ gleich ist der von $\mathfrak{o}' | (\mathfrak{O}', \mathfrak{o}'\,\mathfrak{d}_i)$ und diese

gleich der von $(\mathfrak{O}', \mathfrak{o}'\mathfrak{d}_i^*)|\mathfrak{O}'$, diese aber nach den Gesetzen der komplementären Moduln gleich der von $\mathfrak{O}|\mathfrak{s}_i \simeq \mathfrak{t}_i|\mathfrak{o} = \mathfrak{x}_i$ ausfällt, ergibt sich schließlich die Länge von $\mathfrak{v}_i|\mathfrak{v}_i$ gleich der von $\mathfrak{x}_i$, also gleich $k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}_i)$.

Der Verzweigungssatz ist damit bewiesen.

7. Beweis von Zusatz 1: Daß $\lambda(\mathfrak{q}) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p})) \geqq 0$, ergibt sich ohne weiteres aus der Beweisführung in 4.

8. Beweis von Zusatz 2: a) Für die zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{o}\,p = \mathfrak{q}\cdot\mathfrak{a}$ sei $\lambda(\mathfrak{q}) \geqq 2$ und $v(\mathfrak{p}) = 0$. $v(\mathfrak{p}) = 0$ hat nach Zusatz 1 die Gültigkeit von $\lambda(\mathfrak{q}) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p})) = k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}) = 0$ zur Folge. $k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}) = 0$ bedeutet, daß $\mathfrak{p}$ zum Führer $\mathfrak{f}$ nach der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ teilerfremd ist, also $\mathfrak{q}$ nach der Theorie der zum Führer teilerfremden Ideale gleich wird einer Potenz $\mathfrak{p}^e$ des zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}$, woraus sich $\lambda(\mathfrak{q}) = e \geqq 2$ schließen läßt. Das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Hauptradikal wird ebenfalls nach der Theorie der zum Führer teilerfremden Ideale $\mathfrak{W}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{O}\,\mathfrak{p}$; $g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p})) = 1$ ergibt sich aus der Isomorphie von $\mathfrak{O}|\mathfrak{O}\,\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}|\mathfrak{p}$. Demnach ist $\lambda(\mathfrak{q}) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p})) = e - 1 \geqq 1$, obwohl doch $\lambda(\mathfrak{q}) - g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p})) = 0$ sein sollte.

b) Sei bei $v(\mathfrak{p}) > 0$ erfüllt $\lambda(\mathfrak{q}) = 1$, d. h. $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{o}\,p = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a}$, mit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$. Notwendig wird dann $(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. Denn aus $\mathfrak{o}\,p = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a}$ folgt wegen $\mathfrak{o} = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{a}\,p^{-1}$ die Umkehrbarkeit von $\mathfrak{p}$; es wird $\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{a}\,p^{-1}$. Deshalb werden alle zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale $\mathfrak{q}$ Primidealpotenzen; denn $\mathfrak{q}$ muß gleich werden der höchsten in ihm aufgehenden Potenz $\mathfrak{p}^\sigma$ von $\mathfrak{p}$, weil sonst $\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}^{-\sigma}$ ein durch $\mathfrak{p}$ teilbares Primärideal, also $\mathfrak{q} \leqq \mathfrak{p}^{\sigma+1}$ werden würde.

Würde nun $\mathfrak{p}$ mit einem der in $\mathfrak{f}$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}_i$ identisch, so müßten im Ring $\mathfrak{s}_i = (\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\,\mathfrak{f}_i)$ wegen $\mathfrak{f}_i^* = \overset{0}{\mathfrak{s}_i}$ nach der Theorie der zum Führer teilerfremden Ideale[15]) auch die zu dem im Primärideal $\mathfrak{s}_i\,\mathfrak{f}_i = \mathfrak{O}\,\mathfrak{f}_i$ aufgehenden Primideal gehörigen Primärideale, also überhaupt alle Primärideale Primidealpotenzen werden, woraus zu schließen wäre[19]), das $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{O}$, also $\mathfrak{f}_i^* = \mathfrak{f}$ würde, was nicht geht. Somit ist $(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$.

Man hat somit zunächst $k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}) = 0$. Weiter wird $\mathfrak{O}\,p = \mathfrak{P}\,\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{P} = \mathfrak{O}\,\mathfrak{p}$ als einem zu $\mathfrak{A}$ teilerfremden Primideal. Nach dem Dedekindschen Differentensatz geht dann $\mathfrak{P}$ nicht im Supplementfaktor der Körperdifferente auf, und da $\mathfrak{P} = \mathfrak{O}\,\mathfrak{p} = \mathfrak{W}(\mathfrak{p})$ das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Hauptradikal ist, ergibt sich $g_0(\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}(\mathfrak{p})}) = 0$. Aus der Isomorphie $\mathfrak{o}|\mathfrak{p} \sim \mathfrak{O}|\mathfrak{P}$ folgt $g_0(\mathfrak{W}(\mathfrak{p})) = g_0(\mathfrak{P}) = 1$, und da auch $\lambda(\mathfrak{p}) = 1$ ausfällt, wird entgegen der eingangs gemachten Voraussetzung $v(\mathfrak{p}) = 0$. Damit ist Zusatz 2 bewiesen.

---

[19]) N § 9.

9. Beweis von Zusatz 3: Für ein zum Führer $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}}$ teilerfremdes Ideal $\mathfrak{f}(\mathfrak{p})$ ist die Behauptung selbstverständlich. Ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ ein Teiler von $\mathfrak{f}$, so gehe man wieder in den Ring $\mathfrak{s}_i$ über. Die in $\mathfrak{o}$ genommene Länge $\lambda(\mathfrak{f}_i)$ von $\mathfrak{f}_i$ ist der in $\mathfrak{s}_i$ genommenen des Erweiterungsideals $\mathfrak{s}_i\mathfrak{f}_i = \mathfrak{O}\mathfrak{f}_i$ gleich, da $\mathfrak{s}_i|\mathfrak{s}_i\mathfrak{f}_i \simeq \mathfrak{o}|\mathfrak{f}_i$; es ist also $\lambda(\mathfrak{f}_i) = g_0(\mathfrak{s}_i\mathfrak{f}_i)$. $g_0(\mathfrak{s}_i\mathfrak{f}_i)$ aber wird gleich der Differenz der Länge einer von $\mathfrak{s}_i\mathfrak{f}_i = \mathfrak{O}\mathfrak{f}_i$ nach $\mathfrak{O}$ laufenden $\mathfrak{o}$-Modulkompositionsreihe und der einer von $\mathfrak{s}_i$ nach $\mathfrak{O}$ gezogenen. Da $\mathfrak{O}|\mathfrak{s}_i \simeq \mathfrak{t}_i|\mathfrak{o}$, hat man also $\lambda(\mathfrak{f}_i) = g_0(\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i) - k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}_i)$, d. h. $k(\mathfrak{o}, \mathfrak{p}) = g_0(\mathfrak{F}(\mathfrak{p})) - \lambda(\mathfrak{f}(\mathfrak{p}))$. Dabei bedeutet $g_0(\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i)$ den in $\mathfrak{O}$ bezüglich $\mathfrak{o}$ gebildeten Grad des Ideals $\mathfrak{O}\mathfrak{f}_i$.

§ 11.

Der Diskriminantensatz für beliebige Ordnungen.

1. Bedeutet $\omega_1, \ldots, \omega_n$ eine linear unabhängige Γ-Modulbasis der Ordnung $\mathfrak{o}$, so ist die *Ordnungsdiskriminante* Γd definiert als das aus der Spurendeterminante $d = |s(\omega_i\omega_j)|$ in Γ abgeleitete Ideal, das bekanntlich von der speziellen Basiswahl unabhängig ist.

Faßt man den Verzweigungsmodul $\mathfrak{v}$ als endlichen Γ-Modul auf, so gilt für $\mathfrak{v}$ der Hauptsatz der Abelschen Gruppen[20]). Als *Norm* $N(\mathfrak{v})$ *des Verzweigungsmoduls* $\mathfrak{v}$ *bezüglich* Γ erklärt man das eindeutig bestimmte Produkt der bei einer direkten Summenzerlegung $\mathfrak{v} = \mathfrak{C}_1 + \ldots + \mathfrak{C}_t$ in zyklische Summanden $\mathfrak{C}_i$ mit den Annullatoren $\mathfrak{c}_i$ und $\mathfrak{c}_i \leqq \mathfrak{c}_{i+1}$ auftretenden Annullatoren: $N(\mathfrak{v}) = \mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{c}_t$. Da dieses Produkt gleich wird der Determinante der Übergangssubstitution einer linear unabhängigen Γ-Basis von $\mathfrak{o}$ zu einer von $\mathfrak{o}'$, hat man sofort den

Satz 10: *Die Norm des Verzweigungsmoduls ist die Ordnungsdiskriminante.*

2. Es gelten die beiden folgenden Tatsachen:

Satz 11. *Die Norm von* $\mathfrak{v}$ *ist gleich dem Produkt der Normen der Primärmoduln* $\mathfrak{v}_i$.

Beweis: Zieht man die Kompositionsreihe

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{w}_0 = \mathfrak{v}_1 + \ldots + \mathfrak{v}_s;\ \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{v}_2 + \ldots + \mathfrak{v}_s;\ \ldots;\ \mathfrak{w}_{s-1} = \mathfrak{v}_s;\ \mathfrak{w}_s = (0),$$

so wird die Norm von $\mathfrak{v}$ gleich dem Produkt der Normen von $\mathfrak{w}_\nu|\mathfrak{w}_{\nu+1}$. Nach dem ersten Isomorphiesatz ist $\mathfrak{w}_\nu|\mathfrak{w}_{\nu+1} \simeq \mathfrak{v}_{\nu+1}$, also, da $\mathfrak{o}$-modulisomorphe Gruppen dieselben Normen ergeben, $N\mathfrak{v} = \prod_\nu N\mathfrak{v}_\nu$.

Satz 12: *Die Norm* $N(\mathfrak{v}_i)$ *des Primärmoduls* $\mathfrak{v}_i$, *dessen Annullator in* $\mathfrak{o}$ *die Primärkomponente* $\mathfrak{d}_i$ *von* $\mathfrak{d}$ *mit dem zugehörigen Primideal* $\mathfrak{p}_i$ *ist, wird gleich der* $v(\mathfrak{p}_i)$*-ten Potenz der Norm* $N(\mathfrak{p}_i)$ *des Primideals.*

---

[20]) W II, § 107.

Beweis: Zieht man in $\mathfrak{v}_i$ eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{o}$-Moduln, so ist das Restklassensystem $\mathfrak{v}_{i,\nu} | \mathfrak{v}_{i,\nu+1}$ zweier aufeinanderfolgenden Glieder $\mathfrak{v}_{i,\nu}$ und $\mathfrak{v}_{i,\nu+1}$ dieser Reihe $\mathfrak{o}$-operatorisomorph dem Restklassenring $\mathfrak{o} | \mathfrak{p}_i$ (vgl. § 4, Vorbemerkung b)). Da operatorisomorphe Moduln dieselben Normen liefern und die Norm von $\mathfrak{v}_i$ dem Produkt der Normen von $\mathfrak{v}_{i,\nu} | \mathfrak{v}_{i,\nu+1}$ $(\nu = 1, \ldots, v(\mathfrak{p}_i))$ gleich wird, deren jede $N(\mathfrak{p}_i)$ wird, hat man die Behauptung.

3. Hieraus ergibt sich sofort die Primzahlzerlegung der Ordnungsdiskriminante: Es wird

$$d = \prod_p p^{\sum f_i v(\mathfrak{p}_i)};$$

dabei ist das Produkt (formal) über alle rationalen Primzahlen zu erstrecken und bei jeder einzelnen Primzahl p im Exponenten $\sum f_i v(\mathfrak{p}_i)$ über alle in p aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}_i$ aus $\mathfrak{o}$ zu summieren; $v(\mathfrak{p}_i)$ ist die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige Verzweigungszahl, f_i der Γ-Grad von $\mathfrak{p}_i$.

4. Der E. Noethersche Diskriminantensatz: *Dann und nur dann ist eine Primzahl p Teiler der Ordnungsdiskriminante, wenn das Hauptideal $\mathfrak{o}p$ eine eigentliche Primärkomponente enthält.*

Beweis: Nach 3. geht eine Primzahl p dann und nur dann in der Diskriminante Γd auf, wenn für wenigstens ein in p aufgehendes Primideal $\mathfrak{p}$ die Verzweigungszahl $v(\mathfrak{p}) > 0$ wird; das aber ist nach Zusatz 2 des Verzweigungssatzes dann und nur dann der Fall, wenn die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{o}p$ eine Länge $\lambda(\mathfrak{q}) \geqq 2$ hat, also eigentlich ist.

5. Für *die Primideale der Ordnungsdifferente* ist damit bewiesen: *In der Ordnungsdifferente gehen genau diejenigen Primideale auf, für die in ihrer rationalen Primzahl p die zugehörige Primärkomponente eigentlich ist*[21]).

Auch aus dieser abgeschwächten Form des Verzweigungssatzes ergibt sich noch der E. Noethersche Diskriminantensatz. Dazu beweisen wir vorerst den

Hilfssatz: Im Verengungsideal $\Gamma d_1 = \Gamma \cap \mathfrak{d}$ von $\mathfrak{d}$ und in der Ordnungsdiskriminante gehen dieselben Primzahlen auf.

Beweis: Aus $d \equiv 0 \ (\mathfrak{d})$ folgt $d \equiv 0 \ (d_1)$. Aus $d_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{d})$ und $d_1 \mathfrak{o} \leqq d_1 \mathfrak{o}' \leqq \mathfrak{o}$ folgt, daß $N(\Gamma d_1) = \Gamma d_1^n$ teilbar ist durch die Determinante der Übergangssubstitution einer linear unabhängigen Γ-Modul-

[21]) Für Ordnungen mit umkehrbarem Komplementärmodul kann man, wie E. Noether erkannte, dieses Resultat unter 5. fast genau so ableiten, wie man seit einigen Jahren den Differentensatz für die Hauptordnung und zugleich für die Maximalordnungen hyperkomplexer Systeme beweist. Siehe dazu etwa M. Deuring, Algebren (Berlin 1935), VI, § 5 oder Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie (Leipzig 1927), Bd. III, Teil X, § 1 und 2.

basis von $\mathfrak{o} d_1$ zu einer gleichen von $\mathfrak{o}' d_1$; diese Determinante aber ist gleich der Ordnungsdiskriminante.

Zum Beweis des Diskriminantensatzes genügt offenbar der Nachweis, daß alle und nur die in Γd_1 aufgehenden Primzahlen bei ihrer Zerlegung in $\mathfrak{o}$ eine eigentliche Primärkomponente bekommen. Hat nun $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ eine Primärkomponente $\mathfrak{q}$ der Länge $\lambda(\mathfrak{q}) \geqq 2$, so geht das Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{d}$ auf, woraus sich durch Verengung $\Gamma d_1 \leqq \Gamma \mathfrak{p}$ ergibt. Zerfällt umgekehrt $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ in lauter Primideale, so sind diese alle und folglich auch $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ selbst zu $\mathfrak{d}$ teilerfremd. Deshalb kann p auch nicht in d_1 aufgehen: bei $d_1 \equiv 0\,(p)$ hätte man $d_1 = p \cdot c_1$ mit geeignetem c_1 aus Γ, es wäre also $\mathfrak{o} c_1 \cdot \mathfrak{o}\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{d}$ und somit wegen $(\mathfrak{o}\mathfrak{p}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{o}$ auch $\Gamma c_1 \leqq \mathfrak{o} c_1 \leqq \mathfrak{d}$, obwohl c_1 echter Teiler von d_1 ist. Somit muß p zu d_1 teilerfremd sein.

IV. Teil.

Die Verzweigungstheorie der Ordnungen mit umkehrbarem Komplementärmodul.

§ 12.

Die Längenbestimmung der Ordnungsdifferente.

Ein Modul $\mathfrak{m}$ mit der zugehörigen Ordnung $\mathfrak{m}^0 = \mathfrak{o}$ heißt umkehrbar, wenn $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}} = \mathfrak{o}$ ist. Ein Modul $\mathfrak{m}$ ist dann und nur dann umkehrbar, wenn er Faktor seiner Ordnung ist, d. h. wenn es einen Modul $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{m}\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$ gibt; denn dann hat man $\mathfrak{n} \leqq \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$, also

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}} \leqq \mathfrak{o}, \quad \mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{o}.$$

Für eine Ordnung $\mathfrak{o}$ mit umkehrbarem Komplementärmodul $\mathfrak{o}'$ gilt nun der

Satz 13: *Der Restklassenmodul* $\mathfrak{o}|\mathfrak{d}$ *von* $\mathfrak{o}$ *nach der Ordnungsdifferente* $\mathfrak{d}$ *und der Verzweigungsmodul* $\mathfrak{v}$ *von* $\mathfrak{o}$ *sind* $\mathfrak{o}$*-modulisomorph.*

Zum Beweis benötigen wir vorerst den

Hilfssatz 2: Ein umkehrbares Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{o}$ als zugehöriger Ordnung $\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{o}$ ist modulo jedem Idealvielfachen $\neq (0)$ Hauptideal; $\mathfrak{a}$ läßt sich durch Multiplikation mit einem zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{o}$ teilerfremden Ideal $\mathfrak{c}$ in ein Hauptideal verwandeln.

Der Beweis verläuft ähnlich wie in dem Fall der Hauptordnung: Ein Vielfaches $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{a}$ ist von der Form $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{-1}$. Sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ die in $\mathfrak{b}_1$ aufgehenden Primideale, so wird bei

$$\mathfrak{p}_i^* = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{i-1}\, \mathfrak{p}_{i+1} \cdots \mathfrak{p}_t \quad (i = 1, \ldots, t)$$

der größte gemeinsame Teiler $(\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_t^*) = \mathfrak{o}$, woraus sofort

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{a}\mathfrak{p}_t^*)$$

folgt. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_i^*$ ist offenbar $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_t$; denn $\mathfrak{e}_1$ ist in allen $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_i^*$, also auch in deren Durchschnitt $\mathfrak{e}_2$ enthalten, andererseits ist $\mathfrak{e}_2\mathfrak{a}^{-1}$ in allen $\mathfrak{p}_i$, also auch in deren Durchschnitt $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_t$ und somit $\mathfrak{e}_2$ in $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_t = \mathfrak{e}_1$ enthalten, woraus $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_t = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_1^* \cap \ldots \cap \mathfrak{a}\mathfrak{p}_t^*$ folgt. Nun wähle man Elemente $\alpha_i \equiv 0$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_i^*)$ $(i = 1, \ldots, t)$, $\not\equiv 0$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_t)$ und setze $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_t$; dann ist α auf Grund der Wahl der α_i zu $\mathfrak{b}$ teilerfremdes Element von $\mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} = (\mathfrak{o}\alpha, \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1)$ und bei $\mathfrak{o}\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ weiter $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}) = \mathfrak{o}$. Um die weitere Aussage des Hilfssatzes zu beweisen, braucht man in den vorangehenden Schlüssen nur $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ zu wählen.

Es sei nun das Element η aus $\mathfrak{o}$ so gewählt, daß $\mathfrak{o}'\eta = \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{a}$ Ideal in $\mathfrak{o}$ wird; $\mathfrak{a}$ ist umkehrbar, weil $\mathfrak{o}'$ es ist. Aus $\mathfrak{a} = (\mathfrak{o}\alpha, \mathfrak{a}\mathfrak{d})$ mit $\mathfrak{o}\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{o}$ folgt $\mathfrak{a}|\mathfrak{a}\mathfrak{d} = (\mathfrak{o}\alpha, \mathfrak{a}\mathfrak{d})|\mathfrak{a}\mathfrak{d} \simeq \mathfrak{o}\alpha|\mathfrak{o}\alpha \cap \mathfrak{a}\mathfrak{d}$. Nun ist $\mathfrak{d}\alpha = \mathfrak{o}\alpha \cap \mathfrak{a}\mathfrak{d}$; denn $\mathfrak{d}\alpha \leqq \mathfrak{o}\alpha$, $\mathfrak{d}\alpha \leqq \mathfrak{d}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}\alpha \leqq \mathfrak{o}\alpha \cap \mathfrak{a}\mathfrak{d}$; sei ferner $\omega\alpha \equiv 0$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{d})$, $\mathfrak{o}\omega\alpha = \omega\mathfrak{c}\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{d}\mathfrak{a}$, $\omega\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{d}$, dann folgt wegen $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{o}$ hieraus $\omega \equiv 0$ $(\mathfrak{d})$. Wegen $\mathfrak{a}\mathfrak{d} = \mathfrak{o}\eta$ ergibt sich also

$$\mathfrak{o}'|\mathfrak{o} \simeq \mathfrak{o}'\eta|\mathfrak{o}\eta = \mathfrak{a}|\mathfrak{a}\mathfrak{d} \simeq \mathfrak{o}\alpha|\mathfrak{d}\alpha \simeq \mathfrak{o}|\mathfrak{d}.$$

Wir werden in Satz 19 als Umkehrung dieses Satzes 13 beweisen, daß das Bestehen der $\mathfrak{o}$-Modulisomorphie $\mathfrak{o} \simeq \mathfrak{o}|\mathfrak{d}$ ein Charakteristikum der Ordnungen mit umkehrbarem Komplementärmodul ist.

§ 13.

Kriterien für die Umkehrbarkeit des Komplementärmoduls.

1. Die sämtlichen Moduln $\mathfrak{m}$ des Körpers K, deren zugehörige Ordnung $\mathfrak{m}^0$ die feste Ordnung $\mathfrak{o}$ ist, bilden offenbar dann und nur dann eine multiplikative Gruppe, wenn sie alle umkehrbar sind; sollen sie nämlich eine Gruppe darstellen, so muß es zu jedem $\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{o}$ geben, woraus die Umkehrbarkeit folgt. Es ist nun von Interesse, daß die Frage nach der Umkehrbarkeit aller Moduln $\mathfrak{m}$ auf die eines einzigen, nämlich des Komplementes $\mathfrak{o}'$, zurückgeführt werden kann. Schon Dedekind kannte nämlich[22]) den folgenden

Satz 14: *Dann und nur dann sind sämtliche Moduln* $\mathfrak{m}$ *mit der festen zugehörigen Ordnung* $\mathfrak{m}^0 = \mathfrak{o}$ *umkehrbar, wenn* $\mathfrak{o}'$ *es ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt daraus, daß $\mathfrak{o}$ die zu $\mathfrak{o}'$ gehörige Ordnung wird. Ist bei umkehrbarem $\mathfrak{o}'$ der Modul $\mathfrak{m}$

[22]) D II, Brief an Frobenius vom 5. Februar 1883 (S. 418).

beliebig mit der Ordnung $\mathfrak{m}^0 = \mathfrak{o}$, so folgt hieraus $\mathfrak{o} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{o}' = \mathfrak{m}'\mathfrak{m}$; $\mathfrak{o} = (\mathfrak{d}\mathfrak{m}')\mathfrak{m}$. Als Faktor von $\mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{m}$ umkehrbar.

2. Für die Umkehrbarkeit von $\mathfrak{o}'$ gibt es einige mit der Verzweigungstheorie im engsten Zusammenhang stehende Kriterien.

Kriterium 1. *Für die Umkehrbarkeit von* $\mathfrak{o}'$ *ist* $\mathfrak{d}^0 = \mathfrak{o}$ *notwendig und hinreichend.*

Beweis. Wegen $\mathfrak{d}^0 \geqq \mathfrak{o}$ ist bei $\mathfrak{o}'\mathfrak{d} = \mathfrak{o}$ sicher $\mathfrak{d}^0 = \mathfrak{o}$. Sei umgekehrt $\mathfrak{d}^0 = \mathfrak{o}$. $\mathfrak{o}'\mathfrak{d} = \mathfrak{o}' \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}'}$ ist Ideal in $\mathfrak{o}$; setzt man $\mathfrak{o}'\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$, so hat man $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}' \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}'}} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}^0 = \mathfrak{o}$, woraus $\mathfrak{o}' = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{o}'$ folgt. Ist nun $\omega_1', \ldots, \omega_m'$ eine beliebige $\mathfrak{o}$-Modulbasis von $\mathfrak{o}'$, so ergeben sich aus $\mathfrak{o}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{o}'$ Gleichungen $\omega_i' = \sum_j \alpha_{ij}\omega_j'$ $(i = 1, \ldots, m)$ mit Elementen α_{ij} aus $\mathfrak{a}$, woraus wie üblich das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - 1, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} - 1, & \ldots, & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}, & \ldots, & & \alpha_{nn} - 1 \end{vmatrix}$$

geschlossen werden kann. Da $\mathfrak{a}$ Ideal in $\mathfrak{o}$, wird somit $1 \equiv 0\,(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{a}$ und damit $\mathfrak{o} = \mathfrak{a} = \mathfrak{o}'\mathfrak{d}$.

3. Es bezeichne $\mathfrak{d}$ die Ordnungsdifferente, $\mathfrak{D}$ die Körperdifferente, $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}}$ den Führer von $\mathfrak{o}$ zur Hauptordnung $\mathfrak{O}$. Dann besteht das

Kriterium 2: *Für die Umkehrbarkeit von* $\mathfrak{o}'$ *ist das Bestehen der Gleichung* $\mathfrak{O}\mathfrak{d} = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{D}$ *notwendig und hinreichend.* Hierbei ist das Gleichheitszeichen entscheidend, denn $\mathfrak{O}\mathfrak{d} \leqq \mathfrak{f}\mathfrak{D}$ ist immer erfüllt.

Beweis. Die von Dedekind in § 9 und 10 seiner Arbeit „Über die Diskriminanten endlicher Körper" (Ges. Werke 1, S. 351—396) für spezielle Ordnungen mit umkehrbarem Komplement, nämlich die regulären, durchgeführten Schlüsse gelten unverändert für jede Ordnung mit umkehrbarem Komplement; $\mathfrak{O}\mathfrak{d} = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{D}$ ist also notwendige Bedingung. Aus $\mathfrak{O}\mathfrak{d} = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{D}$ folgt durch Multiplikation mit $\mathfrak{O}' = \mathfrak{D}^{-1}$ die Gleichung $\mathfrak{O}'\mathfrak{d} = \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{o}'\mathfrak{f} = (\mathfrak{o}'\mathfrak{d})\mathfrak{O}'$. Es ist aber $\mathfrak{o}'\mathfrak{f} = \mathfrak{O}'$, wie aus $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}}$, $\mathfrak{O} = \mathfrak{f}^0 = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}\mathfrak{f}} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{f}}$ und nachfolgendem Übergang zu den Komplementärmoduln geschlossen werden kann. Aus $\mathfrak{O}' = (\mathfrak{o}'\mathfrak{d})\mathfrak{O}'$ aber folgt wie in 2., daß $1 \equiv 0\,(\mathfrak{o}'\mathfrak{d})$ und $\mathfrak{o}'\mathfrak{d} = \mathfrak{o}$ ist.

4. Das letzte noch anzuführende Kriterium stellt einen Zusammenhang zwischen der Umkehrbarkeit des Komplementärmoduls und feineren idealtheoretischen Aussagen her.

Kriterium 3. $\mathfrak{o}'$ *ist dann und nur dann umkehrbar, wenn alle Primärkomponenten, die bei der Zerfällung der im Ordnungsindex* k *aufgehenden Primzahlen* p *auftreten, irreduzible Ideale sind.*

Dabei ist k erklärt als Determinante der Übergangssubstitution einer linear unabhängigen Γ-Modulbasis von $\mathfrak{o}$ zu einer ebensolchen der Hauptordnung $\mathfrak{O}$. Ein Ideal heißt irreduzibel, wenn es sich nicht als Durchschnitt echter Teiler darstellen läßt.

Der Beweis des Kriteriums 3 gliedert sich in mehrere Einzelschritte.

a) Die zum Führer $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}}$ teilerfremden Primärideale sind als Potenzen ihres zugehörigen Primideals stets irreduzibel, so daß sich die eigentliche Aussage sogleich auf die zum Führer nicht teilerfremden Primärkomponenten von Hauptidealen $\mathfrak{o}\,p$ reduziert. Primzahlen p mit solchen Primärkomponenten in $\mathfrak{o}\,p$ aber sind sämtlich Indexteiler; denn aus $k\,\mathfrak{O} \leqq \mathfrak{o}$ folgt $k \equiv 0\,(\mathfrak{f})$, k ist also durch alle Primzahlen p teilbar, die in Primidealen des Führers enthalten sind.

b) Hilfssatz 3. Ein zu $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}}$ teilerfremdes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{o}$ hat $\mathfrak{o}$ zur Ordnung und ist umkehrbar.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für die zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Primideale $\mathfrak{r}$ zu beweisen. Zunächst ist $\mathfrak{r}^0 = \mathfrak{o}$; denn aus $\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}^0 = \mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}^0\,\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$, $(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$ folgt $\mathfrak{o}\,\mathfrak{r}^0 = (\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}^0, \mathfrak{f}\,\mathfrak{r}^0) = (\mathfrak{r}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{r}^0 \leqq \mathfrak{o}^0 = \mathfrak{o}$ und damit wegen $\mathfrak{o} \leqq \mathfrak{r}^0$ auch $\mathfrak{o} = \mathfrak{r}$. Für $\mathfrak{r}$ als Primideal muß wegen $\mathfrak{r} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{r}} \leqq \mathfrak{o}$ gelten $\mathfrak{r} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{r} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{o}$. Aus $\mathfrak{r} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$ aber würde $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{r}} \leqq \mathfrak{r}^0 = \mathfrak{o}$ folgen, obwohl $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{r}}$ ein nicht in $\mathfrak{o}$ gelegenes Element enthalten muß, was man in der üblichen Weise zeigt[23]).

c) In $\mathfrak{o}$ besitze $\mathfrak{f}$ die Primäridealzerlegung $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 \ldots \mathfrak{f}_r$; $\mathfrak{s}_i = (\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\,\mathfrak{f}_i)$ mit $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{f}_i^* = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_i} = \mathfrak{f}_1 \ldots \mathfrak{f}_{i-1}\,\mathfrak{f}_{i+1} \ldots \mathfrak{f}_r$ und $\mathfrak{O}\,\mathfrak{f}_i = \frac{\mathfrak{s}_i}{\mathfrak{O}}$ seien die in Satz 8 erwähnten Ringe. Es gilt nun

Satz 15: *Für die Umkehrbarkeit von* $\mathfrak{o}'$ *ist die aller* $\mathfrak{s}_i'$ $(i = 1, \ldots, r)$ *notwendig und hinreichend.*

Beweis. Nach b) hat $\mathfrak{g}_i$ die Ordnung $\mathfrak{g}_i^0 = \mathfrak{s}_i$ und ist umkehrbar. Aus $\mathfrak{g}_i = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_i}$ folgt $\mathfrak{g}_i^0 = \mathfrak{s}_i = \frac{\mathfrak{g}_i}{\mathfrak{g}_i} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_i\,\mathfrak{g}_i} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{g}_i}$ und hieraus $\mathfrak{s}_i' = \mathfrak{o}'\,\mathfrak{g}_i$. Da $\mathfrak{o}'$ umkehrbar, also bei $\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}'}$ gilt $\mathfrak{d}\,\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$, hat man weiter $\mathfrak{s}_i'\,\mathfrak{d} = \mathfrak{d}\,\mathfrak{o}'\,\mathfrak{g}_i = \mathfrak{o}\,\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$ und hieraus $\mathfrak{s}_i'(\mathfrak{d}\,\mathfrak{g}_i^{-1}) = \mathfrak{g}_i\,\mathfrak{g}_i^{-1} = \mathfrak{s}_i$. Als Faktor von $\mathfrak{s}_i$ aber ist $\mathfrak{s}_i'$ umkehrbar.

---

[23]) W II, § 100, Hilfssatz 3.

Es seien alle $\mathfrak{s}_i'$ umkehrbar und $\Delta_i = \frac{\mathfrak{s}_i}{\mathfrak{s}_i'}$ $(i = 1, \ldots, r)$ die Ordnungsdifferenten der $\mathfrak{s}_i$. Wegen $\mathfrak{d} \leqq \Delta_i$ ist jedenfalls $\mathfrak{d}\,\Delta_i^{-1} = \mathfrak{h}_i = \mathfrak{d}\,\mathfrak{s}_i'$ ein Ideal in $\mathfrak{s}_i$, und wegen $\mathfrak{o}' = (\mathfrak{s}_1', \ldots, \mathfrak{s}_r')$ wird $\mathfrak{d}\,\mathfrak{o}' = (\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_r)$. Nun ist $\mathfrak{h}_i \leqq \mathfrak{h}_i \mathfrak{s}_i = \mathfrak{d}\,\mathfrak{s}_i' \leqq \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{h}_i \leqq \mathfrak{g}_i = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_i}$. Aus $\mathfrak{g}_i \mathfrak{o}' = \mathfrak{s}_i'$, $\mathfrak{d}_i \mathfrak{s}_i' = \mathfrak{s}_i$. $\mathfrak{g}_i \mathfrak{s}_i \leqq \mathfrak{o}$ schließt man $\mathfrak{g}_i^2 \mathfrak{d}_i \leqq \mathfrak{d} \leqq \mathfrak{s}_i \mathfrak{d}_i$, also wegen $\mathfrak{h}_i \mathfrak{d}_i = \mathfrak{s}_i \mathfrak{d}$ weiter $\mathfrak{g}_i^2 \leqq \mathfrak{h}_i \leqq \mathfrak{g}_i$, d. h. $\mathfrak{g}_i$ und $\mathfrak{h}_i$ haben dieselben Primideale. Aus der Teilerfremdheit der $\mathfrak{g}_i$ folgt dann aber $(\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_r) = \mathfrak{o}$, somit $\mathfrak{d}\,\mathfrak{o}' = (\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_r) = \mathfrak{o}$, womit $\mathfrak{o}'$ als umkehrbar erkannt ist.

d) Die Betrachtungen dieses Absatzes d) werden zwar für den Beweis des Kriteriums 3 nicht gebraucht, sind aber an sich von Interesse. Sie beruhen lediglich auf Hilfssatz 3 und gelten für beliebige, nicht notwendig mit einem umkehrbaren Komplementärmodul ausgestattete Ordnungen.

Es sei wieder $\mathfrak{d}$ die Ordnungsdifferente von $\mathfrak{o}$, Δ_i bezeichne die Ordnungsdifferente von $\mathfrak{s}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Dann gilt

Satz 16: *Es ist* $\mathfrak{d} = \Delta_1 \cap \ldots \cap \Delta_r$.

Beweis. Aus $\mathfrak{o} = \mathfrak{s}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{s}_r$, also $\mathfrak{o}' = (\mathfrak{s}_1', \ldots, \mathfrak{s}_r')$ folgt nach den Modulgesetzen $\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}'} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_1'} \cap \ldots \cap \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_r'}$, und aus $\mathfrak{o} = \mathfrak{s}_i \cap \mathfrak{t}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ ergibt sich $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_i'} = \frac{\mathfrak{s}_i}{\mathfrak{s}_i'} \cap \frac{\mathfrak{t}_i}{\mathfrak{s}_i'} = \Delta_i \cap \frac{\mathfrak{t}_i}{\mathfrak{s}_i'}$. Die Ringe $\mathfrak{t}_i = (\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\,\mathfrak{f}_i^*)$ haben die Führer $\mathfrak{f}_i = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{t}_i}$ und $\frac{\mathfrak{t}_i}{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}\,\mathfrak{g}_i$; da $\mathfrak{f}_i$ zu $\mathfrak{O}\,\mathfrak{f}_i^*$ teilerfremd, wird nach Hilfssatz 2 $\mathfrak{f}_i^0 = \mathfrak{t}_i$, also $\mathfrak{t}_i = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{f}_i}$. Aus $\mathfrak{s}_i' = \mathfrak{o}'\,\mathfrak{g}_i$ folgt dann $\frac{\mathfrak{t}_i}{\mathfrak{s}_i'} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{f}_i\,\mathfrak{g}_i\,\mathfrak{o}'} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{f}}$ und hieraus für $\mathfrak{d}$ die Darstellung $\mathfrak{d} = \Delta_1 \cap \ldots \cap \Delta_r \cap \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{f}}$. Setzt man für den Augenblick $\Delta_1 \cap \ldots \cap \Delta_r = \mathfrak{x}$, so ist $\mathfrak{x} \leqq \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{f}}$. Denn aus $\mathfrak{f}\,\mathfrak{o}' = \mathfrak{O}'$ und $\Delta_i \mathfrak{O}' \leqq \Delta_i \mathfrak{s}_i' \leqq \mathfrak{s}_i$ schließt man $\mathfrak{f}\,\mathfrak{o}'\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\,\mathfrak{O}' \leqq \Delta_i \mathfrak{O}' \leqq \mathfrak{s}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, also $\mathfrak{f}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{o}' \leqq \mathfrak{o}$, woraus $\mathfrak{f}\,\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{d}$ und $\mathfrak{x} \leqq \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{f}}$ folgt. Damit ist

$$\mathfrak{d} = \Delta_1 \cap \ldots \cap \Delta_r$$

bewiesen.

e) Nach Satz 15 genügt es, das Kriterium 3 für eine Ordnung $\mathfrak{o}$ mit einem Führer $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}}$ zu beweisen, der in $\mathfrak{o}$ Primärideal ist. Dann nämlich besteht es für alle $\mathfrak{s}_i$ und überträgt sich von ihnen nach der Theorie der zum Führer teilerfremden Ideale unmittelbar auf die Ausgangsordnung $\mathfrak{o}$, da auch die Irreduzibilität oder Nichtirreduzibilität von

Primäridealen aus $\mathfrak{s}_i$, die zu $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{s}_i} = \mathfrak{g}_i$ teilerfremd sind, bei der Verengung nach $\mathfrak{o}$ ebenso erhalten bleibt wie die von zu $\mathfrak{g}_i$ teilerfremden Primäridealen aus $\mathfrak{o}$ bei der Erweiterung nach $\mathfrak{s}_i$. Demnach sei fortan in diesem § 13, 4 $\mathfrak{o}$ eine Ordnung, deren Führer $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{D}}$ Primärideal in $\mathfrak{o}$ ist.

f) Wir schicken folgende Hilfssätze vorauf, die gewissermaßen „lokale" Charakterisierungen der Umkehrbarkeit und der Irreduzibilität darstellen.

Hilfssatz 4. Zur Umkehrbarkeit eines zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideals $\mathfrak{q}$ mit der Ordnung $\mathfrak{q}^0 = \mathfrak{o}$ ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ unmittelbares Idealvielfaches von $\mathfrak{q}$ ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{c} < \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{c}$ ein zum gleichen Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriges unmittelbares Primäridealvielfache von $\mathfrak{q}$; dann wird $\mathfrak{c}\mathfrak{q}^{-1}$ ein in $\mathfrak{o}$ gelegenes von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Ideal, das also durch wenigstens ein Primideal $\mathfrak{p}_1$ teilbar sein muß, das wegen $\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{p}_1\mathfrak{q}$ nur mit $\mathfrak{p}$ identisch sein kann. Und es muß sogar $\mathfrak{c}\mathfrak{q}^{-1} = \mathfrak{p}$ sein, da $\mathfrak{q}$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{c}$, also $\mathfrak{o}$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{c}\mathfrak{q}^{-1}$ sein muß.

Umgekehrt ist zunächst jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige unmittelbare Primäridealvielfache $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{q}$ ein Teiler von $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$. Für $q \equiv 0\,(\mathfrak{q})$, $\not\equiv 0\,(\mathfrak{c})$ ist dann nämlich $\mathfrak{q} = (\mathfrak{c}, \mathfrak{o}q)$, also nach dem ersten Isomorphiesatz $\mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{c} \simeq \mathfrak{o}q\,|\,\mathfrak{c} \cap \mathfrak{o}q$, d. h. $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{o}q$ ist unmittelbares Vielfaches von $\mathfrak{o}q$. Nun wird $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{o}q \leqq \mathfrak{p}q$, da aus $\omega q \equiv 0\,(\mathfrak{c})$ bei $\omega \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ folgen würde $q \equiv 0\,(\mathfrak{c})$. Da $\mathfrak{p}q \leqq \mathfrak{o}q$, muß also sogor $\mathfrak{p}q = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{o}\mathfrak{q} \leqq \mathfrak{c}$ sein. Da auch $\mathfrak{p}\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{c}$, hat man $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}(\mathfrak{c}, \mathfrak{o}q) = (\mathfrak{p}\mathfrak{c}, \mathfrak{p}q) \leqq \mathfrak{c}$.

Wird also $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ unmittelbares Vielfaches von $\mathfrak{q}$, so ist es das einzige unmittelbare zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primäridealvielfache.

Sei also jetzt $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ unmittelbares Vielfaches und $q \equiv 0\,(\mathfrak{q})$, $\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}\mathfrak{q})$; dann gilt für $\mathfrak{o}q$ eine Zerlegung $\mathfrak{o}q = \mathfrak{q}_1\mathfrak{a}$ mit $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{q}_1 \leqq \mathfrak{q}$. Bei $\mathfrak{q}_1 < \mathfrak{q}$ aber müßte das zu $\mathfrak{p}$ gehörige $\mathfrak{q}_1$ durch das einzige unmittelbare Vielfache $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{q}$ teilbar sein, woraus wegen $q \equiv 0\,(\mathfrak{q}_1)$ folgen würde $q \equiv 0\,(\mathfrak{p}\mathfrak{q})$. Also ist $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}$ und demnach $\mathfrak{q}$ als größte Primärkomponente des Hauptideals $\mathfrak{o}q$ umkehrbar. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

g) Für ein Primärideal $\mathfrak{q}$ mit dem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}$ ist *der in $\mathfrak{o}$ gebildete Idealquotient* $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ erklärt als Gesamtheit der Elemente ω aus $\mathfrak{o}$ mit $\omega\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{q}$. Es ist also $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{o}$, wenn $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}$ den in K genommenen Modulquotienten bedeutet. Ist $\mathfrak{q}$ ein Ideal der Ordnung $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{q}^0 = \mathfrak{o}$, so wird $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}$; denn aus $\mathfrak{q} \leqq \mathfrak{p}$ folgt $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} \leqq \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}} = \mathfrak{o}$. Nun gilt

Hilfssatz 5: Dann und nur dann ist $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{o}$ irreduzibel, wenn $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ unmittelbarer echter Teiler von $\mathfrak{q}$ ist[24]).

Beweis. Ein irreduzibles $\mathfrak{q}$ hat gewiß nur einen unmittelbaren Teiler, da sonst Reduzibilität einträte. Dieser muß gleich $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ werden. Ist nämlich $\mathfrak{c}$ der unmittelbare Teiler und $\mathfrak{q} < \mathfrak{c} \leqq \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$, so sei $q_1 \equiv 0\,(\mathfrak{q}_1)$, $\not\equiv 0\,(\mathfrak{c})$. Bildet man $\mathfrak{q}_2 = (\mathfrak{q}, \mathfrak{o}\,q_1)$, so ist $\mathfrak{q}_2|\mathfrak{q} \simeq \mathfrak{o}\,q_1|\mathfrak{o}\,q_1 \cap \mathfrak{q}$. $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{o}\,q_1$ aber ist nach dem schon öfter ausgeführten Schluß gleich $\mathfrak{p}\,q_1$. Da wegen der $\mathfrak{o}$-Modulisomorphie $\mathfrak{o}|\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{o}\,q_1|\mathfrak{p}\,q_1 \simeq \mathfrak{q}_2|\mathfrak{q}$ das Ideal $\mathfrak{q}$ unmittelbares Vielfaches von $\mathfrak{q}_2$, ist $\mathfrak{q}_2$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{c}$, woraus gegen die Voraussetzung $q_1 \equiv 0\,(\mathfrak{c})$ folgen würde. Somit ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}:\mathfrak{q}$.

Die soeben an $\mathfrak{q}_2$ ausgeübte Schlußweise zeigt wegen $\mathfrak{o}\,q_1 \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}\,q_1 \leqq \mathfrak{q}$, d. h. $q_1 \equiv 0\,(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})$, daß *jeder* unmittelbare Teiler $\mathfrak{q}_2$ von $\mathfrak{q}$ Vielfaches von $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ ist. Ist also $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{q}$, so ist es der einzige.

Ein Primärideal mit nur einem unmittelbaren Teiler ist irreduzibel. Denn bei $\mathfrak{q} = \mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{c}_2$ mit $\mathfrak{q} < \mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{q} < \mathfrak{c}_2$ müßte zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{c}_1$ sowohl wie zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{c}_2$ der einzige unmittelbare Teiler $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ liegen, woraus $\mathfrak{q} < \mathfrak{q}_1 \leqq \mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{c}_2$ im Gegensatz zu $\mathfrak{q} = \mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{c}_2$ folgen würde.

h) Nun sind wir imstande, das Kriterium 3 zu beweisen. Sei die zu $\mathfrak{o}\,\mathfrak{p}$ gehörige, also umkehrbare und $\mathfrak{o}$ als Ordnung $\mathfrak{q}^0 = \mathfrak{o}$ besitzende Primärkomponente $\mathfrak{q}$ irreduzibel. Dann ist $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{q}$, also $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}'$ unmittelbares Vielfaches von $\mathfrak{q}'$, also $\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}$ unmittelbares Vielfaches von $\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} = a \cdot \mathfrak{q}'$ und a so gewählt wurde, daß $a\,\mathfrak{q}' \leqq \mathfrak{o}$, also Ideal in $\mathfrak{o}$ ist. Die (möglicherweise gar nicht auftretenden) zu $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{D}}$ teilerfremden Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$ sind nach Hilfssatz 3 umkehrbar, die zu $\mathfrak{p}$ gehörige $\tilde{\mathfrak{q}}$ ist es nach Hilfssatz 4, da $\mathfrak{p}\,\tilde{\mathfrak{q}}$ unmittelbares Vielfaches von $\tilde{\mathfrak{q}}$ ist. Deshalb ist auch $\mathfrak{a}$ selbst und damit $\mathfrak{q}' = \mathfrak{a}\,a^{-1}$ umkehrbar.

Es ist also sowohl $\mathfrak{q}$ wie $\mathfrak{q}'$, also auch $\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}' = \mathfrak{o}'$ umkehrbar.

Ist umgekehrt $\mathfrak{o}'$ umkehrbar, so auch der zur Ordnung $\mathfrak{o}$ gehörige Modul $\mathfrak{q}'$. Es ist also auch $a\,\mathfrak{q}' = \mathfrak{a}$ und damit jede Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ umkehrbar, also $\mathfrak{p}\,\tilde{\mathfrak{q}}$ unmittelbares Vielfaches von $\tilde{\mathfrak{q}}$, also $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}'$ un-

[24]) Hilfssatz 5 berührt sich eng mit einem Satz aus der von E. Noether entwickelten Theorie der irreduziblen Ideale; siehe dazu ihren Vortrag über Hilbertsche Zahlen im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **34** (1926), S. 101 der schrägen Paginierung. Siehe auch K § 2, 13 sowie W. Gröbner, Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen, Math. Annalen **110** (1934), S. 197—222.

mittelbares Vielfaches von $\mathfrak{q}'$, also $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{q}$, woraus die Irreduzibilität von $\mathfrak{q}$ folgt.

Damit ist das Kriterium 3 voll bewiesen.

5. Man kann noch bemerken, daß mit *einem* zu $\mathfrak{p}$ gehörigen umkehrbaren Primärideal *alle* zu $\mathfrak{p}$ gehörigen umkehrbaren Primärideale irreduzibel sind. Für ein beliebiges umkehrbares Primärideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}^{-1} = \mathfrak{o}$ gilt nämlich zunächst $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}$. Denn sicher ist $\mathfrak{q} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}} \leqq \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}_1$; aus $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}_1 \leqq \mathfrak{q}$ aber folgt $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^{-1}\,\mathfrak{q}_1 \leqq \mathfrak{o}$ und daraus $\mathfrak{q}^{-1}\,\mathfrak{q}_1 \leqq \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}$, also $\mathfrak{q}_1 \leqq \mathfrak{q} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}$, somit $\mathfrak{q}_1 = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q} \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}$. Ist nun $\mathfrak{q}$ irreduzibles umkehrbares Primärideal mit $\mathfrak{q}^0 = \mathfrak{o}$, so liegt zwischen $\mathfrak{q}$ und $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}$, also auch zwischen $\mathfrak{o}$ und $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}$ kein von beiden verschiedener $\mathfrak{o}$-Modul, also auch nicht zwischen $\mathfrak{q}_2$ und $\frac{\mathfrak{q}_2}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}_2 \cdot \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}$, wo $\mathfrak{q}_2$ ein beliebiges umkehrbares Primärideal mit $\mathfrak{q}_2^0 = \mathfrak{o}$ ist, das zu $\mathfrak{p}$ gehört. Demnach ist $\mathfrak{q}_2$ irreduzibel. Da die zum Führer teilerfremden Primärideale ohne weiteres irreduzibel sind, hat man also den

Satz 17: *Für die Umkehrbarkeit des Komplementärmoduls* $\mathfrak{o}'$ *einer Ordnung* $\mathfrak{o}$ *ist die Irreduzibilität aller in* $\mathfrak{o}$ *gelegenen Primärideale* $\mathfrak{q}$ *mit* $\mathfrak{q}^0 = \mathfrak{o}$ *notwendig und hinreichend.*

Fordert man über die Bedingungen des Satzes 17 hinaus, daß überhaupt alle in $\mathfrak{o}$ liegenden Primärideale irreduzibel werden, so müssen es insbesondere die Quadrate der im Führer $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{D}}$ aufgehenden Primideale sein. Da dann nach Hilfssatz 5 $\mathfrak{p}^2 : \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{p}^2$, also $\mathfrak{p}^2$ unmittelbares Vielfaches von $\mathfrak{p}$ wird, werden nach Hilfssatz 4 alle im Führer aufgehenden Primideale und damit alle Primideale der Ordnung umkehrbar, Man hat also die schon auf anderem Wege von E. Noether[25]) bewiesene

Folgerung: Damit eine Ordnung $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ wird, ist die Irreduzibilität aller in $\mathfrak{o}$ liegenden Primärideale notwendig und hinreichend.

6. In einem quadratischen Körper sind alle Ordnungen regulär, d. h. durch Potenzen eines Elementes erzeugt; demzufolge besitzen sie stets ein umkehrbares Komplement (siehe D I, Über die Diskriminanten endlicher Körper, §§ 9 und 10). Diese Eigenschaft charakterisiert aber auch die quadratischen Körper; es gilt nämlich

---

[25]) N § 9.

Satz 18: *Besitzt im Körper K jede Ordnung $\mathfrak{o}$ mit dem Quotientenkörper K einen umkehrbaren Komplementärmodul $\mathfrak{o}'$, so ist K quadratisch.*

Beweis: p sei eine beliebige feste rationale Primzahl und $\mathfrak{o} = (\Gamma, \mathfrak{O}p)$ die aus dem Hauptideal $\mathfrak{O}p$ der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ und dem Ring Γ der Rationalzahlen abgeleitete Ordnung; ihr Quotientenkörper ist K, da $\mathfrak{O}p$ von gleichem Rang über dem Körper P der Rationalzahlen ist wie K selbst. Nun bedingt schon die Umkehrbarkeit allein von $\mathfrak{o}'$, daß $[K:\mathsf{P}] = 2$ wird. In $\mathfrak{o}$ ist nämlich $\mathfrak{O}p$ Primideal 1. Grades hinsichtlich Γ, also der Führer $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}} = \mathfrak{p}$. Aus $\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{O}} = \frac{\mathfrak{O}'}{\mathfrak{o}'} = \mathfrak{O}'(\mathfrak{o}')^{-1}$ und der Umkehrbarkeit von $\mathfrak{o}'$ folgt, daß die zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{f}$ gelegenen $\mathfrak{o}$-Moduln umkehrbar eindeutig den zwischen $\mathfrak{o}'$ und $\mathfrak{O}'$ gelegenen, also umkehrbar eindeutig den zwischen $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{o}$ befindlichen entsprechen. Da nun $\mathfrak{o}|\mathfrak{p}$ einfacher $\mathfrak{o}$-Modul ist, muß es auch $\mathfrak{O}|\mathfrak{o}$ sein. Es muß demnach für ein in $\mathfrak{O}$, aber nicht in $\mathfrak{o}$ gelegenes ϱ gelten $\mathfrak{O} = (\mathfrak{o}, \mathfrak{o}\varrho)$ und $\mathfrak{O}|\mathfrak{o} \simeq \mathfrak{o}\varrho|\mathfrak{o}\varrho \frown \mathfrak{o} = \bar{\mathfrak{o}}\bar{\varrho}$. Bei dem Gruppen-Homomorphismus $\omega \to \bar{\omega}\bar{\varrho}$ für die Elemente ω von $\mathfrak{o}$ ist offensichtlich $\mathfrak{p}$ die Gesamtheit der in die Nullklasse überführten Elemente, so daß also $\mathfrak{o}|\mathfrak{p} \sim \mathfrak{O}|\mathfrak{o}$ wird. Zwischen $\mathfrak{p}$ als Primideal 1. Grades und $\mathfrak{o}$ kann kein von beiden verschiedener Γ-Modul liegen, also auch nicht zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$. Ist nun $\omega_1 = 1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine linear unabhängige Γ-Modulbasis von $\mathfrak{O}$, so wird $1, p\omega_2, \ldots, p\omega_n$ eine von $\mathfrak{o}$; bei $n \geqq 3$ aber läge zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$ der von beiden verschiedene Modul $\mathfrak{M} = (1, p\omega_2, \ldots, p\omega_{n-1}, \omega_n)$.

§ 14.

Die Realisierung des Verzweigungsmoduls durch ein Ideal als Kennzeichen der Umkehrbarkeit von $\mathfrak{o}'$.

Wir wollen sagen, der Verzweigungsmodul $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{o}$ sei durch ein Ideal realisierbar, wenn es in $\mathfrak{o}$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ gibt, so daß der Restklassenmodul $\mathfrak{o}|\mathfrak{a}$ als $\mathfrak{o}$-Modul zu $\mathfrak{v}$ operatorisomorph wird.

In § 12 wurde gezeigt, daß bei Ordnungen mit umkehrbarem Komplement die Ordnungsdifferente $\mathfrak{d}$ ein solches realisierendes Ideal darstellt. Hier beweisen wir, daß diese Möglichkeit der Realisierung durch ein Ideal aus $\mathfrak{o}$ auch nur bei Ordnungen mit umkehrbarem Komplement gegeben ist. Der entscheidende Beweisschluß berührt sich aufs engste mit dem Beweis des Kriteriums 3 in § 13, 4. h). Wir behaupten also

Satz 19: *Ist der Restklassenmodul $\mathfrak{o}|\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}$ nach einem in $\mathfrak{o}$ enthaltenen Ideal $\mathfrak{a}$ zum Verzweigungsmodul $\mathfrak{o}$-modulisomorph, so ist das Komplement $\mathfrak{o}'$ von $\mathfrak{o}$ umkehrbar.*

Beweis. Wegen der Modulisomorphie haben $\mathfrak{o}|\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{v}$ denselben Annullator; der von $\mathfrak{v}$ ist $\mathfrak{d}$, der von $\mathfrak{o}|\mathfrak{a}$ wird $\mathfrak{a}$, also hat man $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$ und damit $\mathfrak{v} \simeq \mathfrak{o}|\mathfrak{d} = \bar{\mathfrak{o}}$.

Sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ diejenigen der Primideale von $\mathfrak{o}$, die in $\mathfrak{d}$ aufgehen, so ist dem Modul $\mathfrak{p}_i\mathfrak{v} = \overline{\mathfrak{p}_i\mathfrak{o}'}$ der Modul $\mathfrak{p}_i\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}_i$ zugeordnet. Wegen der Primidealeigenschaft ist $\mathfrak{p}_i\bar{\mathfrak{o}}$ unmittelbares Vielfaches von $\bar{\mathfrak{o}}$, also $\mathfrak{p}_i\mathfrak{v}$ unmittelbares Vielfaches von $\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{p}_i\mathfrak{o}'$ unmittelbares Vielfaches von $\mathfrak{o}'$, also $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}_i}$ unmittelbarer Teiler von $\mathfrak{o}$ $(i = 1, \ldots, r)$. Nach der in § 13, 5. angewandten Schlußweise werden also alle zu den $\mathfrak{p}_i$ gehörigen umkehrbaren Primärideale $\mathfrak{q}_i$ mit $\mathfrak{q}_i^0 = \mathfrak{o}$ irreduzibel, woraus nach § 13 die Umkehrbarkeit von $\mathfrak{o}'$ folgt; man könnte sie auch durch Behandlung der $\mathfrak{p}_i\mathfrak{o}'$ nach dem in § 13, 4. h) auseinandergesetzten Verfahren direkt erschließen. Satz 19 ist damit bewiesen.

(Eingegangen am 27. Februar 1935.)

Vollständig integrable Systeme totaler Differentialgleichungen.

Von

W. Mayer und T. Y. Thomas in Princeton N. J.

Es seien $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ zwei Bereiche (offene Punktmengen) im n- bzw. m-dimensionalen Zahlenraum; x mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ sei ein Punkt von $\mathfrak{D}$, Φ mit den Koordinaten $\Phi^1, \ldots, \Phi^m$ ein solcher von $\mathfrak{D}'$. Im Bereiche $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ seien $\Psi_\alpha^i(x, \Phi)$ stetige Funktionen ihrer Argumente mit stetigen ersten Ableitungen und das System

$$(1) \qquad d\Phi^i = \sum_{\alpha=1}^{n} \Psi_\alpha^i(x, \Phi)\, dx_\alpha, \qquad i = 1, \ldots, m$$

sei daselbst vollständig integrierbar. Damit ist gemeint, daß in $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ die Integrabilitätsbedingungen von (1) identisch gelten.

Wir definieren dann die abgeschlossenen Intervallmengen D_1, Δ in $\mathfrak{D}$ und D_1', Δ' in $\mathfrak{D}'$ mit den Mittelpunkten p in $\mathfrak{D}$, q in $\mathfrak{D}'$:

$$D_1\colon |x_\alpha - p_\alpha| \leqq A, \qquad \Delta\colon |x_\alpha - p_\alpha| \leqq \tfrac{1}{2}A,$$
$$D_1'\colon |\Phi^i - q^i| \leqq B, \qquad \Delta'\colon |\Phi^i - q^i| \leqq \tfrac{1}{2}B.$$

Ist $\Phi_0 \subset \Delta'$, so liegt

$$\Delta_{\Phi_0}'\colon |\Phi^i - \Phi_0^i| \leqq \tfrac{1}{2}B$$

ganz in D_1'. Der euklidische Abstand zweier Punkte x_0, x_1 von D_1 bzw. Δ ist kleiner oder gleich $2\sqrt{n}\,A$ bzw. $\sqrt{n}\,A$.

Wegen der Stetigkeit im abgeschlossenen Intervall D_1, D_1' ist

$$(2) \qquad |\Psi_\alpha^i(x, \Phi)| < \frac{M}{n}, \qquad x \subset D_1, \quad \Phi \subset D_1',$$

für eine geeignet gewählte positive Konstante M. Ebenso folgt aus der Existenz der stetigen Ableitungen der Funktionen Ψ_α^i, daß

$$(3) \qquad |\Psi_\alpha^i(x, \Phi_1) - \Psi_\alpha^i(x, \Phi)| < N\,\{|\Phi_1^1 - \Phi^1| + \ldots + |\Phi_1^m - \Phi^m|\},$$

wenn $x \subset D_1$ und Φ, $\Phi_1 \subset D_1'$, für eine geeignete Konstante N.

Wir setzen $a = 2\sqrt{n}\,A$ und $b = \frac{1}{2}B$ und wählen A so, daß

$$(4) \qquad b > aM.$$

Sei jetzt x_0 ein festgewählter Punkt im Innern von Δ, und x_1 ein beliebiger Punkt in diesem Intervall, so können wir x_0 mit x_1 in Δ durch eine stetig differenzierbare Kurve C:

$$x_\alpha = f_\alpha(s)$$

verbinden, deren euklidisch gemessene Bogenlänge l kleiner ist als $\frac{a}{2}$. In $f_\alpha(s)$ bedeute s den von x_0 aus gemessenen (euklidischen) Bogen entlang C $(0 \leqq s \leqq l)$.

Entlang dieser Kurve C integrieren wir das System

$$\frac{d\,\Phi^i}{d\,s} = \sum_{\alpha=1}^{n} \Psi_\alpha^i(x(s),\ \Phi)\frac{d\,x_\alpha}{d\,s} \tag{5}$$

mit den Anfangswerten $\Phi^i(0) = \Phi_0^i \subset \Delta'$.

Da für $s \leqq l < \frac{a}{2}$ und $|\Phi^i - \Phi_0^i| \leqq b$ die Ungleichung

$$\Big|\sum_{\alpha=1}^{n} \Psi_\alpha^i(x(s), \Phi)\frac{d\,x^\alpha}{d\,s}\Big| < M \tag{6}$$

und die Lipschitzbedingung (3) gilt, so hat (5) die den Anfangswerten $\Phi^i(0) = \Phi_0^i$ entsprechende eindeutig bestimmte Lösung $\Phi^i = \mu^i(s, \Phi_0)$, die im ganzen Intervall $0 \leqq s \leqq l$, d. h. entlang der Kurve C, definiert ist. Dabei gilt $|\Phi^i(s) - \Phi_0^i| \leqq b$.

Sei nun C_1: $x_\alpha = f_{1\alpha}(s)$ eine zweite x_0 mit x_1 in Δ verbindende, stetig differenzierbare Kurve der Länge $l_1 \leqq \frac{a}{2}$. Die dieser Kurve entsprechende Lösung des Systemes (5) bezeichnen wir $\Phi^i = \nu^i(s, \Phi_0)$.

Es kann dann gezeigt werden, daß die Werte der Größen Φ^i, die den Lösungen μ^i bzw. ν^i im Punkte x_1 zukommen, gleich sind, d. h. es gilt

$$\mu^i(l, \Phi_0) = \nu^i(l_1, \Phi_0). \tag{7}$$

Um das einzusehen, betten wir die beiden Kurven C und C_1 in die einparametrige Schar von Kurven ein:

$$\begin{cases} x_\alpha(\Theta, t) = f_\alpha(t\,l)\cos^2\Theta + f_{1\alpha}(t\,l_1)\sin^2\Theta, \\ 0 \leqq \Theta \leqq \frac{1}{2}\pi, \qquad 0 \leqq t \leqq 1, \end{cases} \tag{8}$$

die alle in Δ liegen und x_0 mit x_1 verbinden. Für $\Theta = 0$ bzw. $\Theta = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir die beiden Kurven C bzw. C_1. Aus

$$d\,x_\alpha = \Big(\cos^2\Theta\frac{d\,f_\alpha}{d\,s}l + \sin^2\Theta\frac{d\,f_{1\alpha}}{d\,s_1}l_1\Big)d\,t$$

folgt, daß $d\,s_\Theta < (l + l_1)\,d\,t$ ist. Für die Bogenlänge entlang der Kurve C_Θ: $x_\alpha = x_\alpha(\Theta, t)$, Θ fest, folgt damit $l_\Theta < l_1 + l_2 < a$.

Integrieren wir (5) entlang C_Θ, so gilt wieder für $s \leqq l_\Theta < a$ und für $|\Phi - \Phi_0| \leqq b$ die Relation (6), und ebenso gilt die Lipschitzbedingung (3). Das System (5) mit $x(s) = x_\Theta(s)$ (für die Kurve C_Θ) hat somit die für $s \leqq l_\Theta < a$ durch die Anfangswerte $\Phi^i(0) = \Phi_0^i$ ein-

deutig bestimmte Lösung $\Phi^i_\Theta(s, \Phi_0)$ und es gilt $|\Phi^i_\Theta - \Phi^i_0| \leqq b$. Beschreiben wir diese Lösung durch den Parameter t, so hat

$$\frac{d\Phi^i}{dt} = \sum \Psi^i_\alpha(x(\Theta, t), \Phi)\frac{dx_\alpha}{dt}(\Theta, t) \tag{5'}$$

für $0 \leqq t \leqq 1$ die durch die Anfangswerte $\Phi^i_0 = \Phi^i(0, \Phi_0, \Theta)$ eindeutig bestimmte Lösung $\Phi^i = \Phi^i(t, \Phi_0, \Theta)$, wobei $|\Phi^i - \Phi^i_0| \leqq b$ ist entlang C_Θ.

Nun aber berechnet man aus (5') mit Hilfe der Integrabilitätsbedingungen für das System (1), daß

$$\frac{d\Phi^i}{d\Theta}(1, \Phi_0, \Theta) = 0, \tag{9}$$

(T. Y. Thomas, Systems of total differential equations defined over simply connected domains, Ann. of Math. 1934, p. 732), d. h.

$$\Phi^i(1, \Phi_0, \Theta) = \text{konstant};$$

der Wert im Punkte x_1 der Lösung Φ^i von (5') hängt also nur vom Punkte x_1, aber nicht vom Integrationsweg C_Θ ab, der x_0 mit x_1 verbindet. Damit ist (7) bewiesen.

Die x_0 mit x in Δ verbindenden differenzierbaren Kurven der Länge kleiner oder gleich $\frac{a}{2}$ definieren demnach in x eine Punktfunktion

$$\Phi^i = \Phi^i(x, \Phi_0), \tag{10}$$

die für jede solche Kurve das System (5) befriedigt. Für diese Funktion folgt aus (5), daß

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_\alpha} = \Psi^i_\alpha(x, \Phi), \qquad i = 1, \ldots, m, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Somit ist (10) *eine für* $x \subset \Delta$ *definierte Lösung des Systemes* (1), *die für* $x = x_0$, $x_0 \subset \Delta$ *die Anfangswerte* $\Phi^i_0 = \Phi^i(x_0, \Phi_0) \subset \Delta'$ *annimmt.*

Hat $\Psi^i_\alpha(x, \Phi)$ stetige Ableitungen bis einschließlich der r-ten Ordnung in bezug auf die $\Phi \subset \mathfrak{D}'$, so hat das Lösungssystem (10) stetige Ableitungen bis einschließlich der r-ten Ordnung in bezug auf die Φ_0. Dies folgt aus (5) und den Existenzsätzen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Die Lösungsfunktionen $\Phi^i(x, \Phi_0)$ und deren Ableitungen sind dabei stetig in den $n + m$ Variablen x, Φ_0 für $x \subset \Delta$ und $\Phi_0 \subset \Delta'$. [Siehe z. B. Bieberbach, Differentialgleichungen, Jul. Springer 1930, S. 44 [1]).]

[1]) Die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen angewendet auf das System (5) gibt vorerst nur die Stetigkeit in bezug auf die $1 + m$ Variablen s, Φ_0. In den zum Beweis verwendeten Abschätzungen aber treten nur obere Schranken ein für die Funktionen $\Psi^i_\alpha(x, \Phi)$ und deren Ableitungen und keine Größen, die die zur Integration benutzte Kurve $x = x(s)$ betreffen. Daraus aber folgt die Stetigkeit der Φ^i und ihrer Ableitungen nach den Φ^j_0 in den $x_1, \ldots, x_n$, $\Phi^1_0, \ldots, \Phi^m_0$.

Wir haben den Satz:

Im offenen Bereiche $x \subset \mathfrak{D}$, $\Phi \subset \mathfrak{D}'$ seien die Funktionen $\Psi_\alpha^i(x, \Phi)$ und ihre ersten Ableitungen stetig; ferner seien die Integrabilitätsbedingungen des Systemes (1) *in $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ identisch erfüllt. Es gibt dann für $p \subset \mathfrak{D}$ und $q \subset \mathfrak{D}'$ abgeschlossene Bereiche Δ, Δ' so, daß $p \subset \Delta \subset \mathfrak{D}$ und $q \subset \Delta' \subset \mathfrak{D}'$ ist. Nach Wahl von Φ_0 in Δ' gibt es dann stets eine und nur eine für $x \subset \Delta$ definierte Lösung des Systemes* (1): $\Phi^i = \Phi^i(x, \Phi_0)$, *die für den fest gewählten Punkt $x_0 \subset \Delta$ die Werte Φ_0^i annimmt. Es existieren dabei und sind stetig die Ableitungen:*

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}, \quad \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial x_\alpha \partial \Phi_0^k} = \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial \Phi_0^k \partial x_\alpha}.$$

In der Tat: Hat $\Psi_\alpha^i(x, \Phi)$ stetige Ableitungen bis einschließlich der r-ten Ordnung, so existieren und sind stetig

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial \Phi_0^k}, \quad \frac{\partial^2 \Phi^i}{\partial \Phi_0^{k_1} \partial \Phi_0^{k_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^r \Phi^i}{\partial \Phi_0^{k_1} \ldots \partial \Phi_0^{k_r}} \tag{12}$$

und genügen Systemen, die man durch direkte Differentiation aus (11) erhält:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial \Phi_0^k}\right) = \frac{\partial \Psi_\alpha^i}{\partial \Phi^j}(x, \Phi) \frac{\partial \Phi^j}{\partial \Phi_0^k}, \text{ usw.} \tag{13}$$

Daher haben die Ableitungen (12) stetige erste Ableitungen nach den x_α und diese Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial^t \Phi^i}{\partial \Phi_0^{k_1} \ldots \partial \Phi_0^{k_t}}\right), \qquad t = 1, \ldots, r \tag{14}$$

sind unabhängig von der Differentiationsfolge. Soweit dann die Ableitungen $\frac{\partial \Psi_\alpha^i}{\partial \Phi^j}$ der rechten Seiten der Systeme (13) selbst stetig nach den x differenzierbar sind, können die entsprechenden Größen (14) weiter nach den x differenziert werden.

Sind die Funktionen $\Psi_\alpha^i(x, \Phi)$ in $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ analytisch, so ist die Lösung $\Phi^i(x, \Phi_0)$ analytisch für $x \subset \Delta$, $\Phi_0 \subset \Delta'$. In diesem Falle kann man (1) durch (konvergente) Potenzreihen erfüllen, die mit den obigen Lösungen zusammenfallen müssen.

(Eingegangen am 27. April 1935.)

Eine verschärfte projektive Kennzeichnung der den Geraden äquivalenten Kurvensysteme.

Von

Karl Heinrich Berger in Freiburg i. Br.

Die vorliegende Untersuchung schließt sich unmittelbar meiner in der Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 41—55 erschienenen Arbeit „Eine projektive Kennzeichnung der den Geraden äquivalenten Kurvensysteme" an. Dort wurde festgestellt, daß das Bestehen des „*Viereckssatzes*" (des perspektiven Pappus-Pascal) zwischen den Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ihre Abbildbarkeit auf die Geraden der Ebene nach sich zieht. Hier soll nun gezeigt werden, daß das Bestehen eines noch spezielleren Falles des Desarguesschen Satzes, also eine weniger weitgehende Forderung für die Beziehungen zwischen den Integralkurven, schon dasselbe leistet.

Wir fordern die für das folgende kurz als „*Dreiecksatz*" bezeichnete Beziehung:

(△) Liegen zwei (aus Systemkurven gebildete) Dreiecke, von denen das eine dem andern einbeschrieben ist, zentral perspektiv, also so, daß die Verbindungskurven gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt gehen, so schneiden sich die entsprechenden Seiten in drei Punkten, die derselben Systemkurve (Perspektivitätsachse) angehören.

Dieser Dreiecksatz läßt sich aus dem Viereckssatz herleiten, während umgekehrt aus dem Dreiecksatz sich lediglich eine Auswahl von Fällen des Viereckssatzes ergibt. Leistet also der Dreiecksatz dasselbe wie vorher der Viereckssatz, dann ist tatsächlich eine Verschärfung des früheren Ergebnisses erreicht. Als charakteristisch für die Abbildbarkeit auf die Geraden ist der Dreiecksatz dann anzusehen, wenn die für seine Gültigkeit *notwendigen* Bedingungen, wie sie im folgenden abgeleitet werden, mit den schon bekannten *notwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die Transformierbarkeit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in die Form $y'' = 0$ übereinstimmen.

Eine Differentialgleichung, die vermöge einer eineindeutigen und stetigen Punkttransformation in die Form $y'' = 0$ überführbar sein soll, muß notwendig der gegenüber solchen Transformationen invarianten Klasse

$$\text{(I)} \qquad y'' - f^3(y')^3 + 3f^2(y')^2 - 3f^1 y' + f^0 = 0, \qquad f^k = f^k(x, y),$$

angehören[1]). Für Bereiche ($\mathfrak{E}$), in denen durch zwei beliebige Punkte genau eine Integralkurve festgelegt ist, läßt sich (I) stets auf die weit einfachere Form

(III) $$y'' = 6\,p(x,y)\,y' - 6\,q(x,y)\,(y')^2$$

reduzieren. Aus (III) und der hierzu inversen Form

(III′) $$\ddot{x} = 6\,q\,\dot{x} - 6\,p\,(\dot{x})^2$$

ist sofort zu ersehen, daß die Scharen

$$x = \text{const.} \quad \text{und} \quad y = \text{const.}$$

zu den Integralkurven dieser reduzierten Form gehören.

Da die vorzunehmende Untersuchung nur einen Sinn hat für Bereiche ($\mathfrak{E}$), in denen durch zwei Punkte genau eine Systemkurve festgelegt ist, so können wir im folgenden mit der reduzierten Form (III), bzw. ihrer inversen Darstellung (III′) operieren, wobei uns die Scharen $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ zustatten kommen, die jedoch *nicht* als *Büschel* verwendet werden dürfen. Im übrigen werden wir die Integralkurven von (III) - sie liegen in ($\mathfrak{E}$) allesamt schlicht über den Koordinatenachsen — wieder durch Reihen darstellen und uns dabei auf Untersuchungen „im Kleinen" beschränken, und zwar bis zur vierten Ordnung einschließlich.

Eine Kurve von dem im Regularitätsbereich beliebig festzusetzenden Nullpunkt nach einem benachbarten Punkt (ξ, η) wird folgendermaßen dargestellt:

$$y = r\,x + \sum_{1}^{3}{}_{i,k}\, R^{ik}\,(x)^i\,\big((x)^k - (\xi)^k\big), \qquad (i + k \leqq 4),$$

wobei $r = \frac{\eta}{\xi}$ ist; dann sind beide Randbedingungen

$$y = 0 \quad \text{für} \quad x = 0,$$
$$y = \eta \quad \text{für} \quad x = \xi$$

erfüllt.

---

[1]) Herr Liebmann hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß diese Klasse (I) durch eine von Herrn Scheffers festgestellte geometrische Eigenschaft unter den Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgezeichnet ist. Die hier folgenden Angaben hierüber verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Scheffers. Die betr. Note ist erschienen in „Revista Matemática Hispano-Americana", 2. Serie, Bd. 1, No. 3, S. 65—67 (Madrid 1926) unter dem Titel „Sobre la geometría de las ecuaciones diferenciales ordinarias de 2.° orden:

$$y'' = A\,(x,y) + B\,(x,y)\,y' + C\,(x,y)\,y'^2 + D\,(x,y)\,y'^3\text{"}.$$

Danach sind die Differentialgleichungen der Klasse (I) dadurch charakterisiert, daß die durch irgendeinen beliebigen Punkt der (x, y)-Ebene gehenden Integralkurven dort ein oskulierendes Kegelschnittbüschel besitzen. Dabei ist zu verstehen, daß eine ebene zweigliedrige Kurvenschar in einem Punkt von einem Kegelschnittbüschel oskuliert wird, wenn an dieser Stelle jede hindurchgehende Kurve der Schar von einem Kegelschnitt des Büschels in zweiter Ordnung berührt wird.

Es ist ferner zu beachten, daß die Differentialgleichung

$$y'' = 6\,p\,y' - 6\,q\,(y')^2,$$

worin die p und q in Reihen um den Nullpunkt entwickelt zu denken sind, erfüllt sein muß. Danach ergeben sich alsdann die R^{ik} durch Koeffizientenvergleich.

Die Koeffizienten T^{ik} für die inverse Entwicklung

$$x = t\,y + \sum_{1}^{3}{}_{i,k}\, T^{ik}\,(y)^i\,((y)^k - (\eta)^k), \qquad (i + k \leqq 4),$$

derselben Kurve gehen aus den entsprechenden R^{ik} einfach dadurch hervor, daß $t = \frac{\xi}{\eta}$ an die Stelle von r tritt, und die p und q, sowie die Differentiationsindizes 1 und 2 sich untereinander vertauschen.

Geht die Kurve nicht vom Nullpunkt aus, so ist dieser Fall durch sinngemäße Translation auf den vorigen zurückzuführen. Die Struktur von (III) bleibt hierbei ja invariant.

Von demselben Bau wie die Koeffizienten in der vierten Größenordnung werden auch die zu erwartenden Bedingungen sein, nur daß alle Glieder, die nicht p_2 und q_1, sowie deren Ableitungen enthalten, nicht in den Bedingungen auftreten können, da diese für $p_2 = q_1 = 0$ identisch erfüllt sein müssen. $p_2 = q_1 = 0$ reicht nämlich für die analytisch hergeleiteten Bedingungen

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} 2\,p_{12} + q_{11} - 6\,p\,q_1 - 12\,p\,p_2 &= 0, \\ 2\,q_{12} + p_{22} - 12\,q\,q_1 - 6\,q\,p_2 &= 0 \end{aligned}$$

hin, die für die Transformierbarkeit von (III) auf $y'' = 0$ notwendig und (für Teilbereiche, die von der Struktur der Koeffizienten $p(x, y)$ und $q(x, y)$ abhängen) hinreichend sind.

Die im folgenden für die im Nullpunkt festgehaltenen Werte von $p, q, \ldots$ abgeleiteten Bedingungen gelten wegen der im Regularitätsbereich beliebigen Wahl dieses Nullpunktes allgemein für die *Funktionen* $p(x,y)$, $q(x,y)$ und ihre Ableitungen.

Für die folgende Untersuchung werden wir sogar nur die Ableitungen zweiter Ordnung $p_{12}, p_{22}, q_{11}, q_{12}$ berücksichtigen, so daß demnach für die Koeffizienten einer Kurve

$$y - \beta^1 = r\,(x - \alpha^1) + \sum R^{ik}\,(x - \alpha^1)^i\,\big((x - \alpha^1)^k - (\alpha^2 - \alpha^1)^k\big)$$

durch die Punkte (α^1, β^1) und (α^2, β^2) lediglich die Werte verbleiben:

$$r = \frac{\beta^2 - \beta^1}{\alpha^2 - \alpha^1},$$

$$\text{(R)} \qquad \begin{aligned} R^{11} &= 3\,r\,[p_{12}\,\alpha^1\,\beta^1 + \tfrac{1}{2}\,p_{22}\,(\beta^1)^2 - \big(\tfrac{1}{2}\,q_{11}\,(\alpha^1)^2 + q_{12}\,\alpha^1\,\beta^1\big)\,r], \\ R^{12} &= r\,[p_{12}\,\beta^1 + \big((p_{12} - q_{11})\,\alpha^1 + (p_{22} - q_{12})\,\beta^1\big)\,r - q_{12}\,\alpha^1\,(r)^2], \\ R^{13} &= \tfrac{1}{4}\,(r)^2\,[2\,p_{12} - q_{11} + (p_{22} - 2\,q_{12})\,r]. \end{aligned}$$

Entsprechend ergeben sich die Koeffizienten für die inverse Darstellung

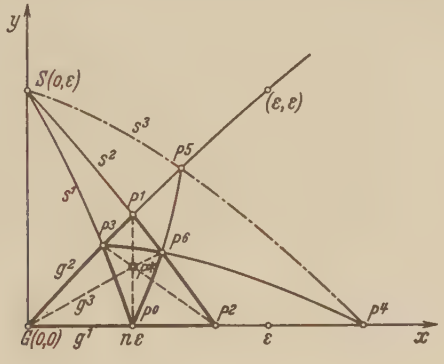
$$x - \alpha^1 = t(y - \beta^1) + \Sigma\, T^{ik}(y - \beta^1)^i((y - \beta^1)^k - (\beta^2 - \beta^1)^k)$$

derselben Kurve:

$$t = \frac{\alpha^2 - \alpha^1}{\beta^2 - \beta^1},$$

(T)
$$T^{11} = 3t\left[\tfrac{1}{2} q_{11}(\alpha^1)^2 + q_{12}\alpha^1\beta^1 - (p_{12}\alpha^1\beta^1 + \tfrac{1}{2} p_{22}(\beta^1)^2)t\right],$$
$$T^{12} = t\left[q_{12}\alpha^1 + ((q_{11} - p_{12})\alpha^1 + (q_{12} - p_{22})\beta^1)t - p_{12}\beta^1(t)^2\right],$$
$$T^{13} = \tfrac{1}{4}(t)^2\left[2q_{12} - p_{22} + (q_{11} - 2p_{12})t\right].$$

Der Untersuchung legen wir dann folgenden Plan (siehe Figur) zugrunde, wobei wir uns die in der vorangegangenen Untersuchung ver-



wendeten Kurven und Schnittpunkte zunutze machen. $G(0,0)$ ist das Zentrum der g^i-Kurven, $S(0,\varepsilon)$ das der s^i-Kurven. Für g^1 wählen wir die x-Achse

(g^1): $$y = 0.$$

g^2 ist festgelegt durch G und $(\varepsilon,\varepsilon)$:

(g^2): $$y = x + \tfrac{1}{4}(p_{22} + 2p_{12} - q_{11} - 2q_{12})x((x)^3 - (\varepsilon)^3).$$

s^1 läuft von $S(0,\varepsilon)$ nach $P^0(n\varepsilon, 0)$, wobei wir nunmehr n auf das Intervall $0 < n < \tfrac{1}{2}$ beschränken werden, mit $t = -n$, T^{ik} aus (T):

(s^1): $$x = -n(y - \varepsilon) - \tfrac{3}{2}(n)^2 p_{22}(\varepsilon)^2(y - \varepsilon)y + (n)^2[q_{12} - p_{22} + p_{12}n]\varepsilon(y - \varepsilon)((y - \varepsilon)^2 - (\varepsilon)^2) + \tfrac{1}{4}(n)^2[2q_{12} - p_{22} + (2p_{12} - q_{11})n](y - \varepsilon)((y - \varepsilon)^3 - (-\varepsilon)^3).$$

Durch $S(0,\varepsilon)$ und P^1 mit den Koordinaten

$$x^1 = n\varepsilon,$$
$$y^1 = n\varepsilon + \tfrac{1}{4}(p_{22} + 2p_{12} - q_{11} - 2q_{12})n((n)^3 - 1)(\varepsilon)^4 \quad (\text{nach } (g^2))$$

ist s^3 festgelegt, das mit

$$t = \frac{x^1}{y^1 - \varepsilon} = \frac{n}{n-1}\Big(1 - \frac{n((n)^2+n+1)}{4}(p_{22} + 2p_{12} - q_{11} - 2q_{12})(\varepsilon)^3\Big)$$

nach $(y - \varepsilon)$ entwickelt wird. Für $y = 0$ ergibt sich hieraus der Punkt P^2. Der Schnittpunkt P^3 der Kurven g^2 und s^1 hat die Koordinaten

$$x^3 = \frac{n}{n+1}\varepsilon + \frac{(n)^2(\varepsilon)^4}{4(n+1)^4}[(2p_{12} + q_{11})(n)^3 + \ldots],$$

$$y^3 = \frac{n}{n+1}\varepsilon + \frac{n(\varepsilon)^4}{4(n+1)^4}[(2p_{12} + q_{11})(n)^4 + \ldots].$$

Die nach $(x - x^2)$ zu entwickelnde Kurve $(P^2 P^3)$ schneidet die Kurve $(P^0 P^1)$: $x = n\varepsilon$ im Punkt P^* mit den Koordinaten

$$x^* = n\varepsilon,$$

$$y^* = \frac{n\varepsilon}{2} + \frac{n(\varepsilon)^4}{32((n)^2-1)}[(p_{22} + 4p_{12} - 2q_{11} - 2q_{12})(n)^5 - (p_{22} + 2q_{12})(n)^4 + \ldots],$$

durch den dann die dritte von $G(0, 0)$ ausgehende g-Kurve festliegt:

(g^3): $$y = r^* x + R^{*13} x((x)^3 - (n\varepsilon)^3).$$

Dabei ist

$$r^* = \frac{y^*}{x^*} = \frac{1}{2} + \frac{(\varepsilon)^3}{32}\Big[(p_{22} + 4p_{12} - 2q_{11} - 2q_{12})(n)^3 - \frac{1}{(n)^2-1}\{(p_{22} + 2q_{12})(n)^4 + \ldots\}\Big],$$

$$R^{*13} = \frac{1}{32}[p_{22} + 4p_{12} - 2q_{11} - 2q_{12}].$$

Bis hierher konnten die Daten der früheren Arbeit entnommen werden. Nun ist der Schnittpunkt $P^6(x^6, y^6)$ von g^3 und s^2 zu bestimmen.

(g^3): $$y = \Big(\frac{1}{2} + \frac{(\varepsilon)^3}{32}\Big[(p_{22} + 4p_{12} - 2q_{11} - 2q_{12})(n)^3 - \frac{1}{(n)^2-1}\{(p_{22} + 2q_{12})(n)^4 + \ldots\}\Big]\Big)\cdot x + \frac{1}{32}[p_{22} + 4p_{12} - 2q_{11} - 2q_{12}]x\cdot((x)^3 - (n\varepsilon)^3).$$

(s^2): $$x = \Big[\frac{n}{n-1} - \frac{(n)^2((n)^2+n+1)}{4(n-1)}(p_{22} + 2p_{12} - q_{11} - 2q_{12})(\varepsilon)^3\Big](y - \varepsilon) - \frac{3}{2}\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^2 p_{22}(\varepsilon)^2(y - \varepsilon)(y - n\varepsilon) + \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^2\Big[q_{12} - p_{22} - p_{12}\frac{n}{n-1}\Big]\varepsilon(y - \varepsilon)((y - \varepsilon)^2 - (n-1)^2(\varepsilon)^2) + \frac{1}{4}\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^2\Big[2q_{12} - p_{22} + (q_{11} - 2p_{12})\frac{n}{n-1}\Big](y - \varepsilon)((y - \varepsilon)^3 - (n-1)^3(\varepsilon)^3).$$

In (s^2) ersetzen wir y gemäß (g^3) durch x und lösen mittels des Ansatzes

$$x^6 = k^1\varepsilon + \ldots + k^4(\varepsilon)^4$$

auf. Danach ergibt sich

$$x^6 = \frac{2n}{2-n}\varepsilon + \frac{(n)^2(\varepsilon)^4}{8((n)^2-1)(2-n)^5}\{U(n)^7 + \text{Glieder niedrigeren Grades in } n\},$$

wo $U = 7p_{22} + 14q_{12} + 16q_{11}$ ist, übrigens aber nicht bekannt zu sein braucht. Ebenso genügt es zur Herleitung unserer notwendigen Bedingungen, weiterhin jeweils nur die Koeffizienten der höchsten Potenz von n in den Gliedern vierter Ordnung mitzuführen.

Aus (g^3) folgt die zu x^6 gehörige Ordinate y^6:

$$y^6 = \frac{n}{2-n}\varepsilon + \frac{n(\varepsilon)^4}{16((n)^2-1)(2-n)^5}\{2V(n)^8 + \ldots\}.$$

Dabei ist

$$2V = U - (2q_{12} + p_{22}).$$

Damit liegen uns nun zwei bezüglich P^* zentral perspektive Dreiecke $\{G\,P^1\,P^2\}$ und $\{P^6\,P^0\,P^3\}$ vor, von denen letzteres dem ersteren einbeschrieben ist.

$$\{G\,P^1\,P^2\} \underset{P^*}{\overset{\wedge}{=}} \{P^6\,P^0\,P^3\}.$$

Soll der Dreiecksatz $(\triangle)$ bestehen, so müssen die drei Punkte

$$\begin{aligned} S &= (P^1P^2) \times (P^0P^3) = s^2 \times s^1, \\ P^5 &= (GP^1) \times (P^0P^6) = g^2 \times (P^0P^6), \\ P^4 &= (GP^2) \times (P^3P^6) = g^1 \times (P^3P^6) \end{aligned}$$

auf einer Systemkurve s^3 liegen.

Am einfachsten wird die Untersuchung so durchgeführt, daß, nachdem $P^6 = s^2 \times g^3$ bekannt ist, der Schnittpunkt P^5 der Kurve (P^0P^6) mit g^2 bestimmt und sodann ebenso der Schnittpunkt P^4 der durch S und P^5 festgelegten Kurve s^3 mit g^1, $y = 0$, ermittelt wird. Die durch P^4 und P^3 bestimmte Kurve muß dann an der Stelle $x = x^6$ einen y-Wert ergeben, der mit dem aus $s^2 \times g^3$ ursprünglich errechneten y^6 *identisch* übereinstimmt.

Die Kurve von $P^0(n\varepsilon, 0)$ nach $P^6(x^6, y^6)$ wird von P^0 aus nach y entwickelt mit

$$t = \frac{x^6 - n\varepsilon}{y^6} = n - \frac{n(\varepsilon)^3}{16((n)^2-1)(2-n)^4}\{2V(n)^8 + \ldots\}$$

und den entsprechenden Koeffizienten aus (T):

$$\begin{aligned} (P^0P^6)\colon\ x - n\varepsilon = &\left[n - \frac{n(\varepsilon)^3}{16((n)^2-1)(2-n)^4}\{2V(n)^8 + \ldots\}\right]y \\ &+ \frac{3}{2}(n)^3(\varepsilon)^2 q_{11}\, y\left(y - \frac{n\varepsilon}{2-n}\right) \\ &+ (n)^2\varepsilon[q_{12} + (q_{11} - p_{12})n]\, y\left((y)^2 - \left(\frac{n\varepsilon}{2-n}\right)^2\right) \\ &+ \frac{(n)^2}{4}[2q_{12} - p_{22} + (q_{11} - 2p_{12})n]\, y\left((y)^3 - \left(\frac{n\varepsilon}{2-n}\right)^3\right), \end{aligned}$$

$$(g^2)\colon\qquad y = x + \tfrac{1}{4}(p_{22} + 2p_{12} - q_{11} - 2q_{12})\, x((x)^3 - (\varepsilon)^3).$$

Der Schnittpunkt P^5 dieser beiden Kurven wird wieder durch den Ansatz

$$x^5 = l^1 \varepsilon + \ldots + l^4 (\varepsilon)^4$$

ermittelt. Dabei werden, wie durchweg im folgenden, die T^{ik} (bzw. R^{ik}) auf den Koeffizienten der höchsten Potenz von n keinen Einfluß mehr haben.

$$x^5 = \frac{n}{1-n}\varepsilon + \frac{(n)^3 (\varepsilon)^4}{16 (2-n)^4 (1-n)^5 (n+1)} \{2 V (n)^{10} + \ldots\},$$

$$y^5 = \frac{n}{1-n}\varepsilon + \frac{(n)^3 (\varepsilon)^4}{16 (2-n)^4 (1-n)^5 (n+1)} \{2 V (n)^{10} + \ldots\}.$$

$S(0, \varepsilon)$ und $P^5 (x^5, y^5)$ legen die Kurve s^3 fest, die nach dem geforderten Dreiecksatz ($\triangle$) die Perspektivitätsachse für die Dreiecke $\{G P^1 P^2\}$ und $\{P^6 P^0 P^3\}$ darstellt.

s^3 wird nach $(y - \varepsilon)$ entwickelt; dabei ist

$$= \frac{x^5}{y^5 - \varepsilon} = \frac{n}{2n-1} + \frac{(n)^3 (\varepsilon)^3}{16 (2-n)^4 (1-n)^4 (2n-1)^2 (n+1)} \{2 V (n)^{11} + \ldots\};$$

die übrigen Koeffizienten ergeben sich nach (T). Für $y = 0$ folgt daraus dann der Schnittpunkt P^4 von s^3 mit g^1:

$$x^4 = -\frac{n}{2n-1}\varepsilon - \frac{(n)^2 (\varepsilon)^4}{16 (2-n)^4 (1-n)^4 (2n-1)^3 (n+1)} \{4 V (n)^{12} + \ldots\},$$

$$y^4 = 0.$$

Für P^3 hatten sich früher die Koordinaten

$$x^3 = \frac{n}{n+1}\varepsilon + \frac{(n)^2 (\varepsilon)^4}{4 (n+1)^4} [(2 p_{12} + q_{11}) (n)^3 + \ldots],$$

$$y^3 = \frac{n}{n+1}\varepsilon + \frac{n (\varepsilon)^4}{4 (n+1)^4} [(2 p_{12} + q_{11}) (n)^4 + \ldots]$$

ergeben, so daß sich für die nach $(x - x^4)$ zu entwickelnde Kurve $(P^4 P^3)$ ergibt:

$$r = \frac{y^3}{x^3 - x^4}$$

$$= \frac{2n-1}{3n} - \frac{(\varepsilon)^3}{144 n (2-n)^4 ((n)^2 - 1)^3 (2n-1)(n-1)} \{4 V (n)^{15} + \ldots\};$$

die übrigen Koeffizienten folgen aus (R).

Diese Kurve

$(P^4 P^3)$:

$$y = r (x - x^4) + R^{11} (x - x^4)(x - x^3) + R^{12} (x - x^4)((x - x^4)^2 - (x^3 - x^4)^2) + R^{13} (x - x^4)((x - x^4)^3 - (x^3 - x^4)^3)$$

liefert an der Stelle

$$x^6 = \frac{2n}{2-n}\varepsilon + \frac{(n)^2 (\varepsilon)^4}{8 ((n)^2 - 1) (2-n)^5} \{U (n)^7 + \ldots\}$$

den Wert

$$y^6 = \frac{n}{2-n}\varepsilon + \frac{n(\varepsilon)^4}{48(2-n)^5((n)^2-1)^3(n-1)(2n-1)^4}\{32(2U-V)(n)^{17}+\ldots\},$$

während sich ursprünglich aus $s^2 \times g^3$ ergeben hatte

$$y^6 = \frac{n}{2-n}\varepsilon + \frac{n(\varepsilon)^4}{16((n)^2-1)(2-n)^5}\{2V(n)^8+\ldots\}.$$

Die Differenz dieser beiden y^6-Werte muß nach dem Dreiecksatz *identisch* verschwinden:

$$\frac{n(\varepsilon)^4}{48(2-n)^5((n)^2-1)^3(n-1)(2n-1)^4}\{64(U-2V)(n)^{17} + \text{Glieder niedrigeren Grades}\} \equiv 0;$$

danach also insbesondere

$$U - 2V = 0$$

oder, mit Rücksicht auf die Beziehung $2V = U - (2q_{12} + p_{22})$,

$$2q_{12} + p_{22} = 0.$$

Lassen wir die x- und die y-Achse ihre Rollen tauschen, womit sich die p und q, sowie die Indizes 1 und 2 unter sich vertauschen, so folgt hieraus sofort die symmetrische Bedingung

$$2p_{12} + q_{11} = 0.$$

Aus dem Dreiecksatz also ergibt sich dasselbe Bedingungspaar

$$\text{(G')} \qquad \begin{aligned} 2p_{12} + q_{11} &= 0, \\ 2q_{12} + p_{22} &= 0 \end{aligned}$$

wie früher aus dem Viereckssatz.

Auch hier wäre nun die Herleitung der Bedingungen durch Hinzunahme der Glieder mit p_2 und q_1 zu (G) zu ergänzen; doch wird die damit verbundene Rechenarbeit ebenfalls erspart durch dieselbe Überlegung, wie sie dort angestellt wurde. Sie soll auch hier angedeutet werden.

Die vorgenommenen Rechenoperationen lassen die Struktur der Koeffizienten von $(n)^k$ invariant, so daß also die vollständigen Bedingungen (G) den folgenden Bau aufweisen werden:

$$\text{(G)} \qquad \begin{aligned} &(1)\ 2p_{12} + q_{11} + (a^1 p + b^1 q - 6p)q_1 + (a^2 p + b^2 q - 12p)p_2 = 0, \\ &(2)\ 2q_{12} + p_{22} + (b^2 p + a^2 q - 12q)q_1 + (b^1 p + a^1 q - 6q)p_2 = 0. \end{aligned}$$

$(a^i, b^i = \text{const})$.

Eine dieser Bedingungen folgt aus der andern bei Vertauschung der Variabeln.

Da $p_2 = q_1 = 0$ für die Abbildbarkeit auf die Geraden hinreicht, können nur die angeführten Glieder in (G) auftreten. Es handelt sich nun lediglich noch darum, das notwendige Verschwinden der Konstanten

a^i, b^i in (G) festzustellen, wonach dann (G) mit den für die Abbildbarkeit auf die Geraden notwendigen und hinreichenden Bedingungen (A) identisch ist.

Wären nicht alle a^i und b^i gleich Null, so würde für den Fall, daß (A) und damit a fortiori der Dreiecksatz erfüllt wäre, aus dem Nebeneinanderbestehen von (A) und dem für den Dreiecksatz notwendigen Bedingungspaar (G) folgen:

$$\text{(N)} \qquad \begin{aligned} (a^1 p + b^1 q)\, q_1 + (a^2 p + b^2 q)\, p_2 &= 0, \\ (b^2 p + a^2 q)\, q_1 + (b^1 p + a^1 q)\, p_2 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Nebenbedingungen (N) aber würden für $|a^1| + |a^2| + |b^1| + |b^2| > 0$ (A) einschränken, was im Widerspruch zu der Natur und Tragweite der Bedingungen (A) steht. Es muß vielmehr gelten

$$a^1 = a^2 = b^1 = b^2 = 0,$$

womit

$$(\text{G}) \equiv (\text{A})$$

erwiesen ist.

Wir dürfen demnach den Satz aussprechen:

Wenn im Kleinen zwischen den Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Klasse (I) *der Dreiecksatz (der Desarguessche Satz für Dreiecke, von denen das eine dem andern einbeschrieben ist) besteht, dann läßt sich diese zweigliedrige Schar eineindeutig auf die Geraden der Ebene abbilden. Der Gültigkeitsbereich dieser Zuordnung hängt dabei von den Koeffizienten von* (I) *ab.*

Wie bei der vorangehenden Arbeit möge entsprechend auch hier der obige Satz auf die Geodäten, deren Differentialgleichung ja der Klasse (I) angehört, angewandt werden. Da die Flächen konstanten Krümmungsmaßes dadurch charakterisiert sind, daß sich ihre geodätischen Linien in die Geraden der Ebene überführen lassen, so kann dieser bekannte Sachverhalt nunmehr folgendermaßen formuliert werden:

Wenn im Kleinen zwischen den Geodäten einer Fläche der Dreiecksatz besteht, dann hat diese Fläche konstantes Krümmungsmaß.

(Eingegangen am 28. April 1935.)

Über einscharig in der linearen Strahlenkongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades.

Von

Ulrich Graf in Berlin.

Im folgenden werden Konfigurationen von einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades sowie lineare und quadratische Mannigfaltigkeiten solcher Flächen untersucht, und zwar mit Hilfe einer Abbildung, welche die Strahlen der Kongruenz eineindeutig den Speeren einer Ebene und diese wiederum eineindeutig den Minimalebenen eines Bezugsraumes zuordnet. Die Gruppe der automorphen Kollineationen der Kongruenz erweist sich als isomorph der Gruppe der Laguerreschen Transformationen in der Speerebene bzw. der Gruppe der starren Transformationen des Bezugsraumes; der Typ der Kongruenz findet seinen Ausdruck derart in der Metrik der Speerebene bzw. der Metrik des Bezugsraumes, daß die Kollineationsgeometrie in der elliptischen, parabolischen, hyperbolischen linearen Kongruenz auf die Laguerresche Geometrie einer Ebene mit elliptischer, euklidischer, hyperbolischer Metrik bzw. auf die Kongruenzgeometrie eines Raumes mit pseudoelliptischer, pseudoeuklidischer, pseudohyperbolischer Metrik abgebildet wird. Mit Hilfe dieses Verfahrens werden quadratische Mannigfaltigkeiten von einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades aufgebaut, die den linearen Mannigfaltigkeiten in demselben Sinne übergeordnet sind wie die Kugeln den Ebenen.

A. Die Abbildung.

In Plückerschen Linienkoordinaten $\mathfrak{x}_{ik}$ sei die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 als Schnitt der beiden durch die Gleichungen

$$\omega^2 \cdot \mathfrak{x}_{02} = \mathfrak{x}_{31} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_{03} + \mathfrak{x}_{12} = 0$$

dargestellten linearen Komplexe gegeben; je nachdem $\omega^2 = +1, 0, -1$ gesetzt wird, ist die Kongruenz hyperbolisch, parabolisch, elliptisch. In Verbindung mit der Plückerschen quadratischen Fundamentalrelation

$$\mathfrak{x}_{01}\mathfrak{x}_{23} + \mathfrak{x}_{02}\mathfrak{x}_{31} + \mathfrak{x}_{03}\mathfrak{x}_{12} = 0$$

lautet ihre Gleichung

$$C_1^1: \quad \mathfrak{x}_{01}\mathfrak{x}_{23} + \omega^2 \cdot \mathfrak{x}_{02}^2 - \mathfrak{x}_{03}^2 = 0.$$

Jedem Strahl dieser Kongruenz wird ein Speer einer Grundebene π zugeordnet, deren Maßbestimmung sich bei Benutzung homogener Punktkoordinaten $x_0 : x_1 : x_2$ auf den durch

$$\cdot x_0^2 - \omega^2 \cdot x_1^2 - \omega^2 \cdot x_2^2 = 0$$

gegebenen Kegelschnitt als metrisches Fundamentalgebilde gründet. Ein solcher Speer wird durch homogene Speerkoordinaten $\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3$ festgelegt, die mit den Hesseschen Koordinaten p, ϑ durch die Beziehung

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \omega : -\omega \cdot \cos\vartheta \cdot \mathfrak{Cof}\,\omega p : -\omega \cdot \sin\vartheta : \mathfrak{Cof}\,\omega p : \mathfrak{Sin}\,\omega p$$

verknüpft sind[1]). Zwischen den $\mathfrak{x}_\lambda$ besteht die quadratische Relation

$$\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 + \omega^2 \mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

Je nachdem $\omega^2 = +1, 0, -1$ gesetzt wird, ist die Metrik der Grundebene π hyperbolisch, euklidisch, elliptisch.

Die Zuordnung der Kongruenzstrahlen $\mathfrak{X}_{ik}$ zu den Speeren $\mathfrak{x}_\lambda$ erfolgt auf Grund der Gleichungen

$$(*) \qquad \boxed{\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{01}) : \mathfrak{X}_{03} : \tfrac{1}{2}(\mathfrak{X}_{23} - \mathfrak{X}_{01}) : \mathfrak{X}_{02}}.$$

Weiterhin wird jedem Speer der Grundebene π eineindeutig eine Ebene des Raumes zugeordnet. Dazu werden die $\mathfrak{x}_\lambda$ als homogene Ebenenkoordinaten u_k gedeutet:

$$(**) \qquad \boxed{\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = u_3 : u_1 : u_2 : u_0},$$

so daß die quadratische Relation zwischen den $\mathfrak{x}_\lambda$ übergeht in die Gleichung

$$\omega^2 \cdot u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 0$$

einer Fläche zweiter Klasse Π^2, die als metrisches Fundamentalgebilde der räumlichen Maßbestimmung zugrunde liegen möge. Jeder Tangentialebene dieser Fundamentalfläche, d. h. jeder Minimalebene des „Π^2-Raumes“ entspricht eineindeutig ein Speer der Grundebene.

Durch (**) ist eine Erweiterung der zyklographischen Projektion dargestellt; für $\omega^2 = 0$ geben diese Formeln die übliche Abbildung der Speere in einer euklidischen Ebene auf die Minimalebenen eines pseudoeuklidischen Raumes[2]).

Für $\omega^2 = +1$ wird Π^2 eine Strahlenfläche, für $\omega^2 = -1$ eine strahlenlose Fläche zweiten Grades, schließlich für $\omega^2 = 0$ ein reeller Kegelschnitt (als einfach singuläres Gebilde zweiter Klasse). Somit sind die durch Π^2

[1]) Vgl. die Einführung orientierter Elemente z. B. bei H. Beck, Koordinatengeometrie, Berlin 1919, Seite 297.

[2]) Vgl. eine ausführliche Darstellung dieser Abbildung und die Anwendung auf die Laguerresche Geometrie der euklidischen Ebene z. B. bei E. Müller, Zyklographie, herausgegeben von Krames, Leipzig-Wien 1929 und bei G. Bol, Vlakke Laguerre-Meetkunde, Amsterdam 1926.

als Fundamentalgebilde bestimmten räumlichen Metriken die pseudohyperbolische ($\omega^2 = +1$), pseudoeuklidische ($\omega^2 = 0$), pseudoelliptische ($\omega^2 = -1$)[3]).

Den Strahlen von Π^2 als Trägern je eines Büschels von Π^2-Minimalebenen entsprechen die Büschel gleichgerichteter Parallelen in der Grundebene π bzw. die Strahlenbüschel erster Ordnung in C_1^1. Je nachdem es sich um einen Leit- oder einen Regelstrahl von Π^2 handelt, ergibt sich in π ein Büschel mit demselben Anfangspunkt A (α-Büschel) oder demselben Endpunkt Ω (ω-Büschel)[4]) bzw. in C_1^1 ein Strahlenbüschel mit dem Zentrum auf der einen oder der anderen Leitgeraden der Kongruenz. Die Realitätsunterschiede der drei Typen $\omega^2 = +1, 0, -1$ finden sich gleichermaßen im Π^2-Raum, in der π-Ebene und in der Kongruenz C_1^1 wieder.

Den ∞^1 isotropen Ebenen durch einen Punkt

$$A\,(A_0 : A_1 : A_2 : A_3)$$

des Π^2-Raumes sind nach (**) die ∞^1 Tangentenspeere des Zykels[5])

$$(A\,\mathfrak{x}) \equiv A_0\,\mathfrak{x}_0 + A_1\,\mathfrak{x}_1 + A_2\,\mathfrak{x}_2 + A_3\,\mathfrak{x}_3 = 0$$

in π zugeordnet; der Zykel $(A\,\mathfrak{x}) = 0$ wird als zyklographisches Bild des Punktes A angesehen. In der linearen Kongruenz C_1^1 entspricht dem Zykel $(A\,\mathfrak{x}) = 0$ nach (*) ihr Schnitt mit der linearen Kongruenz

$$\tfrac{1}{2}\cdot(A_0 - A_2)\cdot\mathfrak{X}_{01} + A_3\cdot\mathfrak{X}_{02} + A_1\cdot\mathfrak{X}_{03} + \tfrac{1}{2}(A_0 + A_2)\cdot\mathfrak{X}_{23} = 0,$$

d. h. eine einscharig in C_1^1 liegende Regelfläche zweiten Grades.

Je nachdem

$$\Delta = \omega^2 A_0^2 - \omega^2 A_1^2 - \omega^2 A_2^2 + A_3^2$$

von Null verschieden ist oder verschwindet, ist der Zykel $(A\,\mathfrak{x}) = 0$ reduzibel oder irreduzibel. Ein reduzibler Zykel in π besteht aus einem α- und einem ω-Büschel, die einen Speer, den Durchdringungsspeer der beiden Büschel, gemein haben. Nach (**) ist einem solchen reduziblen Zykel ein absoluter Punkt des Π^2-Raumes als Schnittpunkt zweier Erzeugenden von Π^2 zugeordnet. In C_1^1 führt die Reduzibilität des Zykels auf den

---

[3]) Die Vorsilbe „pseudo" zeigt an, daß die Winkelmessung hyperbolisch ist.

[4]) Vgl. H. Beck, Ein Seitenstück zur Möbiusschen Geometrie der Kreisverwandtschaften, Transact. of the Amer. Math. Soc., 1910, S. 414—448.

[5]) Unter Zykeln werden orientierte „Kreise" der nichteuklidischen Metrik tragenden Grundebene π verstanden, d. h. die geometrischen Orte aller Punkte, die von einem festen Punkte einen im hyperbolischen, euklidischen, elliptischen Sinne konstanten (reellen oder komplexen) Abstand besitzen. Vgl. Anm. [2]), siehe ebenda die als „Zykelbüschel" und „Zykelbündel" bezeichneten einstufigen und zweistufigen linearen Zykelmannigfaltigkeiten. Vgl. ferner U. Graf, Über Laguerresche Geometrie in Ebenen und Räumen mit nichteuklidischer Metrik, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. Bd. 45, 1935.

Zerfall der Regelschar zweiten Grades in ein Paar von Strahlenbüscheln erster Ordnung.

Jeder Geraden des Π^2-Raumes ist ein Zykelbüschel[5]) in π und eine Büschelschar[6]) einscharig in C_1^1 enthaltener Regelflächen zweiten Grades, jeder Ebene des Π^2-Raumes ein Zykelbündel[5]) in π und ein Bündelheer[6]) einscharig in C_1^1 enthaltener Regelflächen zweiten Grades zugeordnet.

Die Gruppe A^6 der automorphen Kollineationen von C_1^1 ist auf Grund der Zuordnung (*) holoedrisch isomorph der Gruppe L^6 der Laguerreschen Transformationen in der Grundebene π und diese auf Grund der verallgemeinerten zyklographischen Projektion (**) holoedrisch isomorph der Gruppe $\mathfrak{L}^6$ der starren Transformationen des Π^2-Raumes.

Die Kollineationsgeometrie in einer elliptischen, parabolischen, hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist auf die Speergeometrie einer Ebene π mit elliptischer, euklidischer, hyperbolischer Metrik und weiterhin auf die Kongruenzgeometrie eines pseudoelliptischen, pseudoeuklidischen, pseudohyperbolischen Π^2-Raumes derart abgebildet, daß jedem Strahl aus C_1^1 ein Speer in π und eine Minimalebene des Π^2-Raumes sowie jeder einscharig in C_1^1 enthaltenen Regelfläche zweiten Grades ein Zykel in π und ein Punkt des Π^2-Raumes entspricht.

Die Übertragung von Sätzen aus der Kongruenzgeometrie des Π^2-Raumes bzw. der Laguerreschen Geometrie der π-Ebene gestattet kollineationsinvariante Aussagen über Konfigurationen einscharig in der linearen Strahlenkongruenz enthaltener Regelflächen zweiten Grades.

Um den Übergang vom Kongruenzstrahl zum Bildspeer und weiterhin die verallgemeinerte zyklographische Projektion leicht *konstruktiv* erfassen zu können, wird ein rechtwinkliges Achsenkreuz benutzt, dessen Koordinaten x, y, z aus den x_i durch

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z$$

hervorgehen. Die Leitgeraden r und s von C_1^1 sind dann durch die Gleichungen

$$r\colon\ x = +\omega,\quad \omega \cdot y = z \quad \text{und} \quad s\colon\ x = -\omega,\quad \omega \cdot y = -z$$

festgelegt; für ihren halben Abstand d sowie ihren Schränkungswinkel δ gilt $d = \operatorname{tg}\delta = \omega$.

Die Speerebene π wird die x-y-Ebene, in welcher der Kreis

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\omega^2}$$

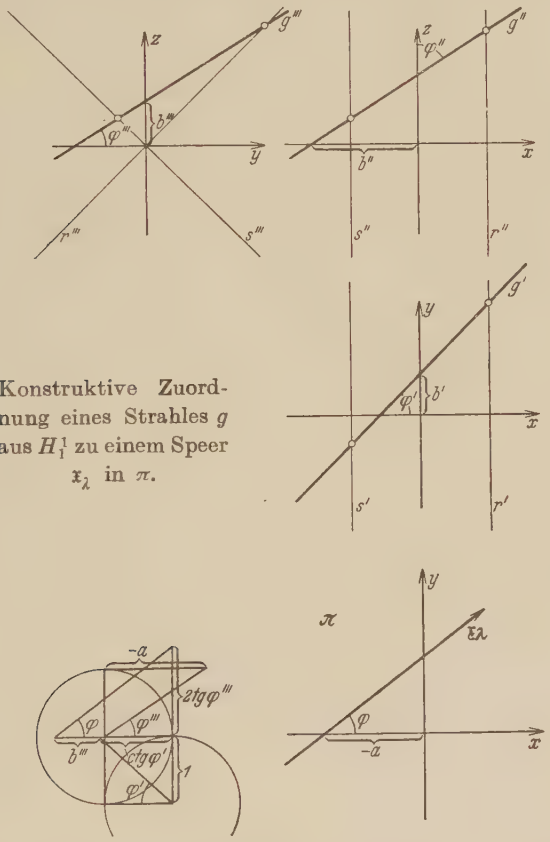
[6]) Die Büschel bzw. Bündel von einscharig in der linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Regelflächen zweiten Grades sind wegen der Autodualität der linearen Kongruenz Büschelscharen bzw. Bündelheere. Vgl. St. Jolles, Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen aus den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades, Crelles Journ. 172 (1934), S. 1.

als Fundamentalgebilde die Metrik bestimmt; die Gleichung von Π^2 lautet

$$x^2 + y^2 - z^2 = \frac{1}{\omega^2},$$

ist also, je nachdem $\omega^2 = +1, -1$ oder 0 gesetzt wird, ein scheitelrechtes Strahlenhyperboloid, scheitelrechtes strahlenloses Hyperboloid oder ein von der uneigentlichen Ebene getragener reeller Kreis.

Im Rahmen dieses metrisch spezialisierten Bezugssystemes läßt sich die durch (*) und (**) vermittelte Abbildung leicht konstruktiv verfolgen:



Konstruktive Zuordnung eines Strahles g aus H_1^1 zu einem Speer $\mathfrak{x}_\lambda$ in π.

Fig. 1.

Die Gleichungen des Grundrisses g', Aufrisses g'' und Seitenrisses g''' in den drei Tafelebenen des x-y-z-Systemes lauten:

$$\begin{aligned}
g' &: -\mathfrak{X}_{02}\cdot x + \mathfrak{X}_{01}\cdot y + \mathfrak{X}_{12} = 0; \quad y = \operatorname{tg}\varphi' \cdot x + b' ,\\
g'' &: \mathfrak{X}_{03}\cdot x - \mathfrak{X}_{01}\cdot z + \mathfrak{X}_{31} = 0; \quad x = \operatorname{tg}\varphi'' \cdot z + b'' ,\\
g''' &: \mathfrak{X}_{03}\cdot y - \mathfrak{X}_{02}\cdot z - \mathfrak{X}_{23} = 0; \quad z = \operatorname{tg}\varphi''' \cdot y + b''';\\
&\operatorname{tg}\varphi' \cdot \operatorname{tg}\varphi'' \cdot \operatorname{tg}\varphi''' = 1,\\
b' = \operatorname{ctg}\varphi'', &\quad b'' = -\omega^2 \cdot \operatorname{ctg}\varphi''', \quad b''' = \omega^2 \cdot \operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{ctg}\varphi'' \cdot \operatorname{tg}\varphi'''.
\end{aligned}$$

Aus diesen Daten lassen sich die Koordinaten $\mathfrak{x}_\lambda$ des zugehörigen Speeres mit der Trägergeradengleichung

$$\mathfrak{x}_1 \cdot x + \mathfrak{x}_2 \cdot y + \mathfrak{x}_3 = 0$$

auf Grund der Beziehung

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 = (-b''' + \operatorname{ctg}\varphi') : 2\operatorname{tg}\varphi''' : (-b''' - \operatorname{ctg}\varphi') : 2$$

abgreifen (siehe Fig. 1); die Orientierung des Speeres ist dadurch festgelegt, daß er den Winkel

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi'''}{b''' + \operatorname{ctg}\varphi'}$$

gegen den positiven x-Speer bildet[7]).

Die einem Speer $\mathfrak{x}_\lambda$ durch (**) zugeordnete Minimalebene des Π^2-Raumes hat die Trägergerade des Speeres zur Spur; die beiden zueinander entgegengesetzten Speere auf einer Geraden in π sind die Bilder der beiden zu π spiegelbildlichen Minimalebenen durch die Gerade.

B. Systeme einscharig in C_1^1 enthaltener Regelflächen zweiten Grades.

Die D-Invariante. Die Entfernung zweier Punkte A und B des Π^2-Raumes als Invariante der starren Transformationen entspricht der Distanz[8]) der beiden Zykel $(A\,\mathfrak{x}) = 0$ und $(B\,\mathfrak{x}) = 0$ in π. In der durch die zugehörigen beiden Bildregelflächen $\mathfrak{R}_A^2$ und $\mathfrak{R}_B^2$ in C_1^1 bestimmten Büschelschar sind zwei je in Paare von Strahlenbüscheln zerfallene Regelflächen $\mathfrak{S}_1^2$ und $\mathfrak{S}_2^2$ enthalten; der Entfernung der beiden Punkte A und B bzw. der Distanz der beiden Zykel in π ist der Ausdruck

$$\boxed{D(\mathfrak{R}_A^2, \mathfrak{R}_B^2) = \frac{1}{2\omega} \cdot \ln D\,V(\mathfrak{R}_A^2,\ \mathfrak{R}_B^2;\ \mathfrak{S}_1^2,\ \mathfrak{S}_2^2)}$$

als Invariante der automorphen Kollineationen von C_1^1 zugeordnet. In der parabolischen Kongruenz ($\omega^2 = 0$) fallen $\mathfrak{S}_1^2$ und $\mathfrak{S}_2^2$ zusammen, jedoch behält D beim Grenzübergang $\omega \to 0$ einen endlichen, von $\mathfrak{R}_A^2$ und $\mathfrak{R}_B^2$ abhängigen Wert.

Der Aufbau der automorphen Kollineationen. Der Gruppe $\mathfrak{G}^6$ der Bewegungen des Π^2-Raumes ist die Gruppe G^6 eigentlicher Laguerrescher Transformationen in π und weiterhin die Gruppe Γ^6 eigentlicher auto-

[7]) Der positive x-Speer ist das Bild des Hauptstrahles aus C_1^1. Vgl. im parabolischen Falle U. Graf, Über die parabolische lineare Strahlenkongruenz und ihre Cayleyschen Regelflächen, Sitzungsber. d. Berliner Math. Gesellsch. XXXIV. Jhrg. 1935, S. 20.

[8]) D. h. der Tangentialentfernung der beiden Zykel, gemessen von Berührungspunkt zu Berührungspunkt.

morpher Kollineationen von C_1^1 zugeordnet; D ist eine absolute Invariante von Γ^6. Die Umlegungen ($\mathfrak{H}^6$) des Π^3-Raumes führen auf die uneigentlichen Laguerreschen Transformationen (H^6) in π und weiterhin auf die uneigentlichen automorphen Kollineationen (X^6) von C_1^1; D ändert bei diesen Transformationen sein Vorzeichen. Den nur im parabolischen Fall $\omega^2 = 0$ vorhandenen Ähnlichkeitstransformationen des Π^2-Raumes schließlich entsprechen die Transformationen der erweiterten Laguerreschen Gruppe L^7 in der euklidischen π-Ebene und weiterhin die Transformationen derjenigen Gruppe A^7 automorpher Kollineationen der parabolischen Kongruenz P_1^1, welche die Verhältnisse der D-Werte unverändert lassen.

In der gemischten Gruppe (Γ^6, X^6) sind zwei Arten involutorischer Transformationen enthalten: die primären und die sekundären Involutionen[9]).

Eine primäre Involution ist sowohl als Transformation der reziproken Polaren durch eine einscharig in C_1^1 enthaltene Regelfläche zweiten Grades $\mathfrak{R}^2$ als auch als Spiegelung[10]) an dem zu $\mathfrak{R}^2$ autopolaren Bündelheer in C_1^1 eineindeutig festgelegt. In π entspricht diesen Gebilden ein Zykel $\mathfrak{z}$ und der zugehörige Zykelbündel Z[11]), im Π^2-Raum ein Punkt A mit seiner absoluten Polarebene α; die Spiegelung an A, gleichwertig mit der Spiegelung an α bzw. die Laguerresche Spiegelung an $\mathfrak{z}$, gleichwertig mit der Laguerreschen Spiegelung an Z sind die Bildtransformationen der primären Involution in C_1^1.

Im parabolischen Falle ($\omega^2 = 0$) verliert sich wegen der Singularität des Fundamentalgebildes Π^2 die Eineindeutigkeit der absoluten Polarität, was zur Folge hat, daß — wie zum Beispiel im euklidischen Raume — die Spiegelung am Punkte und an der Ebene wesentlich verschiedene Transformationen sind. In π folgen entsprechend die bekannten Verhält-

---

[9]) Vgl. St. Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 427. Siehe auch G. Haenzel, Eine analytische Theorie der Involutionen auf der linearen Strahlenkongruenz und deren Anwendung, Crelles Journ. 166, Heft 3 (1932), S. 167.

Jede Transformation aus X^6 läßt sich aus höchstens drei, jede Transformation aus Γ^6 aus höchstens vier primären Involutionen zusammensetzen; jede sekundäre Involution ist auf ∞^1 Arten aus zwei primären Involutionen erzeugbar.

[10]) Die Spiegelung an einem solchen Bündelheer in C_1^1 läßt sich unabhängig von der polar zugehörigen Regelfläche zweiten Grades dadurch erklären, daß einem gegebenen Strahle aus C_1^1 derjenige Kongruenzstrahl zugeordnet wird, der mit ihm zusammen als Grundgeradenpaar eine im Bündelheer enthaltene Büschelschar von Regelflächen zweiten Grades bestimmt.

[11]) Dieser Zykelbündel ist dadurch definiert, daß alle ihm angehörenden Zykel von $\mathfrak{z}$ die konstante Distanz $\frac{i\pi}{2\omega}$ besitzen.

nisse der euklidischen Laguerreschen Geometrie, in der die Spiegelung am Zykel und die Laguerresche Spiegelung am Zykelbündel wesentlich verschiedene Strukturen aufweisen. In der parabolischen Kongruenz P_1^1 schließlich ergibt sich einerseits — der Spiegelung am Punkte A entsprechend — als erster Fall einer primären Involution die Transformation der reziproken Polaren an einer allgemeinen einscharig in P_1^1 enthaltenen Regelfläche zweiten Grades, deren autopolares Bündelheer *stets* aus dem Bündelheer der *zerfallenen* Regelflächen von P_1^1 besteht, und andererseits als zweiter Fall — der Spiegelung an einer Ebene α entsprechend — die Spiegelung an einem allgemeinen Bündelheer aus P_1^1, dessen polar zugehörige Regelfläche zweiten Grades *stets zerfallen* ist.

Während somit in E_1^1 oder H_1^1 jede primäre Involution *sowohl* durch eine Regelfläche zweiten Grades *als auch* durch das zu ihr autopolare Bündelheer eineindeutig festgelegt werden kann, ist in P_1^1 eine primäre Involution *entweder* (Typ I) durch eine Regelfläche *oder* (Typ II) durch ein Bündelheer bestimmt. Diese Besonderheit, die in P_1^1 charakteristisch auftritt, ist für den Aufbau der automorphen Kollineationsgruppe von Bedeutung:

In der parabolischen Kongruenz P_1^1 kann die Gruppe (Γ^6, X^6) der automorphen Kollineationen nur aus Spiegelungen an Bündelheeren von einscharig in P_1^1 enthaltenen Regelflächen zweiten Grades, nicht mehr wie in E_1^1 und H_1^1 aus reziprok polaren Transformationen an solchen Regelflächen erzeugt werden.

Die Übertragung von Sätzen über Punkt- und Ebenenkonfigurationen des Π^2-Raumes führt auf Aussagen über einscharig in C_1^1 enthaltene Regelflächen zweiten Grades und deren lineare Mannigfaltigkeiten.

Lineare $\mathfrak{R}^2$-Systeme. Aus dem Satz „Gehen im Π^2-Raum von den acht Minimalebenen aus den Seiten eines einfachen Vierflachs vier (den verschiedenen Seiten zugehörige) Ebenen durch einen Punkt, so sind auch die vier anderen Ebenen mit einem Punkt inzident“ [12]) folgt auf Grund der benutzten Übertragung für C_1^1

Satz 1: *Gehören in einer Folge von vier einscharig in C_1^1 enthaltenen Regelflächen zweiten Grades von den vier gemeinsamen Strahlenpaaren vier Strahlen aus verschiedenen Paaren einer Regelschar zweiten Grades an, so liegen auch die übrigen vier in einer solchen Regelschar.*

Dieser Satz gestattet eine Fülle von Spezialisierungen, in dem die vier Ausgangsregelflächen in besonderer Lage gewählt werden.

---

[12]) Vgl. diesen und ähnliche Sätze bei E. Müller, Einige Gruppen von Sätzen über orientierte Kreise in der Ebene, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 20 (1911), S. 168.

Aus den Sätzen von Möbius über die Existenz von doppelt umschriebenen Tetraedern[13]) folgt aus der Deutung über den Π^2-Raum

Satz 2: *Wird von vier Regelflächen eines Bündelheeres in C_1^1 von jedem der sechs möglichen Flächenpaare ein gemeinsamer Strahl herausgegriffen, so bestimmen die zu je drei Flächen gehörigen Strahlen eine neue Regelfläche. Die vier so erhaltenen Regelflächen liegen wieder in einem Bündelheer aus C_1^1. Die sechs übrigen gemeinsamen Strahlen führen zu einem zweiten Bündelheer, und diese beiden Bündelheere entsprechen einander in der durch das ursprüngliche Bündelheer bestimmten primären Involution.*

Satz 3: *Vier einscharig in C_1^1 enthaltene Regelflächen zweiten Grades durch einen Strahl haben paarweise noch sechs weitere Strahlen gemein, von denen viermal je drei eine neue Regelfläche bestimmen. Diese vier Regelflächen haben wieder einen gemeinsamen Strahl.*

Sphärische $\mathfrak{R}^2$-Reihen und $\mathfrak{R}^2$-Kongruenzen. Die Invarianz von D gegenüber den automorphen Kollineationen von C_1^1 veranlaßt die Betrachtung zweistufiger quadratischer Mannigfaltigkeiten einscharig in C_1^1 enthaltener Regelflächen zweiten Grades, bestehend aus allen Regelflächen, die mit einer gegebenen Regelfläche $\mathfrak{R}_m^2$ einen D-Wert von fester Größe bilden. Diese Mannigfaltigkeit entspricht einer Kugel des Π^2-Raumes und wird deshalb als „sphärische $\mathfrak{R}^2$-Kongruenz" bezeichnet; die „Mittelfläche" $\mathfrak{R}_m^2$ ist das Bild des Mittelpunktes der Kugel im Π^2-Raum. Eine solche sphärische $\mathfrak{R}^2$-Kongruenz, die durch vier Regelflächen aus C_1^1 festgelegt ist, ist dem Bündelheer in demselben Sinne übergeordnet wie eine Kugel einer Ebene: für $D = \frac{i\pi}{2\omega}$ wird die sphärische $\mathfrak{R}^2$-Kongruenz zum (doppelt zählenden) Bündelheer und ihre Mittelfläche $\mathfrak{R}_m^2$ zu der dem Bündelheer polar zugehörigen Regelfläche. Diese Vorstellungen behalten auch im parabolischen Falle ($\omega^2 = 0$) nach dem sinngemäß anzustellenden Grenzübergang ihre Richtigkeit.

In entsprechender Weise führt die Übertragung des Kreises im Π^2-Raum zu der sphärischen „$\mathfrak{R}^2$-Reihe" von einscharig in C_1^1 enthaltenen Regelflächen zweiten Grades, die sämtlich mit der Mittelfläche der Reihe eine D-Invariante von fester Größe bestimmen. Für $D = \frac{i\pi}{2\omega}$ wird die

[13]) Vgl. A. F. Möbius, Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in bezug auf die andere um- und einbeschrieben zugleich heißen? Crelles Journ. 3 (1828), S. 273—278. Vgl. ferner J. Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander, Ges. Werke I, Anm. S. 407. Siehe auch E. Müller, Über einen Steinerschen Satz und dessen Beziehungen zur Konfiguration zweier einander ein- und umbeschriebenen Tetraeder Arch. Math. Phys. 2 (3) (1902). S. 130.

Reihe zur (doppelt zählenden) Büschelschar. Auf Grund dieser Definition folgt, daß eine sphärische $\mathfrak{R}^2$-Reihe sich auf ∞^2 Arten als Schnitt je zweier sphärischer $\mathfrak{R}^2$-Kongruenzen erzeugen läßt, die alle einem Büschel solcher Kongruenzen angehören. Eine sphärische $\mathfrak{R}^2$-Reihe ist stets in einem und nur einem Bündelheer enthalten.

Auf Grund der metrischen Gesetze für Kugel und Kreis im Π^2-Raum gilt

Satz 4: *Jede Kollineation aus* (Γ^6, X^6) *führt eine sphärische* $\mathfrak{R}^2$*-Kongruenz (-Reihe) in eine sphärische* $\mathfrak{R}^2$*-Kongruenz (-Reihe) mit gleichem D-Wert sowie Mittelfläche in Mittelfläche über.*

Satz 5: *In einem Büschel (Bündel) sphärischer* $\mathfrak{R}^2$*-Kongruenzen bilden die Mittelflächen eine Büschelschar (ein Bündelheer).*

Satz 6: *Jede sphärische* $\mathfrak{R}^2$*-Kongruenz liegt als Ganzes autopolar im polaren Raume ihrer Mittelfläche* $\mathfrak{R}_m^2$*, und zwar vertauscht die durch* $\mathfrak{R}_m^2$ *bedingte primäre Involution je zwei in einer Büschelschar durch* $\mathfrak{R}_m^2$ *gelegene Regelflächen der Kongruenz miteinander. Fallen diese beiden Regelflächen zusammen, so geht die sphärische Kongruenz in ein Bündelheer über.*

Da auf jeder Π^2-Kugel zwei Scharen von Erzeugenden liegen, folgt

Satz 7: *Jede sphärische* $\mathfrak{R}^2$*-Kongruenz läßt sich aus* $2 \cdot \infty^1$ *parabolischen Büschelscharen aufbauen; die (doppelt zählenden) Grundgeraden der Büschelscharen bilden die in* C_1^1 *enthaltene Regelschar der Mittelfläche.*

Aus der Erzeugung einer sphärischen $\mathfrak{R}^2$-Reihe als Schnitt zweier sphärischer $\mathfrak{R}^2$-Kongruenzen folgt

Satz 8: *Eine sphärische* $\mathfrak{R}^2$*-Reihe, die zwei sphärischen* $\mathfrak{R}^2$*-Kongruenzen mit den Mittelflächen* $\mathfrak{R}_1^2$ *und* $\mathfrak{R}_2^2$ *gemeinsam ist, wird durch diejenige sekundäre Involution in sich übergeführt, die durch die* $\mathfrak{R}_1^2$ *und* $\mathfrak{R}_2^2$ *verbindende Büschelschar festgelegt ist, und zwar vertauscht diese sekundäre Involution je zwei in einer Büschelschar durch die Mittelflächen* $\mathfrak{R}_m^2$ *der Reihe gelegene Regelflächen miteinander. Fallen diese beiden Regelflächen zusammen, so geht die sphärische Reihe selbst in eine Büschelschar über.*

Aus der Tatsache, daß durch einen Kreis im Π^2-Raum zwei Minimalkegel gelegt werden können und daß weiterhin das C_1^1-Bild eines Π^2-Minimalkegels aus allen in C_1^1 einscharig enthaltenen Regelflächen zweiten Grades besteht, welche die Bildfläche der Kegelspitze berühren, folgt

Satz 9: *Die* ∞^1 *Regelflächen einer sphärischen* $\mathfrak{R}^2$*-Reihe berühren sämtlich zwei feste einscharig in* C_1^1 *liegende Leitregelflächen.*

Zwei Minimalkegel im Π^2-Raum durchdringen einander in einem Kreispaar mit gemeinsamen absoluten Punkten. Werden zwei Punkte X und Y eines der beiden Kreise mit den Spitzen A und B der Minimalkegel verbunden, so entsteht ein Minimaltetraeder, d. h. ein Tetraeder, von dem zwei Gegenkantenpaare Minimalgeraden sind. Die vier Minimalebenen durch die Kanten des Tetraeders laufen dann durch einen Punkt,

den Mittelpunkt M der Kugel durch die vier Tetraederecken[14]) (Fig. 2). Werden dagegen zwei Punkte X und Y' auf verschiedenen Kreisen des Paares mit A und B verbunden, so entsteht ebenfalls ein Minimaltetraeder, dessen Minimalebenen aber nicht einem Minimalkegel angehören. Bei Vorgabe dreier Punkte A, X, B auf den Minimalgeraden $i_1 = AX$ und $i_2 = BX$ und einer weiteren Minimalgeraden i_3 durch A kann diese Konfiguration somit auf zwei Weisen zu einem Minimaltetraeder vervollständigt werden, und zwar besitzt das eine der so gewonnenen Tetraeder die Eigenschaft, daß seine Minimalebenen durch einen Punkt gehen.

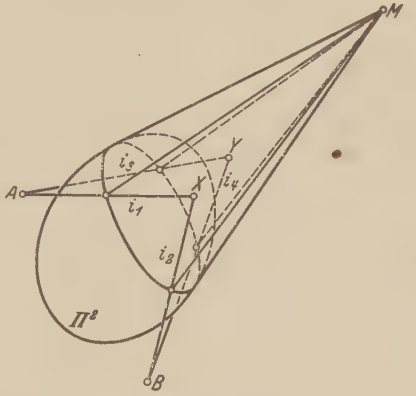


Fig. 2.

Die Übertragung dieser Figur liefert für C_1^1

Satz 10: *Zu drei in C_1^1 einscharig enthaltenen Regelflächen zweiten Grades $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2, \mathfrak{R}_3^2$, von denen $\mathfrak{R}_2^2$ die beiden anderen Flächen berührt, lassen sich zwei $\mathfrak{R}_2^2$ längs eines gegebenen Strahles s berührende Regelflächen $\mathfrak{R}_4^2$ und $\mathfrak{R}_4'^2$ derart einfügen, daß sich je eine zyklische Folge von vier einander berührenden Regelflächen ergibt. In der einen der beiden Folgen liegen die vier Berührungsstrahlen auf einer Regelfläche zweiten Grades, der Mittelfläche der sphärischen $\mathfrak{R}^2$-Kongruenz durch die vier Regelflächen der Folge.*

Der parabolische Fall ($\omega^2 = 0$) ergibt insofern eine Abänderung, als der eine der beiden Kreise im Π^2-Raum zum absoluten Kegelschnitt selbst wird. Für die parabolische Kongruenz P_1^1 gilt somit

Satz 11: *Berühren vier in einer parabolischen Kongruenz einscharig enthaltene Regelflächen zweiten Grades einander in zyklischer Folge, so liegen die vier Berührungsstrahlen stets wieder auf einer Regelfläche zweiten Grades, der Mittelfläche der sphärischen $\mathfrak{R}^2$-Kongruenz durch die vier Flächen der Folge.*

Die Betrachtung der sphärischen $\mathfrak{R}^2$-Reihen und -Kongruenzen, unter denen als Spezialfälle die (doppelt zählenden) Büschelscharen und Bündelheere enthalten sind, gestattet die Verallgemeinerung der Sätze 1 und 11 auf diese quadratischen Mannigfaltigkeiten:

---

[14]) Die dual entsprechende Figur ist ohne die Deutung im nichteuklidischen Sinne für die Kugel beschrieben in Th. Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelnsysteme, Leipzig 1879, S. 11 und in J. Steiner, Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und Kugeln, Zürich 1931, S. 125.

Satz 12: *Werden in die vier Regelflächen* $\mathfrak{R}_1^2, \mathfrak{R}_2^2, \mathfrak{R}_3^2, \mathfrak{R}_4^2$ *einer sphärischen* $\mathfrak{R}^2$*-Reihe mit einer Leitfläche* $\mathfrak{R}^2$ *die Regelflächen* $\mathfrak{R}_{12}^2, \mathfrak{R}_{23}^2, \mathfrak{R}_{34}^2, \mathfrak{R}_{41}^2$ *derart eingefügt, daß* $\mathfrak{R}_{ik}^2$ *die Regelflächen* $\mathfrak{R}_i$ *und* $\mathfrak{R}_k$ *berührt, so werden je zwei benachbarte Regelflächen dieser Folge und* $\mathfrak{R}^2$ *immer von einer weiteren Regelfläche berührt. Die vier sich so ergebenden Regelflächen gehören wieder einer sphärischen* $\mathfrak{R}^2$*-Reihe an und berühren somit noch eine zweite Leitfläche* $\overline{\mathfrak{R}^2}$.

Satz 13: *Berühren vier in einer parabolischen Kongruenz einscharig enthaltene Regelflächen zweiten Grades einander in zyklischer Folge und werden durch die Berührungsstrahlen je zweier diejenigen Regelflächen gelegt, die sie und eine vorgegebene Regelfläche berühren, so gehören die vier entstandenen Regelflächen einer sphärischen* $\mathfrak{R}^2$*-Reihe an und berühren somit noch eine zweite Regelfläche.*

Die Deutung aller dieser Konfigurationen in der Speerebene ergibt entsprechende Aussagen über Zykelmannigfaltigkeiten [15]).

Die Überordnung der sphärischen über die linearen Mannigfaltigkeiten gibt zum Schluß Veranlassung, diejenige Transformationsgruppe A^{10} von C_1^1 zu erwähnen, deren Transformationen gegenüber die einscharig in C_1^1 enthaltenen Regelflächen zweiten Grades einen Körper bilden. Diese Gruppe ist isomorph der zehngliedrigen konformen Gruppe des Π^3-Raumes bzw. derjenigen zehngliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen in π, die zugleich Zykeltransformationen sind [16]). Als Element in C_1^1 wird zweckmäßig eine einscharig in C_1^1 enthaltene Regelfläche zweiten Grades gewählt. Die der primären Involution übergeordnete Transformation ist die „Spiegelung an einer sphärischen $\mathfrak{R}^2$-Kongruenz", der Inversion an einer Kugel des Π^2-Raumes entsprechend und danach in C_1^1 leicht zu konstruieren. Die Mannigfaltigkeit aller Regelflächen durch einen Strahl wird durch eine solche Spiegelung in die Mannigfaltigkeit aller eine Regelfläche berührenden Regelflächen übergeführt. Durch eine solche Transformation ergab sich Satz 12 und 13 aus Satz 1 und 11. Aus den Spiegelungen an sphärischen $\mathfrak{R}^2$-Kongruenzen läßt sich A^{10} in derselben Weise aufbauen wie A^6 aus primären Involutionen.

---

[15]) Vgl. Anm. [5]).

[16]) Vgl. S. Lie, Gött. Nachr. 1871, S. 201; Math. Annalen 5, (1872), S. 186.

(Eingegangen am 15. Mai 1935.)

Über eine asymptotische Darstellung der Jacobischen Polynome durch Besselsche Funktionen.

Von

Heinz Rau.

Einleitung.

In einer Arbeit über die Laplacesche Reihe gibt E. Hilb eine gleichmäßig in einer bestimmten linksseitigen Umgebung von $x = +1$ geltende Abschätzung der Legendreschen Polynome $P_n(x)$ durch Besselsche Funktionen an[1]). Da die Legendreschen Polynome nur ein Spezialfall der Jacobischen $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ sind — man erhält sie für $\alpha = \beta = 0$[2]) —, so ist der Gedanke naheliegend, die genannte Abschätzung auf dies letztere Polynomsystem zu übertragen. Wir setzen dabei voraus, daß x in dem reellen Intervall $-1, +1$ liegt. Da

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x) \tag{1}$$

ist, so genügt es, wenn wir $-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1$ $(0 < \varepsilon < 2)$ annehmen. Ganz ähnliche Abschätzungsformeln wie die in dieser Arbeit abgeleiteten gibt auch G. Szegö in seiner Abhandlung „Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome“[3]). Während aber dort die Ergebnisse für beliebige reelle Werte von α, β hergeleitet sind, setzen wir hier $\alpha, \beta > -1$ voraus. Dafür können wir auch wesentlich elementarer vorgehen, wohingegen dort funktionentheoretische Methoden angewandt werden. Es hat sich auch herausgestellt, daß das hier angegebene Verfahren jedenfalls für $\alpha, \beta > -1$ teilweise eine etwas schärfere Abschätzung ermöglicht. In § 1 werden die notwendigen Formeln für Jacobische Polynome und Besselsche Funktionen angegeben, in § 2 wird zwischen diesen beiden Funktionssystemen eine Beziehung auf Grund der zugehörigen Differentialgleichungen hergeleitet, in § 3 folgt dann die Restabschätzung und das endgültige Resultat.

---

[1]) E. Hilb, Über die Laplacesche Reihe, Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 18—22.

[2]) Vgl. G. Polya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 2, Berlin 1925, S. 94.

[3]) G. Szegö, Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome (Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, Naturwissenschaftliche Klasse, 10. Jahrg., Heft 3, Halle 1933), S. 47.

§ 1.

Vorbemerkungen über Jacobische Polynome und Besselsche Funktionen.

I. Die Jacobischen Polynome

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x),\ P_1^{(\alpha,\beta)}(x),\ P_2^{(\alpha,\beta)}(x),\ \ldots,\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x),\ \ldots \qquad (\alpha, \beta > -1, \text{ reell})$$

erfüllen die Differentialgleichung

$$(2)\quad \frac{d}{dx}\left[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right] = -n(n+\alpha+\beta+1)\cdot(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\ [4].$$

Wir setzen $x = \cos\vartheta$. Da

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(n+1)}\ [5]$$

ist, so läßt sich das n-te Polynom in folgender Form schreiben:

$$(3)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(n+1)}(1+\vartheta^2\,\mathfrak{P}(\vartheta)).$$

Darin bedeutet $\mathfrak{P}(\vartheta)$ eine Potenzreihe von nicht niedrigerem als 0-tem Grade.

II. Im folgenden werden für diese Polynome einige Abschätzungsformeln gebraucht, welche für $0 < \vartheta \leqq \varepsilon$ (ε genügend klein) gleichmäßig in ϑ gelten, und zwar ist

a) für $-\frac{1}{2} \leqq \infty$

$$(4)\qquad \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)\right| \leqq \mathfrak{A}\,\frac{n^{-\frac{1}{2}}}{(\sin\vartheta)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\ [6]$$

und

$$(4\,a)\qquad \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)\right| \leqq \mathfrak{A}\,n^{\alpha}\ [7];$$

b) für $-1 < \alpha \leqq -\frac{1}{2}$

$$(5)\qquad \left|P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)\right| \leqq \mathfrak{A}\,n^{-\frac{1}{2}}\ [8].$$

In diesen Formeln ist $\mathfrak{A}$ eine nur von α, β und ε abhängige Zahl.

---

[4]) Vgl. Possé, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, Petersburg 1886, S. 52.

[5]) Vgl. a. a. O. Anm. [2]), S. 292.

[6]) H. Rau, Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **161** (1929), S. 249.

[7]) Vgl. a. a. O. Anm. [6]), S. 249. Die Ungleichung (4a) ist dort nur für $-\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$ bewiesen. Ihre Gültigkeit ergibt sich aber nach den dort angegebenen Methoden auch ohne weiteres für $\alpha \geqq \frac{1}{2}$.

[8]) G. Szegö, Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören, Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 585—586.

Es ist noch wichtig, festzustellen, daß (4) auch für $-1 < \alpha$ gleichmäßig in ϑ gilt, sofern $\eta \leqq \vartheta \leqq \pi - \eta$, $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ ist[9]).

III. Die Besselschen Funktionen[10]), die zur Abschätzung der Jacobischen Polynome herangezogen werden sollen, treten als Fundamentallösungen der homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{6}$$

auf. Darin soll ν eine beliebige reelle Zahl bedeuten.

a) Für $\nu \neq$ ganz erhalten wir als unabhängige Lösungen

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}, \\ J_{-\nu}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(-\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}; \end{aligned} \tag{7}$$

b) für $\nu \geqq 0$, ganz die Fundamentallösungen $J_\nu(x)$ und

$$\begin{aligned} Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} J_\nu(x) \ln \frac{x}{2} &- \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Psi(n) + \Psi(\nu+n)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n} \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu-n)}{\Gamma(n-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}, \end{aligned} \tag{7'}$$

wobei für $\nu = 0$ in $Y_\nu(x)$ die letzte Summe fehlt.

Alle drei Reihen konvergieren, abgesehen vom 0-Punkt, gleichmäßig in jedem endlichen Intervall von x.

IV. Wir brauchen für die späteren Untersuchungen noch das Verhalten der Funktionen für $x \to 0$ und $x \to \infty$. Verstehen wir unter c eine beliebige feste positive Zahl, so gilt, wie sich aus den oben angegebenen Entwicklungen ergibt, folgendes:

a) Für $0 < x \leqq c$ ist

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= O(x^\nu) \\ Y_\nu(x) &= \begin{cases} O(x^{-\nu}) & \text{für} \quad \nu \neq 0 \\ O(x^{-\varkappa}) & \text{für} \quad \nu = 0 \quad (\varkappa > 0, \text{ beliebig klein}); \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

b) für $c \leqq x$

$$\left.\begin{matrix} J_\nu(x) \\ Y_\nu(x) \end{matrix}\right\} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \tag{8'}$$

[9]) G. Darboux, Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série, Journal de mathématiques pures et appliquées (3) 4 (1878), S. 9—20 u. S. 22—23.

[10]) Vgl. etwa Frank und v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Braunschweig 1930, S. 403—414.

V. Durch eine einfache Transformation kann man die Besselsche Differentialgleichung (6) auf die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(a^2 + \frac{1-4\nu^2}{4x^2}\right)\cdot y = 0 \tag{9}$$

bringen; dabei bedeutet a eine von 0 verschiedene Konstante. Ein Fundamentalsystem dieser Gleichung erhalten wir

a) für $\nu \neq$ ganz durch

$$\sqrt{x}\,J_\nu(ax) \qquad \text{und} \qquad \sqrt{x}\,J_{-\nu}(ax),$$

b) für $\nu \geqq 0$, ganz durch

$$\sqrt{x}\,J_\nu(ax) \qquad \text{und} \qquad \sqrt{x}\,Y_\nu(ax).$$

Bekanntlich haben die Funktionaldeterminanten dieser Lösungen konstanten Wert. Setzen wir

$$\sqrt{x}J_\nu(ax)\frac{d}{dx}[\sqrt{x}J_{-\nu}(ax)] - \sqrt{x}\,J_{-\nu}(ax)\frac{d}{dx}[\sqrt{x}J_\nu(ax)] = k_1 \tag{10}$$

$$(\nu \neq \text{ganz})$$

und

$$\sqrt{x}J_\nu(ax)\frac{d}{dx}[\sqrt{x}\,Y_\nu(ax)] - \sqrt{x}\,Y_\nu(ax)\frac{d}{dx}[\sqrt{x}J_\nu(ax)] = k_2 \tag{10'}$$

$$(\nu \geqq 0, \text{ ganz}),$$

so ist

$$k_1 = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}, \quad k_2 = \frac{2}{\pi}. \tag{11}$$

Die angegebenen Werte der Konstanten ergeben sich ohne weiteres aus den Reihenentwicklungen (7) und (7'), wenn man x gegen 0 konvergieren läßt.

§ 2.

Ein Zusammenhang zwischen Besselschen Funktionen und Jacobischen Polynomen.

I. Wir setzen in der Differentialgleichung für Jacobische Polynome (2) $x = \cos\vartheta$. Dann geht (2) über in

$$\frac{d}{d\vartheta}\left[\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2\beta+1}\frac{d}{d\vartheta}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)\right] \tag{12}$$

$$= -n(n+\alpha+\beta+1)\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2\beta+1}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta).$$

Durch einen geeigneten Ansatz bringen wir diese Differentialgleichung auf die Gestalt

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2} + \varphi(\vartheta)\cdot y = f(\vartheta), \tag{13}$$

die wir dann, wie in der Einleitung angedeutet wurde, mit der transformierten Differentialgleichung der Besselschen Funktionen (9) vergleichen können, wenn wir $\varphi(\vartheta)$ die Form $a^2 + \frac{1-4\nu^2}{4\vartheta^2}$ geben. Zu diesem Zweck setzen wir

$$(14) \qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) = \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}} \cdot u(\vartheta).$$

Nach einfachen Umformungen erhalten wir statt (12)

$$u''(\vartheta) + \left[-\frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{4}\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}} + \frac{\alpha+\beta+\alpha\cdot\beta}{2} + \frac{3}{8}\right] \cdot u(\vartheta)$$
$$+ n(n+\alpha+\beta+1) \cdot u(\vartheta) = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$(15) \quad u''(\vartheta) + \left[-\frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{4}\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{8}\right] \cdot u(\vartheta)$$
$$+ \left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2 \cdot u(\vartheta) = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$n + \frac{\alpha+\beta+1}{2} = a$$

und

$$-\frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{4}\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{8} = g(\vartheta).$$

Durch einfache Umformungen ergibt sich

$$g(\vartheta) = -\frac{1}{4}\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2} + \sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{4}\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= -\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\vartheta} - \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\vartheta}$$

$$= \frac{1-4\alpha^2}{4\sin^2\vartheta} + \frac{(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\vartheta}.$$

So bekommen wir für (15)

$$u''(\vartheta) + \left[a^2 + \frac{1-4\alpha^2}{4\sin^2\vartheta} + \frac{(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\vartheta}\right] \cdot u(\vartheta) = 0.$$

Die gewünschte Form (13) hat dann die Gestalt

$$u''(\vartheta) + \left[a^2 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4\vartheta^2}\right] \cdot u(\vartheta) = h(\vartheta) \cdot u(\vartheta), \tag{16}$$

worin

$$h(\vartheta) = \frac{4\alpha^2 - 1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\vartheta} - \frac{1}{\vartheta^2}\right) - \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\vartheta} \tag{16a}$$

ist. Wir sehen, daß $h(\vartheta)$ für $0 \leqq \vartheta \leqq \pi - \varepsilon\,(0 < \varepsilon < \pi)$ beschränkt und stetig ist.

II. Fassen wir (16) als die zu der homogenen Differentialgleichung

$$u''(\vartheta) + \left[a^2 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4\vartheta^2}\right] u(\vartheta) = 0$$

zugehörige inhomogene Gleichung auf, wobei wir unter $u(\vartheta)$ auf der rechten Seite von (16) die durch (14) definierte Funktion verstehen wollen, so können wir mit Rücksicht auf § 1, V als allgemeine Lösung von (16) folgende Funktionen angeben:

a) für $\alpha \neq$ ganz

$$\begin{aligned} u^*(\vartheta) = {} & c_1\sqrt{\vartheta}\,J_\alpha(a\vartheta) + c_2\sqrt{\vartheta}\,J_{-\alpha}(a\vartheta) \\ & + \frac{1}{k_1}\Big\{\sqrt{\vartheta}\,J_{-\alpha}(a\vartheta)\int_0^\vartheta \sqrt{\varphi}\,J_\alpha(a\varphi)\,h(\varphi)\,u(\varphi)\,d\varphi \\ & - \sqrt{\vartheta}\,J_\alpha(a\vartheta)\int_0^\vartheta \sqrt{\varphi}\,J_{-\alpha}(a\varphi)\,h(\varphi)\,u(\varphi)\,d\varphi\Big\}, \end{aligned} \tag{17a}$$

b) für $\alpha \geqq 0$, ganz

$$\begin{aligned} u^*(\vartheta) = {} & c_1\sqrt{\vartheta}\,J_\alpha(a\vartheta) + c_2\sqrt{\vartheta}\,Y_\alpha(a\vartheta) \\ & + \frac{1}{k_2}\cdot\Big\{\sqrt{\vartheta}\,Y_\alpha(a\vartheta)\int_0^\vartheta \sqrt{\varphi}\,J_\alpha(a\varphi)\,h(\varphi)\,u(\varphi)\,d\varphi \\ & - \sqrt{\vartheta}\,J_\alpha(a\vartheta)\int_0^\vartheta \sqrt{\varphi}\,Y_\alpha(a\varphi)\,h(\varphi)\,u(\varphi)\,d\varphi\Big\}. \end{aligned} \tag{17b}$$

Unter c_1 und c_2 sind hierbei willkürliche Konstanten zu verstehen. Bei der Beschränkung auf das Intervall $0 < \vartheta \leqq \pi - \varepsilon\,(0 < \varepsilon < \pi)$ haben die Integrale tatsächlich einen Sinn; denn nach § 1, II und IV und der Bemerkung zu (16a) sind die Integranden für $\varepsilon_1 \leqq \vartheta \leqq \pi - \varepsilon_1\left(0 < \varepsilon_1 < \frac{\pi}{2}\right)$ beschränkt und stetig und in der Nähe des 0-Punktes verhalten sie sich wie φ^s, wobei $s > -1$ ist.

Setzen wir zur Abkürzung in (17a) bzw. (17b)

$$\frac{1}{k_1}\{\ldots\} = R_1, \quad \frac{1}{k_2}\{\ldots\} = R_2, \tag{17c}$$

so können wir die allgemeine Lösung von (16) in folgender Form schreiben:

$$u^*(\vartheta) = \begin{cases} c_1\sqrt{\vartheta}\,J_\alpha(a\vartheta) + c_2\sqrt{\vartheta}\,J_{-\alpha}(a\vartheta) + R_1 & \text{für } \alpha \neq \text{ganz}, \\ c_2\sqrt{\vartheta}\,J_\alpha(a\vartheta) + c_2\sqrt{\vartheta}\,Y_\alpha(a\vartheta) + R_2 & \text{für } \alpha \geqq 0, \text{ ganz}. \end{cases} \tag{18}$$

III. Das allgemeine Integral (17a) bzw. (17b) der Differentialgleichung (16) soll jetzt so spezialisiert werden, daß es mit dem partikulären Integral (vgl. (14))

$$u(\vartheta) = \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)$$

dieser Gleichung übereinstimmt. Dann haben wir auch die für die weitere Untersuchung geeignete Beziehung zwischen Besselschen Funktionen und Jacobischen Polynomen.

Zunächst sehen wir (vgl. (3)), es ist

$$u(\vartheta) = \frac{2^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}\cdot\vartheta^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+\vartheta^2\mathfrak{P}_1(\vartheta)), \tag{19}$$

wenn ϑ genügend klein ist. Dabei bedeutet $\mathfrak{P}_1(\vartheta)$ eine Potenzreihe von nicht niedrigerem als 0-tem Grade. Weiterhin ergibt sich aus § 1, III und (19), wenn ϑ genügend klein ist,

$$\begin{aligned} \sqrt{\vartheta}\,J_\alpha(a\vartheta) &= \frac{a^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\vartheta^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+\vartheta^2\mathfrak{P}_2(\vartheta)), \\ \left.\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix}\right\} &= \vartheta^{\alpha+\frac{5}{2}}\mathfrak{P}_3(\vartheta), \end{aligned} \tag{20}$$

wobei $\mathfrak{P}_2(\vartheta)$ und $\mathfrak{P}_3(\vartheta)$ die gleiche Bedeutung wie oben $\mathfrak{P}_1(\vartheta)$ haben. Daraus folgt wegen (8), daß $c_2 = 0$ gesetzt werden muß. Aus (18), (19) und (20) erhalten wir dann folgende Beziehung für c_1:

$$c_1\cdot\frac{a^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)} = \frac{2^{-\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}$$

oder

$$c_1 = \frac{a^{-\alpha}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}. \tag{21}$$

Aus (14), (18) und (21) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) = a^{-\alpha}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}\cdot\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\alpha}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\beta}\sqrt{\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}}\,J_\alpha(a\vartheta) \\ + \mathfrak{A}\,R_\varkappa\vartheta^{-\alpha-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{22}$$

($\varkappa = 1$ für $\alpha \neq$ ganz, $\varkappa = 2$ für $\alpha \geqq 0$, ganz).

§ 3.

Restabschätzung.

I. In diesem Abschnitt soll das Verhalten der Reste $R_{1,2}$ untersucht werden. Wie aus den in § 1 angegebenen Abschätzungsformeln leicht einzusehen ist, müssen wir dabei zwei Hauptfälle unterscheiden, nämlich den, daß $a\vartheta \geqq c$, und den, daß $a\vartheta \leqq c\,(0 < \vartheta \leqq \pi - \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \pi)$ ist. Dabei bedeutet c eine beliebige positive Konstante.

Setzen wir in den Integralen (17a) und (17b) $a\varphi = \psi$, so erhalten wir

$$R_1 = \frac{1}{a^2}\Big\{\sqrt{a\vartheta}\,J_{-\alpha}(a\vartheta)\int_0^{a\vartheta}\sqrt{\psi}\,J_\alpha(\psi)\,h\Big(\frac{\psi}{a}\Big)u\Big(\frac{\psi}{a}\Big)d\psi$$

$$-\sqrt{a\vartheta}\,J_\alpha(a\vartheta)\int_0^{a\vartheta}\sqrt{\psi}\,J_{-\alpha}(\psi)\,h\Big(\frac{\psi}{a}\Big)u\Big(\frac{\psi}{a}\Big)d\psi\Big\},$$

(23)

$$R_2 = \frac{1}{a^2}\Big\{\sqrt{a\vartheta}\,Y_\alpha(a\vartheta)\int_0^{a\vartheta}\sqrt{\psi}\,J_\alpha(\psi)\,h\Big(\frac{\psi}{a}\Big)u\Big(\frac{\psi}{a}\Big)d\psi$$

$$-\sqrt{a\vartheta}\,J_\alpha(a\vartheta)\int_0^{a\vartheta}\sqrt{\psi}\,Y_\alpha(\psi)\,h\Big(\frac{\psi}{a}\Big)\cdot u\Big(\frac{\psi}{a}\Big)d\psi\Big\}.$$

II. Es sei $a\vartheta \geqq c$ und η eine beliebig kleine positive Konstante.

a) Für $\alpha \geqq -\frac{1}{2}$ bekommen wir (vgl. (4), (4a), (8), (8'), (14), (16a))

$$|R_{1,2}| \leqq \frac{\mathfrak{A}}{n^2}\Big\{\int_0^\eta \psi^{\frac{1}{2}+\alpha}n^{-\frac{1}{2}}d\psi + \int_\eta^{a\vartheta} n^{-\frac{1}{2}}d\psi + \int_0^\eta \psi^{-\alpha}\frac{\psi^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}n^\alpha d\psi + \int_\eta^{a\vartheta} n^{-\frac{1}{2}}d\psi\Big\}$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{A}}{n^{\frac{5}{2}}}\Big\{1 + n\vartheta\Big\}$$

(24)
$$\leqq \mathfrak{A}n^{-\frac{3}{2}}.$$

b) Für $-1 < \alpha \leqq -\frac{1}{2}$ gilt (vgl. (5), (8), (8'), (14), (16a))

$$|R_1| \leqq \frac{\mathfrak{A}}{n^2}\Big\{\int_0^\eta \psi^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{\psi^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}n^{-\frac{1}{2}}d\psi + \int_\eta^{a\vartheta} n^{-\frac{1}{2}}d\psi$$

$$+\int_0^\eta \psi^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{\psi^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}n^{-\frac{1}{2}}d\psi + \int_\eta^{a\vartheta} n^{-\frac{1}{2}}d\psi\Big\}$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{A}}{n^{\frac{5}{2}}}\Big\{n^{-\alpha-\frac{1}{2}} + n\vartheta + 1\Big\}$$

(25)
$$\leqq \mathfrak{A}n^{-\frac{3}{2}}.$$

III. Wir kommen zu dem Fall $a\vartheta \leqq c$.

a) Es sei $\alpha \geqq -\frac{1}{2}$ und $\neq 0$. Dann ist (vgl. (4a), (8), (14), (16a))

$$|R_{1,2}| \leqq \frac{\mathfrak{A}}{n^2}\left\{n^{-\alpha}\vartheta^{-\alpha}\int_0^{a\vartheta}\psi^{\alpha+\frac{1}{2}}\frac{\psi^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}n^{\alpha}\,d\psi + n^{\alpha}\vartheta^{\alpha}\int_0^{a\vartheta}\psi^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{\psi^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}n^{\alpha}\,d\psi\right\}$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{A}}{n^2}\left\{n^{\alpha+\frac{3}{2}}\vartheta^{\alpha+2} + n^{\alpha+\frac{3}{2}}\vartheta^{\alpha+2}\right\}$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{A}\,\vartheta^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^{2-\alpha}}\left\{n^{\frac{3}{2}}\vartheta^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{3}{2}}\vartheta^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\leqq \mathfrak{A}\,n^{\alpha-2}\,\vartheta^{\alpha+\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

b) Für $\alpha = 0$ gilt (vgl. (4), (4a), (8), (14), (16a))

$$|R_2| \leqq \frac{\mathfrak{A}}{n^2}\left\{\int_0^{a\vartheta}\psi^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\,d\psi + \int_0^{a\vartheta}\psi^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\,d\psi\right\}$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{A}}{n^2}\left\{n^{\frac{3}{2}}\vartheta^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{5}{2}}\vartheta^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\leqq \mathfrak{A}\,n^{-2}\,\vartheta^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

c) Für $-1 < \alpha \leqq -\frac{1}{2}$ erhalten wir (vgl. (5), (8), (14), (16a))

$$|R_1| \leqq \frac{\mathfrak{A}}{n^2}\left\{n^{-\alpha}\vartheta^{-\alpha}\int_0^{a\vartheta}\psi^{\frac{1}{2}+\alpha}\frac{\psi^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}n^{-\frac{1}{2}}\,d\psi + n^{\alpha}\vartheta^{\alpha}\int_0^{a\vartheta}\psi^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{\psi^{\alpha+\frac{1}{2}}}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}n^{-\frac{1}{2}}\,d\psi\right\}$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{A}}{n^2}\left\{n\vartheta^{\alpha+2} + n\vartheta^{\alpha+2}\right\}$$

$$\leqq \mathfrak{A}\,n^{-1}\vartheta^{\alpha+2}. \tag{28}$$

IV. Aus (22) und den Ergebnissen der Abschnitte II und III dieses Paragraphen gewinnen wir die gewünschten gleichmäßig in ϑ geltenden Formeln für die Abschätzung der Jacobischen Polynome.

a) Für $a\vartheta \geqq c$ ist

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) = a^{-\alpha}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}\cdot\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\alpha}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\beta}\sqrt{\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}}\,J_{\alpha}(a\vartheta) \tag{29}$$

$$+\,\vartheta^{-\alpha-\frac{1}{2}}O(n^{-\frac{3}{2}})$$

$$(0 < \vartheta \leqq \pi-\varepsilon,\quad 0 < \varepsilon < \pi;\quad \alpha,\beta > -1).$$

b) Für $a\vartheta \leqq c$ ergibt sich

$$(30)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) = a^{-\alpha}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\alpha}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\beta}\sqrt{\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}}\,J_\alpha(a\vartheta)$$
$$+\begin{cases} O(n^{\alpha-2}) & (\alpha \geqq -\tfrac{1}{2}) \\ \vartheta^{\frac{3}{2}}O(n^{-1}) & (-1<\alpha\leqq -\tfrac{1}{2}) \end{cases}$$
$$(0<\vartheta\leqq\pi-\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<\pi;\quad \alpha,\beta>-1).$$

Da hier nach Voraussetzung $\vartheta \leqq ca^{-1}$ ist, so können wir statt (30) auch folgendes schreiben:

$$(30')\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) = a^{-\alpha}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\alpha}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\beta}\sqrt{\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}}\,J_\alpha(a\vartheta)$$
$$+O\left(n^{\max\left(\alpha-2,\,-\frac{5}{2}\right)}\right)^{11})$$
$$(0<\vartheta\leqq\pi-\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<\pi;\quad \alpha,\beta>-1).$$

---

11) Vgl. dazu a. a. O. Anm. 3). G. Szegö gibt für das Restglied an: $O(n^{\alpha-1})$, und zwar, wenn α, β beliebige reelle Zahlen sind.

(Eingegangen am 10. Juni 1935.)

Über einige bestimmte Integrale, in denen die Whittakerschen $M_{k,m}$-Funktionen auftreten.

Von

Artur Erdélyi in Brünn.

In einer Arbeit „Integraleigenschaften der Hermiteschen und Laguerreschen Polynome" hat K. Mayr[1]) die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} x^{\sigma-1} H_\nu(\alpha x)\, dx, \quad \int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} x^{\sigma-1} H_\nu(\alpha x) H_\mu(\beta x)\, dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} x^{\sigma-1} L_r^{(a)}(\alpha x) L_s^{(b)}(\beta x)\, dx,$$

in deren Integranden Hermitesche bzw. Laguerresche Polynome vorkommen, für reelle, positive aber sonst beliebige Werte der Parameter λ, α, β berechnet, nachdem schon früher G. Doetsch[2]) einige Sonderfälle der Integrale mit Hermiteschen Polynomen mit Hilfe einer anderen Methode untersucht hatte[3]).

Die Tatsache, daß sowohl die Hermiteschen als auch die Laguerreschen Polynome Sonderfälle der von Whittaker eingeführten konfluenten hypergeometrischen Funktion $M_{k,m}(z)$ sind[4]), legt den Gedanken nahe, entsprechende Integraltheoreme für letztgenannte Funktionen abzuleiten, aus denen durch Spezialisierung dann nicht nur die Formeln von Mayr und einige Formeln für Integrale mit Besselschen Funktionen zwanglos folgen, sondern noch entsprechende Formeln für andere Funktionen abgeleitet werden können, die ebenfalls als Sonderfälle der $M_{k,m}$-Funktionen aufzufassen sind[5]).

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit, in der dieser Weg verfolgt wird, gehen in drei Richtungen über die bisher erzielten hinaus: 1. Es

[1]) Math. Zeitschr. 39 (1935), S. 597.

[2]) Integraleigenschaften der Hermiteschen Polynome, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 587.

[3]) Das auf das erste der oben angeführten Integrale bezügliche Ergebnis war für die Funktionen des parabolischen Zylinders $D_n(z)$, die sich von den Hermiteschen Polynomen nur durch einen Faktor in Gestalt einer Exponentialfunktion unterscheiden, schon früher bekannt, was beiden Autoren entgangen zu sein scheint. Vgl. auch Whittaker-Watson: A course of modern Analysis. 4. Edition, Cambridge University Press 1927, S. 353. Dieses Werk wird hinfort als Wh.-W. zitiert.

[4]) Vgl. Wh.-W., Kap. XVI.

[5]) Einige dieser Funktionen sind in der Schlußbemerkung erwähnt.

werden wesentlich allgemeinere Integrale mit $M_{k,m}$-Funktionen an Stelle der Hermiteschen und Laguerreschen Polynome betrachtet, die alle oben erwähnten Integrale als Sonderfälle enthalten. 2. Es werden Integranden, die aus beliebig aber endlich vielen Faktoren von $M_{k,m}$-Funktionen bestehen, zugelassen (während Doetsch und Mayr nur Integrale mit einem oder mit einem Produkt von zwei der von ihnen betrachteten Polynome untersuchen). 3. Es werden die Betrachtungen auf beliebige komplexe Werte der auftretenden Parameter ausgedehnt. Die zur Verwendung kommende Methode, die sowohl von der von Doetsch als auch der von Mayr verschieden ist, fußt auf den bekannten Integraldarstellungen der Whittakerschen Funktionen $M_{k,m}(z)$.

In § 1 wird das Integral

$$\int_{\infty}^{(0+)} e^{-pz} z^q M_{k_1, m_1}(\alpha_1 z) M_{k_2, m_2}(\alpha_2 z) \dots M_{k_n m_n}(\alpha_n z)\, dz$$

berechnet und in Verallgemeinerung der Mayrschen Ergebnisse gezeigt, daß es auf eine hypergeometrische Funktion von n Veränderlichen der im Integral auftretenden Parameter führt[6]). In den § 2 bis 4 wird die in § 1 gewonnene Hauptformel auf Hermitesche und Laguerresche Polynome, sowie auf Besselsche Funktionen angewendet.

§ 1.

Das Integral

$$J = \int_{\infty}^{(0+)} e^{-pz} z^q M_{k_1, m_1}(\alpha_1 z) M_{k_2, m_2}(\alpha_2 z) \dots M_{k_n, m_n}(\alpha_n z)\, dz.$$

Durch die Schreibweise in diesem Integral wird angedeutet, daß der Integrationsweg, vom Unendlichen kommend, den Nullpunkt in positiver Richtung umkreist und in derselben Richtung wieder ins Unendliche geht. Dabei sei am Anfang des Integrationsweges

$$\left| \arg\left(p \pm \frac{\alpha_1}{2} \pm \frac{\alpha_2}{2} \pm \dots \pm \frac{\alpha_n}{2}\right) z \right| < \frac{\pi}{2}.$$

Für die Funktionen $M_{k,m}(x)$ gilt die bekannte Integraldarstellung

$$M_{k,m}(x) = c_{k,m} x^{\frac{1}{2}+m} \int_{-1}^{+1} (1+t)^{-\frac{1}{2}+m-k} (1-t)^{-\frac{1}{2}+m+k} e^{\frac{1}{2}xt}\, dt$$

---

[6]) Für $n = 1$ bildet dieses Ergebnis ein interessantes Gegenstück zu den Integraldarstellungen, die jüngst C. S. Meijer für die Funktionen $W_{k,m}(z)$ gegeben hat. [Nieuw Arch. f. Wiskde. 18 (1934), S. 35]. Dies legt die Vermutung nahe, daß ein Produkt von n verschiedenen Funktionen $W_{k_\nu, m_\nu}(\alpha_\nu z)$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ eine der Meijerschen entsprechende Integraldarstellung besitzt, in deren Integranden eine hypergeometrische Funktion von n Veränderlichen auftritt.

mit

$$c_{k,m} = \frac{\Gamma(2m+1)\,2^{-2m}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)\,\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)}\,^{7}).$$

Hiernach ist

$$J = c_{k_1,m_1} c_{k_2,m_2} \dots c_{k_n,m_n} \cdot \alpha_1^{\frac{1}{2}+m_1}\,\alpha_2^{\frac{1}{2}+m_2} \dots \alpha_n^{\frac{1}{2}+m_n}$$
$$\cdot \int_{\infty}^{(0+)} e^{-pz}\, z^{q+m_1+m_2+\dots+m_n+\frac{n}{2}} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \dots \int_{-1}^{+1} e^{\frac{1}{2}(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2+\dots+\alpha_n t_n)z}$$
$$\cdot (1+t_1)^{-\frac{1}{2}+m_1-k_1}(1+t_2)^{-\frac{1}{2}+m_2-k_2} \dots (1+t_n)^{-\frac{1}{2}+m_n-k_n}$$
$$\cdot (1-t_1)^{-\frac{1}{2}+m_1+k_1}(1-t_2)^{-\frac{1}{2}+m_2+k_2}$$
$$\dots (1-t_n)^{-\frac{1}{2}+m_n+k_n}\,dz\,dt_1\,dt_2 \dots dt_n.$$

Wenn man, was hier gestattet ist, die Integration nach z mit der nach t_ν vertauscht und gleichzeitig berücksichtigt, daß

$$\int_{\infty}^{(0+)} \exp\Big[-\Big(p-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu t_\nu\Big)z\Big]\, z^{q+\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu+\frac{n}{2}}\,dz = [e^{2\pi i\left(q+\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu+\frac{n}{2}\right)}-1]$$
$$\cdot\Big(p-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu t_\nu\Big)^{-q-\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu-\frac{n}{2}-1}\Gamma\Big(q+\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu+\frac{n}{2}+1\Big),$$

so erhält man durch die Einführung neuer Integrationsveränderlichen u_ν mittels der Beziehung

$$t_\nu = 2u_\nu - 1 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

die Gleichung

$$= [e^{2\pi i\left(q+\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu+\frac{n}{2}\right)}-1]\,2^{2\cdot\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu} \prod_{\nu=1}^{n} c_{k_\nu,m_\nu}\alpha_\nu^{\frac{1}{2}+m_\nu}$$
$$\cdot\Big(p+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\Big)^{-q-\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu-\frac{n}{2}-1}\cdot\Gamma\Big(q+\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu+\frac{n}{2}+1\Big)$$
$$\cdot\int_0^1\int_0^1\dots\int_0^1 \prod_{\nu=1}^{n}[u_\nu^{-\frac{1}{2}+m_\nu-k_\nu}(1-u_\nu)^{-\frac{1}{2}+m_\nu+k_\nu}]$$
$$\cdot\left(1-\frac{\alpha_1 u_1}{p+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu}-\frac{\alpha_2 u_2}{p+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu}-\dots-\frac{\alpha_n u_n}{p+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu}\right)^{-q-\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu-\frac{n}{2}-1} du_1\,du_2\dots du_n$$

---

7) Wh.-W., S. 352. Wenn die Parameter m, k solche Werte haben, daß dieses Integral nicht konvergiert, so kann man es in der bekannten Weise durch das entsprechende Doppelschleifenintegral ersetzen.

Da ferner

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 u_1^{\beta_1-1} u_2^{\beta_2-1} \dots u_n^{\beta_n-1} (1-u_1)^{\gamma_1-\beta_1-1} (1-u_2)^{\gamma_2-\beta_2-1}$$
$$\dots (1-u_n)^{\gamma_n-\beta_n-1} (1-u_1 x_1 - u_2 x_2 - \dots - u_n x_n)^{-\alpha} \cdot du_1\, du_2 \dots du_n$$
$$= \frac{\Gamma(\beta_1)\,\Gamma(\beta_2)\dots\Gamma(\beta_n)\,\Gamma(\gamma_1-\beta_1)\,\Gamma(\gamma_2-\beta_2)\dots\Gamma(\gamma_n-\beta_n)}{\Gamma(\gamma_1)\,\Gamma(\gamma_2)\dots\Gamma(\gamma_n)}$$
$$\cdot F_A(\alpha;\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n;\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n;\ x_1, x_2, \dots, x_n),$$

worin F_A die von Lauricella[8]) eingeführte hypergeometrische Funktion von n Veränderlichen ist[9]), so erhält man nach Eintragen der Werte der $c_{k,m}$ die Hauptformel

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} J &= \int_{\infty}^{(0+)} e^{-pz} z^q M_{k_1,m_1}(\alpha_1 z) M_{k_2,m_2}(\alpha_2 z) \dots M_{k_n,m_n}(\alpha_n z)\, dz \\ &= [e^{2\pi i\left(q+\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu + \frac{n}{2}\right)} - 1] \cdot \alpha_1^{\frac{1}{2}+m_1} \alpha_2^{\frac{1}{2}+m_2} \\ &\quad \dots \alpha_n^{\frac{1}{2}+m_n} \left(p + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\right)^{-q-\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu - \frac{n}{2} - 1} \\ &\quad \cdot \Gamma\left(q + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu + \frac{n}{2} + 1\right) \\ &\quad \cdot F_A\left(q + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu + \frac{n}{2} + 1;\ \frac{1}{2} + m_1 - k_1,\ \frac{1}{2} + m_2 - k_2, \dots,\right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} + m_n - k_n;\ 1 + 2m_1,\ 1 + 2m_2, \dots,\ 1 + 2m_n;\right. \\ &\qquad \left. \frac{\alpha_1}{p + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu},\ \frac{\alpha_2}{p + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu},\ \dots,\ \frac{\alpha_n}{p + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu}\right). \end{aligned}\right.$$

Falls

$$\Re e\left(q + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu + \frac{n}{2} + 1\right) > 0,$$

so konvergiert das von 0 bis ∞ erstreckte Integral, und sein Wert entspricht der rechten Seite von Gleichung (1) unter Weglassung des ersten Faktors

$$e^{2\pi i\left(q+\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu + \frac{n}{2}\right)} - 1.$$

---

[8]) Sulla funzioni ipergeometriche a piu variabili. Rendiconti Circ. mat. Palermo 7 (1893), S. 111.

[9]) Vgl. auch Appell-Kampé de Feriet: Fonctions hypergéometriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite. Paris Gauthier-Villars 1926, S. 114ff. Dieses Werk wird hinfort als A.-K. zitiert.

Im Falle $n = 2$ reduziert sich F_A auf die Appelsche hypergeometrische Funktion F_2 von zwei Veränderlichen[10]), im Falle $n = 1$ auf die Gaußsche hypergeometrische Funktion.

Gleichung (1) kann auch als eine Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion von n Veränderlichen aufgefaßt werden, die deswegen von Interesse ist, weil sie F_A in Form eines *einfachen* Integrals darzustellen gestattet (im Gegensatz zu den bekannten n-fachen Integralen).

§ 2.

Integrale mit Hermiteschen Polynomen.

Aus der Definition der Hermiteschen Polynome[11]) und aus den etwa in Wh.-W., § 16,7, S. 350 und § 16,5, S. 347 gegebenen Formeln für die Funktionen des parabolischen Zylinders $D_n(z)$ folgt, daß

$$H_\mu(z) = h_\mu z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z^2} M_{\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4},\ -(-1)^\mu\cdot\frac{1}{4}}(z^2)$$

mit

$$h_\mu = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\mu!}{\left(\frac{\mu}{2}\right)!},$$

wenn μ gerade, hingegen

$$h_\mu = (-1)^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot \frac{2\cdot\mu!}{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)!},$$

wenn μ ungerade.

Nach diesen Vorbereitungen kann sofort das Integral

$$J = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} H_{\mu_1}(\beta_1 x) H_{\mu_2}(\beta_2 x) \dots H_{\mu_n}(\beta_n x)\, x^{\sigma-1}\, dx$$

berechnet werden, welches unter der Bedingung

$$\Re e\, \lambda^2 > 0, \quad \Re e\, \sigma > 0$$

konvergent ist[12]). Durch Einführung des Ausdruckes für $H_\mu(\beta x)$ erhält man

$$J = h_{\mu_1} h_{\mu_2} \dots h_{\mu_n} \beta_1^{-\frac{1}{2}} \beta_2^{-\frac{1}{2}} \dots \beta_n^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^n \beta_\nu^2\right)x^2\right] \cdot x^{\sigma-\frac{n}{2}-1}$$
$$\cdot M_{\frac{\mu_1}{2}+\frac{1}{4},\ -(-1)^{\mu_1}\cdot\frac{1}{4}}(\beta_1^2 x^2) M_{\frac{\mu_2}{2}+\frac{1}{4},\ -(-1)^{\mu_2}\cdot\frac{1}{4}}(\beta_2^2 x^2)$$
$$\dots M_{\frac{\mu_n}{2}+\frac{1}{4},\ -(-1)^{\mu_n}\cdot\frac{1}{4}}(\beta_n^2 x^2)\, dx.$$

---

[10]) Vgl. A.-K., S. 115 und 28.

[11]) Vgl. z. B. Mayr l. c., S. 598.

[12]) Wenn $\varkappa$ unter den n Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ungerade sind, genügt es sogar, wenn

$$\Re e\,(\sigma + \varkappa) > 0.$$

Setzt man

$$x^2 = z,$$

so erhält man

$$J = \frac{1}{2} \prod_{\nu=1}^{n} (h_{\mu_\nu} \beta_\nu^{-\frac{1}{2}}) \int_0^\infty \exp\Big[-\Big(\lambda^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2\Big) z\Big]$$

$$\cdot z^{\frac{\sigma}{2} - \frac{n}{4} - 1} \prod_{\nu=1}^{n} M_{\mu_\nu \over 2 + \frac{1}{4},\ -(-1)^{\mu_\nu} \cdot \frac{1}{4}} (\beta_\nu^2 z)\, dz.$$

Mit

$$p = \lambda^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2, \quad q = \frac{\sigma}{2} - \frac{n}{4} - 1, \quad k_\nu = \frac{\mu_\nu}{2} + \frac{1}{4},$$

$$m_\nu = -(-1)^{\mu_\nu} \frac{1}{4}, \quad \alpha_\nu = \beta_\nu^2$$

liefert Gleichung (1), in welcher aus den oben erwähnten Gründen der erste Faktor wegzulassen ist,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} J &= \int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} H_{\mu_1}(\beta_1 x) H_{\mu_2}(\beta_2 x) \dots H_{\mu_n}(\beta_n x) x^{\sigma-1} dx \\ &= \frac{1}{2} \lambda^{-\sigma - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\mu_\nu}} \\ &\quad \cdot \Gamma\Big(\frac{2\sigma + n - \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\mu_\nu}}{4}\Big) \prod_{\nu=1}^{n} (h_{\mu_\nu} \beta_\nu^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{\mu_\nu}}) \\ &\quad \cdot F_A\Big(\frac{\sigma}{2} + \frac{n}{4} - \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\mu_\nu};\ \frac{\{\mu_1\} - \mu_1}{2}, \frac{\{\mu_2\} - \mu_2}{2}, \dots, \frac{\{\mu_n\} - \mu_n}{2};\\ &\quad 1 - \frac{1}{2}(-1)^{\mu_1},\ 1 - \frac{1}{2}(-1)^{\mu_2}, \dots, 1 - \frac{1}{2}(-1)^{\mu_n};\ \frac{\beta_1^2}{\lambda^2}, \dots, \frac{\beta_n^2}{\lambda^2}\Big). \end{aligned} \right.$$

Dabei soll $\{\mu_\nu\}$ gleich Null sein, wenn μ_ν gerade, und gleich Eins, wenn μ_ν ungerade ist.

Für $n = 1$, μ gerade, ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} H_\mu(\beta x) x^{\sigma-1} dx = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\mu}{2\left(\frac{\mu}{2}\right)!} \lambda^{-\sigma} \Gamma\Big(\frac{\sigma}{2}\Big) F\Big(\frac{\sigma}{2}, -\frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\beta^2}{\lambda^2}\Big),$$

die erste der beiden Gleichungen (3) von Mayr (l. c.). Ebenso ergibt sich für ungerades μ die zweite. Für $n = 2$ und etwa ν und μ gerade ergibt (2) die erste der vier Gleichungen (10) von Mayr (l. c., S. 600):

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} H_\nu(\alpha x) H_\mu(\beta x) x^{\sigma-1} dx = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{\nu+\mu}{2}} \frac{\nu!}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!} \frac{\mu!}{\left(\frac{\mu}{2}\right)!} \lambda^{-\sigma} \Gamma\Big(\frac{\sigma}{2}\Big)$$

$$\cdot F_2\Big(\frac{\sigma}{2}, -\frac{\nu}{2}, -\frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\alpha^2}{\lambda^2}, \frac{\beta^2}{\lambda^2}\Big).$$

Ebenso kann man die anderen drei Gleichungen für ν bzw. μ, bzw. ν und μ ungerade, ableiten.

Für $n > 2$ waren die entsprechenden Formeln bisher nicht bekannt.

Gleichung (2) kann noch etwas anders geschrieben werden. Unter der Annahme, daß unter den n Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varkappa$ ungerade, $\mu_{\varkappa+1}, \ldots, \mu_n$ gerade sind $(0 \leqq \varkappa \leqq n)$, ergibt sich

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} H_{\mu_1}(\beta_1 x) H_{\mu_2}(\beta_2 x) \ldots H_{\mu_n}(\beta_n x)\, x^{\sigma-1}\, dx \\
&\quad = 2^{\varkappa-1}(-1)^{\frac{\varkappa}{2}+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\mu_\nu} \cdot \frac{\mu_1!}{\left(\frac{\mu_1-1}{2}\right)!} \cdots \frac{\mu_\varkappa!}{\left(\frac{\mu_\varkappa-1}{2}\right)!} \frac{\mu_{\varkappa+1}!}{\left(\frac{\mu_{\varkappa+1}}{2}\right)!} \\
&\quad \ldots \frac{\mu_n!}{\left(\frac{\mu_n}{2}\right)!}\, \Gamma\left(\frac{\sigma+\varkappa}{2}\right) \cdot \lambda^{-\sigma-\varkappa} \cdot \beta_1 \ldots \beta_\varkappa F_A\left(\frac{\sigma+\varkappa}{2};\ \frac{1-\mu_1}{2},\right. \\
&\quad \left. \ldots, \frac{1-\mu_\varkappa}{2}, -\frac{\mu_{\varkappa+1}}{2}, \ldots, -\frac{\mu_n}{2};\ \frac{3}{2}, \ldots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2};\right. \\
&\quad \left. \frac{\beta_1^2}{\lambda^2}, \ldots, \frac{\beta_n^2}{\lambda^2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

An Stelle der n dritten Parameter von F_A: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ist $\varkappa$ mal der Wert $\frac{3}{2}$ und dann noch $n - \varkappa$ mal der Wert $\frac{1}{2}$ zu setzen. Auch diese Formel enthält sämtliche Gleichungen (3) und (10) von Mayr als Sonderfälle für $n = 1$ bzw. $n = 2$.

§ 3.

Integrale mit Laguerreschen Polynomen.

Aus der Definition der allgemeinen Laguerreschen Polynome mittels der erzeugenden Funktion

$$\frac{e^{-\frac{t}{1-t}x}}{(1-t)^{a+1}} = \sum_{r=0}^{\infty} t^r L_r^{(a)}(x)$$

und der Differentialgleichung, welcher diese Polynome genügen:

$$x y'' + (a + 1 - x) y' + r y = 0$$

kann man leicht ableiten, daß

$$L_r^{(a)}(x) = (-1)^r \binom{-a-1}{r} x^{-\frac{a+1}{2}} e^{\frac{x}{2}} M_{r+\frac{a+1}{2},\ \frac{a}{2}}(x)\ ^{13}).$$

---

[13]) In Wh.-W., Kap. XVI sind die Laguerreschen Polynome *nicht* unter den Funktionen aufgezählt, die man durch die konfluente hypergeometrische Funktion ausdrücken kann. Auch sonst ist in der mir bekannten Literatur auf diesen Zusammenhang nirgends hingewiesen. Indessen kommt man auf die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome ganz zwangsläufig, wenn man nach denjenigen Fällen fragt, in welchen in der in Wh.-W., S. 337 gegebenen Darstellung für $M_{k,m}(z)$ die unendliche Reihe abbricht.

Aus dieser Formel und Gleichung (1) ergibt sich

$$J = \int_{\infty}^{(0+)} e^{-\lambda x} L_{r_1}^{(a_1)}(\alpha_1 x) L_{r_2}^{(a_2)}(\alpha_2 x) \dots L_{r_n}^{(a_n)}(\alpha_n x)\, x^{\sigma-1}\, dx$$

$$= (-1)^{\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu} \prod_{\nu=1}^{n} \left[\binom{-a_\nu - 1}{r_\nu} \alpha_\nu^{-\frac{a_\nu+1}{2}} \right]$$

$$\cdot \int_{\infty}^{(0+)} e^{-\left(\lambda - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\right) x}\, x^{\sigma - 1 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+1)}$$

$$\cdot \prod_{\nu=1}^{n} M_{r_\nu + \frac{a_\nu+1}{2}, \frac{a_\nu}{2}}(\alpha_\nu x)\, dx,$$

(4)
$$\left\{ \begin{aligned} J = {} & [e^{2\pi i\sigma} - 1](-1)^{\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu} \binom{-a_1-1}{r_1}\binom{-a_2-1}{r_2} \\ & \dots \binom{-a_n-1}{r_n} \Gamma(\sigma)\, \lambda^{-\sigma} \cdot F_A\Big(\sigma;\ -r_1,\ -r_2,\ \dots,\ -r_n; \\ & a_1+1,\ a_2+1,\ \dots,\ a_n+1;\ \tfrac{\alpha_1}{\lambda},\ \tfrac{\alpha_2}{\lambda},\ \dots,\ \tfrac{\alpha_n}{\lambda}\Big). \end{aligned} \right.$$

Für

$$\Re e\, \sigma > 0, \qquad \Re e\, \lambda > 0$$

ist

(4′)
$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} L_{r_1}^{(a_1)}(\alpha_1 x) L_{r_2}^{(a_2)}(\alpha_2 x) \dots L_{r_n}^{(a_n)}(\alpha_n x)\, x^{\sigma-1}\, dx \\ & = (-1)^{\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu} \binom{-a_1-1}{r_1}\binom{-a_2-1}{r_2} \dots \binom{-a_n-1}{r_n} \Gamma(\sigma)\, \lambda^{-\sigma} \\ & \cdot F_A\Big(\sigma;\ -r_1,\ -r_2,\ \dots,\ -r_n;\ a_1+1,\ a_2+1,\ \dots,\ a_n+1; \\ & \qquad \tfrac{\alpha_1}{\lambda},\ \tfrac{\alpha_2}{\lambda},\ \dots,\ \tfrac{\alpha_n}{\lambda}\Big). \end{aligned} \right.$$

Für $n = 2$ ergibt sich daraus die Gleichung (18) von Mayr. Ebenso wie für $n = 2$ (vgl. die Gleichungen (19), (20), Mayr l. c.) könnte man verschiedene Sonderfälle der Gleichung (4′) diskutieren.

§ 4.

Integrale mit Besselschen Funktionen.

Wenn man den bekannten Zusammenhang zwischen den Besselschen Funktionen und der konfluenten hypergeometrischen Funktion

$$J_p(x) = 2^{-2p-\frac{1}{2}} i^{-p-\frac{1}{2}} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(p+1)} M_{0,p}(2ix)$$

berücksichtigt[14]), so erhält man aus Gleichung (1) für das Integral

$$J = \int_{\infty}^{(0+)} e^{-\lambda x} J_{p_1}(\alpha_1 x) J_{p_2}(\alpha_2 x) \ \dots \ J_{p_n}(\alpha_n x) x^{\sigma-1} dx$$

folgenden Wert:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} J = {} & [e^{2\pi i(\sigma + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu)} - 1] \frac{\Gamma(\sigma + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu)}{\Gamma(p_1+1)\,\Gamma(p_2+1)\ \dots\ \Gamma(p_n+1)} \\ & \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^{p_1} \left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^{p_2} \dots \left(\frac{\alpha_n}{2}\right)^{p_n} \cdot \left(\lambda + i \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\right)^{-\sigma - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu} \\ & \cdot F_A\Big(\sigma + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu;\ p_1 + \tfrac{1}{2},\ p_2 + \tfrac{1}{2},\ \dots,\ p_n + \tfrac{1}{2}; \\ & 2p_1 + 1,\ 2p_2 + 1,\ \dots,\ 2p_n + 1; \\ & \frac{2\alpha_1 i}{\lambda + i\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu},\ \frac{2\alpha_2 i}{\lambda + i\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu},\ \dots,\ \frac{2\alpha_n i}{\lambda + i\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu}\Big)\ ^{15}). \end{aligned} \right.$$

Aus der recht allgemeinen Formel (5) kann man beliebig viele Einzelformeln ableiten, indem man den in ihr vorkommenden Parametern geeignete besondere Werte beilegt und bekannte Eigenschaften der hypergeometrischen Reihen verwendet. Es mögen hier nur zwei Beispiele angeführt werden. Für

$$n = 1, \qquad p = \sigma = \tfrac{1}{2}$$

erhält man unter Berücksichtigung der bekannten Beziehung

$$F(1,\ 1,\ 2,\ z) = \frac{\ln(1-z)}{-z}\ ^{16}),$$

die auch elementar leicht zu beweisende Formel:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\alpha x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \sin \alpha x \frac{dx}{x} = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\lambda}.$$

---

[14]) Vgl. Wh.-W., § 17, 212, S. 360.

[15]) Solche Integrale haben u. a. für den Sonderfall $\lambda = 0$ ausgewertet: Für $n = 1$ Weber [Über einige bestimmte Integrale, Journ. f. Math. 69 (1868), S. 222], für $n = 2$ Schafheitlin [Über die Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral, Math. Ann. 30 (1887), S. 157, vgl. auch Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, S. 193], für $n = 3$ Sonine [Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries, Math. Ann. 16 (1880), S. 1], Macdonald [Note on the evaluation of a certain integral containing Bessel's functions, Proc. London Math. Soc. (2) 7 (1909), S. 142], Mayr [Über bestimmte Integrale mit Besselschen Funktionen, Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Abt. IIa, 142 (1933), S. 1]. Für $\lambda \neq 0$ scheinen aber diese Integrale auch für die niedrigsten Fälle $n = 1,2$ nicht berechnet worden zu sein.

[16]) Vgl. z. B. Wh.-W., S. 280.

Wenn man in Gleichung (5)

$$n = 2, \qquad p_1 = p_2 = p, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \qquad \sigma = 1$$

setzt, so erhält man mit Hilfe der leicht zu beweisenden Beziehung

$$F_2(\alpha, \beta, \beta, \alpha, \alpha, x, x) = F\left(\beta, \beta, \alpha, \frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^{17})$$

für

$$\Re e\,(2p+1) > 0, \qquad \Re e\,\lambda > 0:$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}[J_p(\alpha x)]^2\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)}\alpha^{2p}(\lambda+2\alpha i)^{-2p-1}$$
$$\cdot F\left(p+\tfrac{1}{2}, p+\tfrac{1}{2}, 2p+1, \frac{-4\alpha^2}{(\lambda-\alpha i)^2}\right).$$

Schlußbemerkung.

Durch Spezialisierung von Gleichung (1) kann man Integrale mit beliebigen anderen, als Sonderfall der konfluenten hypergeometrischen Reihe auftretenden Funktionen berechnen. Solche Funktionen sind z. B. die Weberschen Funktionen des parabolischen Zylinders, die unvollständige Gammafunktion, die Fehlerfunktion, der Integralsinus, -cosinus und -logarithmus usw.[18]). Dabei ist zu beachten, daß die Funktion $W_{k,m}(z)$ eine lineare Kombination der Funktionen $M_{k,m}(z)$ und $M_{k,-m}(z)$ ist, wenn $2m$ keine ganze Zahl ist.

Brünn, Mathematisches Seminar der Deutschen Technischen Hochschule.

---

[17]) Vgl. A.-K., S. 35 und 24.

[18]) Vgl. auch Wh.-W., S. 340 f., S. 352 f.

(Eingegangen am 17. Juni 1935.)

Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe II.

Kurven und Torsen des Komplexes.

Von

W. Haack in Berlin.

In der Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe I [1]) wurden die Grundformeln der Differentialgeometrie entwickelt und einige Anwendungen zur Untersuchung der Umgebung II. Ordnung eines Komplexstrahles durchgeführt, die hauptsächlich zur Deutung der Linearformen und Invarianten dienten. Im Anschluß an den letzten Paragraphen jener Arbeit sollen in der vorliegenden Note die Kurven und Torsen des Komplexes untersucht werden. Im § 1 werden die Gleichungen für das begleitende Dreibein, sowie für Krümmung, Torsion und Krümmungsachse einer Komplexkurve abgeleitet. § 2 beginnt mit den Komplexkurven, die sich in einem Punkt des Komplexstrahles berühren. Zwischen Krümmung und Torsion zweier solcher Kurven besteht eine einfache Beziehung, die nur von Größen erster Ordnung des Komplexes abhängt. Es folgt die Untersuchung der ebenen Komplexkurven. Jeder Punkt eines Strahles wird von einer ebenen Kurve des Komplexes berührt. Die Krümmungsmittelpunkte aller dieser ebenen Kurven liegen auf einer Regelfläche vierter Ordnung. Im linearen Komplex entarten sämtliche ebenen Kurven. Daraus erhält man die „natürlichen Gleichungen" des linearen Komplexes.

In § 3 wird eine spezielle Kurvenklasse, die Äquidistanzkurven, untersucht. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die Entfernung des Berührungspunktes mit dem Komplexstrahl vom zugehörigen Zentralpunkt längs der Kurve konstant ist. Die Krümmungsachsen der einen Strahl $\mathfrak{A}$ berührenden Äquidistanzkurven erzeugen ein Paraboloid.

Der deutschen Forschungsgemeinschaft, die mir die Durchführung der Arbeit ermöglichte, sei auch an dieser Stelle aufrichtiger Dank ausgesprochen.

§ 1.

Es sei auf Grund der Definition (I § 1) ein Komplex $\mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3)$ gegeben. $\mathfrak{H}$ sei die Haupt- und $\mathfrak{B}$ die Binormale des Komplexstrahles; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ schneiden sich im Zentralpunkt $\mathfrak{x}$ senkrecht. Nehmen wir die

[1]) Math. Zeitschr. 40 (1935), S. 560—581, im folgenden zitiert durch I.

Parameter u^1, u^2, u^3 als Funktionen eines beliebigen Parameters t an, so daß in

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \alpha\mathfrak{A}_1 + \beta\mathfrak{A}_2 + \gamma\mathfrak{A}_3 \tag{1}$$

α, β, γ der Bedingung genügen

$$2k(\beta^2 + \gamma^2) + \alpha\gamma = 0, \tag{2}$$

dann beschreibt $\mathfrak{A}(t)$ eine Torse des Komplexes (I § 4 (8)), deren Rückkehrkante eine Komplexkurve ist. Zur Veranschaulichung betrachten wir irgendeinen Punkt $\mathfrak{z}$ des Strahles $\mathfrak{A}$. Er ist die Spitze eines Kegels, dessen Erzeugenden dem Komplex angehören. Die Tangentenebene des Kegels wird nach der Formel von Koenigs (I § 4 (12a))

$$\bar{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi = -k \tag{3}$$

bestimmt, dabei bedeutet $\bar{\varphi}$ den Abstand des Punktes $\mathfrak{z}$ vom Zentralpunkt, k den Hauptdrall des Komplexes in $\mathfrak{A}$ und φ den Winkel, den die Tangentenebene des Kegels mit der Hauptnormalen $\mathfrak{H}$ einschließt. Alle Torsen des Komplexes, die den Punkt $\mathfrak{z}$ als Rückkehrpunkt besitzen, berühren den Kegel. Die Rückkehrkanten dieser Torsen berühren in $\mathfrak{z}$ den Strahl $\mathfrak{A}$ und besitzen daher, wie schon Lie gezeigt hat[2]), sämtlich dieselbe Schmiegebene.

Zur Berechnung von Krümmung und Windung einer Komplexkurve bestimmen wir zunächst die Hauptnormale $\mathfrak{N}$ und die Binormale $\mathfrak{R}$ der Kurve sowie die Ableitung $\mathfrak{N}'$ der Hauptnormalen. Als Parameter wählen wir die Bogenlänge s des sphärischen Bildes der zugehörigen Torse. Dann ist nach I § 4 (5)

$$\beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{4}$$

und wegen (2)

$$2k + \alpha\gamma = 0. \tag{2a}$$

Die Gerade

$$\mathfrak{N} = \alpha\mathfrak{A}_1 + \beta\mathfrak{A}_2 + \gamma\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}'$$

ist die Hauptnormale der Komplexkurve (I § 4). Bezogen auf das begleitende Dreibein des Komplexstrahles erhält man nach I § 3 (17)

$$\mathfrak{N} = \beta(1 + \varepsilon k)\mathfrak{H} + [\varepsilon\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma(1 + \varepsilon k)]\mathfrak{B}. \tag{5}$$

Die Binormale $\mathfrak{R}$ der Komplexkurve schneidet $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$ senkrecht. Daraus folgt

$$\mathfrak{R} = [\varepsilon\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma(1 + \varepsilon k)]\mathfrak{H} - \beta(1 + \varepsilon k)\mathfrak{B}, \tag{6}$$

denn dann ist

$$\mathfrak{R}\mathfrak{R} = 1; \quad \mathfrak{R}\mathfrak{A} = \mathfrak{R}\mathfrak{N} = 0.$$

[2]) Geometrie der Berührungstransformationen, S. 303 (1896).

Durch Differentiation von $\mathfrak{N}$ nach s erhält man auf Grund der Ableitungsgleichungen (I § 3 (17))

$$\mathfrak{N}' = \alpha\,\mathfrak{N}_1 + \beta\,\mathfrak{N}_2 + \gamma\,\mathfrak{N}_3,$$

$$\begin{aligned}(7)\quad \mathfrak{N}' = {} & \mathfrak{A}\{-\beta^2(1+\varepsilon k)^2 - \varepsilon\alpha\gamma - \gamma^2(1+\varepsilon k)^2\} \\ & + \mathfrak{H}\{\beta'(1+\varepsilon k) + \varepsilon\beta k' + [\varepsilon\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma(1+\varepsilon k)](\alpha A + \beta B + \gamma C)\} \\ & + \mathfrak{B}\{\varepsilon\tfrac{1}{2}\alpha' + \gamma'(1+\varepsilon k) + \varepsilon\gamma k' + \beta(1+\varepsilon k)(-\alpha A - \beta B - \gamma C)\}.\end{aligned}$$

Der Koeffizient von $\mathfrak{A}$ wird wegen (4) und (2a) gleich -1. Der duale Vektor $\mathfrak{N}'$ läßt sich linear aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$ kombinieren. Wegen $\mathfrak{N}\,\mathfrak{N} = 1$ ist $\mathfrak{N}\,\mathfrak{N}' = 0$. Also wird $\mathfrak{N}'$ die Gestalt haben

$$(8)\qquad \mathfrak{N}' = -\mathfrak{A} + T\,\mathfrak{R}.$$

Jetzt ist die duale Invariante T der Torse bzw. der Kurve zu bestimmen. Die in (7) auftretende Kombination aus $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ ist auf die Form $T\,\mathfrak{R}$ zu bringen. Aus (5) folgt durch Quadrieren

$$\beta^2(1+\varepsilon k)^2 + [\varepsilon\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma(1+\varepsilon k)]^2 = 1$$

und daraus durch differenzieren, wenn wir zur Abkürzung

$$\alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3 = k'$$

setzen:

$$\beta(1+\varepsilon k)[\beta'(1+\varepsilon k) + \beta\varepsilon k'] + [\varepsilon\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma(1+\varepsilon k)][\varepsilon(\tfrac{1}{2}\alpha' + \gamma k') + (1+\varepsilon k)\gamma'] = 0.$$

Demnach wird der in (7) auftretende Ausdruck

$$\begin{aligned}&[\beta'(1+\varepsilon k) + \varepsilon\beta k']\,\mathfrak{H} + [\varepsilon\tfrac{1}{2}\alpha' + \gamma'(1+\varepsilon k) + \varepsilon\gamma k']\,\mathfrak{B} \\ &\qquad = \frac{\beta'(1+\varepsilon k) + \varepsilon\beta k'}{\gamma + \varepsilon(\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma k)}\,\mathfrak{R}.\end{aligned}$$

Dann erhält man aus (7) und (8) unmittelbar

$$(9)\qquad T = t + \varepsilon\bar{t} = \frac{\beta'(1+\varepsilon k) + \varepsilon\beta k'}{\gamma + \varepsilon(\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma k)} + \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

Den in T stehenden dualen Bruch kann man vereinfachen:

$$(10)\qquad \frac{\beta'(1+\varepsilon k) + \varepsilon\beta k'}{\gamma + \varepsilon(\tfrac{1}{2}\alpha + \gamma k)} = \frac{\beta'}{\gamma} + \varepsilon\left(\frac{\beta}{\gamma}k' - \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta'}{\gamma^2}\right).$$

Der Abstand des auf $\mathfrak{A}$ gelegenen Kurvenpunktes $\mathfrak{z}$ vom Zentralpunkt auf $\mathfrak{A}$ ist $\bar{\varphi}$. Längs der Komplexkurve ist $\bar{\varphi}$ eine Funktion des Parameters s. An Stelle von α, β, γ, β' führen wir $\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}'$ in T ein. Nach der Formel von Koenigs (I § 4 (11), (12a)) wird

$$(11)\qquad \bar{\varphi}\cdot\frac{\gamma}{\beta} = -k.$$

Daraus folgt wegen (4) und (2a)

$$(12)\qquad \alpha = 2\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2},\quad \gamma = \frac{-k}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}},\quad \beta = \frac{\bar{\varphi}}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}}.$$

und durch Differentiation

$$\frac{\beta'}{\gamma} = \frac{\bar{\varphi}\,k' - \bar{\varphi}'\,k}{\bar{\varphi}^2 + k^2}. \tag{12a}$$

Setzt man diese Werte in (9) ein und beachtet (10), so erhält man nach Trennung von Real- und Dualteil

$$T = \frac{\bar{\varphi}\,k' - \bar{\varphi}'\,k}{\bar{\varphi}^2 + k^2} + \alpha\,a + \beta\,b + \gamma\,c + \varepsilon(-\bar{\varphi}' + \alpha\,\bar{a} + \beta\,\bar{b} + \gamma\,\bar{c}). \tag{13}$$

Dabei gelten für α, β, γ die Werte (12). Aus T entnimmt man sofort die *Krümmung* $\frac{1}{\varrho}$ und die *Torsion* $\frac{1}{\tau}$ der Komplexkurve. Es ist nämlich[3]):

$$\boxed{\begin{aligned} \varrho = \bar{t} &= -\varphi' + \frac{2\,\bar{a}\,(\bar{\varphi}^2 + k^2) + \bar{\varphi}\,\bar{b} - k\,\bar{c}}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}}, \\ \frac{\varrho}{\tau} = t &= \frac{\bar{\varphi}\,k' - \bar{\varphi}'\,k}{\bar{\varphi}^2 + k^2} + \frac{2\,a\,(\bar{\varphi}^2 + k^2) + \bar{\varphi}\,b - k\,c}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}}. \end{aligned}} \tag{14}$$

Der duale Vektor der Krümmungsachse der Komplexkurve läßt sich jetzt leicht angeben. Da die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{R}$ das begleitende Dreibein der Kurve sind, ist die Krümmungsachse $\mathfrak{K}$ parallel zu $\mathfrak{R}$ und senkrecht zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$. Sie schneidet $\mathfrak{N}$ und hat von $\mathfrak{A}$ den Abstand ϱ. Daher werden die Skalarprodukte

$$\mathfrak{K}\,\mathfrak{A} = -\varepsilon\,\varrho, \quad \mathfrak{K}\,\mathfrak{N} = 0, \quad \mathfrak{K}\,\mathfrak{R} = 1.$$

Dann erhält man $\mathfrak{K}$ als Linearkombination aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{K} = -\varepsilon\,\varrho\,\mathfrak{A} + \mathfrak{R}.$$

Setzt man für $\mathfrak{R}$ den Wert aus (6) ein, so erhält man die *Krümmungsachse einer Komplexkurve* bezogen auf das Dreibein des Komplexes

$$\boxed{\mathfrak{K} = -\varepsilon\,\varrho\,\mathfrak{A} + [\gamma + \varepsilon\,(\tfrac{1}{2}\,\alpha + \gamma\,k)]\,\mathfrak{H} - \beta\,(1 + \varepsilon\,k)\,\mathfrak{B},} \tag{15}$$

dabei sind für α, β, γ nach (12) die Werte in $\bar{\varphi}$ einzusetzen.

§ 2.

I. Aus den Gleichungen (13), (14), (15) lassen sich einige allgemeine Sätze ableiten. Zwischen Krümmung und Torsion der Komplexkurven, die ein Linienelement gemeinsam haben, die sich also in einem Punkt $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{A}$ berühren, muß eine Beziehung bestehen, die man als ein Analogon zum *Satz von Meusnier* der Flächentheorie ansprechen kann. Der gemeinsame Berührungspunkt $\mathfrak{z}$ wird durch einen bestimmten Wert $\bar{\varphi}$ gegeben. Die Kurven unterscheiden sich durch verschiedene Werte von $\bar{\varphi}'$. Wir

[3]) Vgl. etwa: W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie Bd. I, 3. Aufl. 1930, S. 273.

betrachten irgendzwei Komplexkurven im gemeinsamen Berührungspunkt 3. Ihnen mögen die Werte $\bar{\varphi}_1'$ und $\bar{\varphi}_2'$ entsprechen. Dann folgt aus (13), wenn man die Größen der einen Kurve mit dem Index 1, die der anderen mit 2 kennzeichnet:

$$t_1 - t_2 = (\bar{\varphi}_2' - \bar{\varphi}_1') \frac{k}{\bar{\varphi}^2 + k^2}; \quad \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \bar{\varphi}_2' - \bar{\varphi}_1'$$

und daraus

$$t_1 - t_2 = \frac{k}{\bar{\varphi}^2 + k^2} (\bar{t}_1 - \bar{t}_2).$$

Nach (14) kann man hier für t, $\bar{t}$ Krümmung und Torsion der Kurven einführen; dann erhält man den

Satz 1: *Zwischen den Krümmungen und Windungen* $\frac{1}{\varrho_1}$, $\frac{1}{\varrho_2}$ und $\frac{1}{\tau_1}$, $\frac{1}{\tau_2}$ *zweier sich in einem Punkt von* $\mathfrak{A}$ *berührenden Komplexkurven besteht die nur von Größen I. Ordnung des Komplexes abhängende Beziehung*

$$(16) \qquad (\varrho_1 - \varrho_2) = \frac{\bar{\varphi}^2 + k^2}{k} \left(\frac{\varrho_1}{\tau_1} - \frac{\varrho_2}{\tau_2} \right).$$

Dabei ist k der Hauptdrall des Komplexes in $\mathfrak{A}$ und $\bar{\varphi}$ die Entfernung des gemeinsamen Berührungspunktes vom Zentralpunkt.

II. Ebene Komplexkurven. Unter den Komplexkurven, die den Strahl $\mathfrak{A}$ im Punkt 3 berühren, gibt es eine ebene Kurve. Wird der Punkt 3 wieder durch einen bestimmten Wert von $\bar{\varphi}$ festgelegt, so erhält man den Krümmungsradius ϱ_e der ebenen Komplexkurve folgendermaßen: Aus $\frac{1}{\tau} = 0$ folgt nach (14)

$$\bar{\varphi}' = \frac{\bar{\varphi} k'}{k} + \frac{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}}{k} [2a(\bar{\varphi}^2 + k^2) + b\bar{\varphi} - kc].$$

Setzt man diesen Wert für $\bar{\varphi}'$ in die erste Gleichung (14) ein und beachtet die Abkürzung k', so erhält man

$$(17) \qquad \varrho_e \sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2} = -\frac{2a}{k}\bar{\varphi}^4 - \frac{2k_1 + b}{k}\bar{\varphi}^3 + \left(2\bar{a} - 4ak + c - \frac{k_2}{k}\right)\bar{\varphi}^2$$
$$+ (k_3 + \bar{b} - 2kk_1 - kb)\bar{\varphi} - 2ak^3 + 2\bar{a}k^2 + ck^2 - \bar{c}k$$

oder, wenn man nach I § 3 (21) zu den Invarianten p, q, r des Komplexes übergeht

$$(17\,a) \qquad \varrho_e \sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2} = \frac{2q}{k}\bar{\varphi}^4 - \frac{4k_1}{k}\bar{\varphi}^3 + \left(4kq - 2p - \frac{k_2}{k}\right)\bar{\varphi}^2$$
$$+ (2k_3 - 4kk_1)\bar{\varphi} + 2k^3 q - 2k^3 p - kc.$$

Diese Gleichung läßt sich geometrisch deuten: Die Ebene der Kurve schließt nach der Formel von Koenigs mit der Hauptnormalen $\mathfrak{H}$ des Komplexstrahles den Winkel φ ein, der bestimmt ist durch

$$\sin\varphi = \gamma = \frac{-k}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}}.$$

Die Krümmungsachse der ebenen Kurve ist daher gegen die zu $\mathfrak{H}$ senkrechte Ebene durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die wir *Zentralebene* nennen wollen, unter dem Winkel φ geneigt. Der Schnittpunkt der Krümmungsachse mit dieser Ebene hat von $\mathfrak{A}$ den Abstand

$$y = + \varrho_e \cdot \frac{1}{\sin \varphi} = - \varrho_e \cdot \frac{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}}{k}.$$

Dividiert man in (17) beide Seiten durch k, so wird die linke Seite gleich $-y$, und man erhält als Deutung von (17) den

Satz 2. *Die Krümmungsachsen der den Strahl $\mathfrak{A}$ berührenden ebenen Komplexkurven schneiden die Zentralebene des Komplexstrahles $\mathfrak{A}$ in einer Kurve vierter Ordnung.*

Jetzt liegt die Vermutung nahe, daß die Krümmungsachsen der ebenen Komplexkurven, die $\mathfrak{A}$ berühren, eine Regelfläche vierter Ordnung erzeugen. Das läßt sich leicht beweisen: Nach (17), (15) und (12) werden die Krümmungsachsen der ebenen Kurven gegeben durch

$$\mathfrak{R}_e = - \varepsilon \varrho_e \mathfrak{A} + \frac{-k + \varepsilon \bar{\varphi}^2}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}} \mathfrak{H} - \frac{\bar{\varphi}(1 + \varepsilon k)}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}} \mathfrak{B}. \tag{18}$$

Diese Geraden erzeugen eine durch den Parameter $\bar{\varphi}$ dargestellte algebraische Regelfläche. Um die Ordnung der Fläche festzustellen, bestimmen wir die Anzahl der Erzeugenden $\mathfrak{R}_e$, die von einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ geschnitten werden. Die Gerade $\mathfrak{G}$ kann man schreiben

$$\mathfrak{G} = X \mathfrak{A} + Y \mathfrak{H} + Z \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{G}\,\mathfrak{G} = 1,$$

dabei sind X, Y, Z beliebige duale Zahlen. Für das Skalarprodukt $(\mathfrak{R}_e\,\mathfrak{G})$ erhält man

$$\mathfrak{R}_e\,\mathfrak{G} = - \varepsilon \varrho_e X + \frac{-k + \varepsilon \bar{\varphi}^2}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}} Y - \frac{\bar{\varphi}(1 + \varepsilon k)}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}} Z.$$

Soll $\mathfrak{G}$ die Gerade $\mathfrak{R}_e$ schneiden, so muß der Dualteil von $(\mathfrak{R}_e\,\mathfrak{G})$ verschwinden. Dann wird die Schnittbedingung

$$- \varrho_e \sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}\, x - k \bar{y} + \bar{\varphi}^2 y - \bar{\varphi} \bar{z} - \bar{\varphi} k z = 0.$$

Das ist nach (17) für beliebige X, Y, Z eine Gleichung vierten Grades in $\bar{\varphi}$. Es gibt also im Allgemeinen vier Erzeugende $\mathfrak{R}_e$, die von einer beliebigen Geraden geschnitten werden. Das Ergebnis gibt den

Satz 3. *Die Krümmungsachsen der ebenen Komplexkurven, die den Strahl $\mathfrak{A}$ eines allgemeinen Komplexes berühren, sind die Erzeugenden einer Regelfläche vierter Ordnung.*

III. Sätze von Voss und Demoulin. Aus Gleichung (17) folgt, daß es im allgemeinen vier Punkte auf einem Strahl $\mathfrak{A}$ gibt, in denen ϱ_e verschwindet. Die ebenen Komplexkurven, die $\mathfrak{A}$ in diesen Punkten berühren, haben also hier eine Spitze. Da die Komplexkurven Rückkehr-

kanten der Torsen sind, und da für $\varrho = 0$ diese Torsen in Kegel übergehen, folgt, daß die vier Punkte von $\mathfrak{A}$, in denen ϱ_e verschwindet, die Spitzen von Komplexkegeln sind, die in $\mathfrak{A}$ eine Wendeerzeugende haben. Es gilt daher der

Satz von Voss. *In einem allgemeinen Komplex gibt es auf jedem Strahl $\mathfrak{A}$ vier Punkte, deren Komplexkegel den Strahl $\mathfrak{A}$ als Wendeerzeugende besitzen*[4]).

Der Satz 1 kann auf eine andere Form gebracht werden, wenn man den Krümmungsradius der ebenen Komplexkurven heranzieht. Während Satz 1 die Beziehung zwischen den Krümmungen und Windungen zweier sich berührenden Komplexkurven darstellt, sind auch Krümmung und Windung einer einzelnen Komplexkurve nicht voneinander unabhängig. Wählt man in (16) als zweite Kurve die ebene Komplexkurve, so erhält man

$$\varrho_1 - \varrho_e = \frac{\bar{\varphi}^2 + k^2}{k} \frac{\varrho_1}{\tau_1}.$$

Dabei ist ϱ_e nach (17) eine nur von den Invarianten des Komplexes und der Lage des Berührungspunktes $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{A}$ abhängende Größe. Es gilt also der

Satz 4. *Zwischen der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und Torsion $\frac{1}{\tau}$ einer den Strahl $\mathfrak{A}$ im Punkt $\mathfrak{z}$ berührenden Komplexkurve besteht die lineare Gleichung*

$$1 - \frac{\varrho_e}{\varrho} = \frac{\bar{\varphi}^2 + k^2}{k} \cdot \frac{1}{\tau}, \tag{19}$$

dabei ist ϱ_e der Krümmungsradius der $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{z}$ berührenden ebenen Kurve des Komplexes.

Schon Demoulin hat gezeigt, daß zwischen Krümmung und Windung einer Komplexkurve eine lineare Gleichung besteht[5]), ohne aber die Koeffizienten der Gleichung geometrisch zu deuten. Satz 4 ist daher eine Vervollständigung des Satzes von Demoulin.

IV. Der lineare Komplex. Sind in (17) die fünf Koeffizienten der Potenzen von $\bar{\varphi}$ gleich Null, so muß nach den Überlegungen des vorletzten Abschnittes der Strahl $\mathfrak{A}$ Wendeerzeugende aller Komplexkegel sein, die durch $\mathfrak{A}$ gehen. Verschwinden die Koeffizienten identisch im ganzen Komplex, so arten sämtliche Kegel in Strahlenbüschel aus, und der Komplex ist dann ein linearer Komplex. Durch Nullsetzen der fünf Koeffizienten erhält man den

---

[4]) A. Voss. Über Komplexe und Kongruenzen. Math. Annalen 9 (1876), S. 63. Der Satz wird von Voss für algebraische Komplexe bewiesen.

[5]) Comptes rendus 124 (1897), S. 1077.

Satz 5. *Erfüllen die Invarianten überall im Komplex die fünf Gleichungen*

$$q = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_3 = 0, \quad p = -\frac{1}{2}\frac{k_2}{k}, \quad r = 4k_2, \tag{20}$$

dann ist der Komplex ein linearer Komplex.

Zwischen den Invarianten und ihren invarianten Ableitungen bestehen drei duale Integrabilitätsbedingungen (I, § 3 (22)). Für den linearen Komplex führen diese zu den drei Gleichungen

$$k_{21} = 0, \quad k_{23} = 0, \quad \left(\frac{k_2}{2k}\right)_2 - \left(\frac{k_2}{2k}\right)^2 - 1 = 0. \tag{21}$$

Die ersten beiden Gleichungen sagen aus, daß die einzige Invariante k des linearen Komplexes Funktion nur eines Parameters ist, nämlich der Bogenlänge s des sphärischen Bildes der Zentralfläche. Die dritte Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung II. Ordnung für $k(s)$, deren allgemeine Lösung ist

$$k = \frac{\varkappa}{\cos^2(s + \bar{s})}, \tag{22}$$

dabei ist die zweite Integrationskonstante $\bar{s}$ unwesentlich und kann gleich Null angenommen werden.

Die Ableitungsgleichungen (I, § 3 (17)) nehmen für den linearen Komplex eine sehr einfache Gestalt an. Ohne die Rechnungen im einzelnen anzugeben, mögen noch einige geometrische Größen des linearen Komplexes bestimmt werden: Die Gesamtheit der Binormalen $\mathfrak{B}$ entartet in eine lineare Kongruenz, deren Strahlen eine feste Gerade, die Komplexachse, senkrecht schneiden. Die Binormale ist also die gemeinsame Senkrechte des Komplexstrahles $\mathfrak{A}$ und der Achse. Daraus kann man den dualen Vektor der *Komplexachse* $\mathfrak{Z}$ berechnen. Man erhält

$$\mathfrak{Z} = (\sin s + \varepsilon\varkappa \sin s)\,\mathfrak{A} + (\cos s - \varepsilon\varkappa \operatorname{tg} s \cdot \sin s)\,\mathfrak{H}. \tag{23}$$

Bildet man das Skalarprodukt

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{H} = \cos s - \varepsilon\varkappa \operatorname{tg} s \cdot \sin s,$$

so erkennt man: s ist der Winkel, den die Hauptnormale mit der Komplexachse bildet, und $\varkappa \cdot \operatorname{tg} s$ ist der Abstand der Hauptnormalen bzw. des Zentralpunktes von der Achse. Für $s = 0$ geht die Hauptnormale in die Achse über und der Hauptdrall k wird gleich $\varkappa$, d. h. gleich der algebraischen Invarianten des linearen Komplexes.

Es sei noch erwähnt: Eine Zentralfläche des linearen Komplexes besteht aus den Komplexgeraden, die eine Binormale senkrecht schneiden. Die Zentralkurven sind die Schraubenlinien des Komplexes.

§ 3.

In derselben Weise wie die ebenen Komplexkurven kann man eine andere Kurvenklasse des Komplexes untersuchen, die *Äquidistanzkurven*:

Beschreibt $\mathfrak{A}$ eine Torse, so erzeugt der Zentralpunkt von $\mathfrak{A}$ eine Kurve, die auf der Torse liegt. Ist nun der Abschnitt auf $\mathfrak{A}$ zwischen dem Berührungspunkt der Rückkehrkante und dem zugehörigen Zentralpunkt längs der Torse konstant, so soll die Rückehrkante eine Äquidistanzkurve des Komplexes heißen. Diese Kurven werden durch $\bar{\varphi}' = 0$ gekennzeichnet. Jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ wird von einer Äquidistanzkurve berührt. Die durch den Zentralpunkt gehende Äquidistanzkurve ist die Zentralkurve (I, § 7). Für den Krümmungsradius der Äquidistanzkurve, die $\mathfrak{A}$ im Abstand $\bar{\varphi}$ vom Zentralpunkt berührt, erhält man aus (14)

$$\varrho\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2} = 2\bar{a}\,(\bar{\varphi}^2 + k^2) + \bar{b}\,\bar{\varphi} - k\bar{c}. \tag{24}$$

Setzt man diesen Wert in (15) ein und beachtet (12), so folgt für die Krümmungsachsen der den Strahl $\mathfrak{A}$ berührenden Äquidistanzkurven

$$\mathfrak{K} = \frac{\bar{\varphi}^2}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}}[-\varepsilon\,2\bar{a}\,\mathfrak{A} + \varepsilon\,\mathfrak{H}] + \frac{\bar{\varphi}}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}}[-\varepsilon\,\bar{b}\,\mathfrak{A} - (1 + \varepsilon\,k)\,\mathfrak{B}] \tag{25}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\bar{\varphi}^2 + k^2}}[\varepsilon\,(k\,\bar{c} - 2\,\bar{a}\,k)\,\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{H}].$$

Die drei Klammern kann man als duale Vektoren dreier linearen Komplexe deuten. Dann sind die Krümmungsachsen die in dem Komplexbündel dieser drei Komplexe enthaltenen ausgearteten Komplexe, sie bilden also einen Regulus. Es gilt daher der

Satz 6. *Die Krümmungsachsen der den Strahl $\mathfrak{A}$ berührenden Aquidistanzkurven bilden die eine Schar von Erzeugenden eines Paraboloides.*

Um die Lage des Paraboloides in bezug auf die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ zu bestimmen, sollen der Scheitelpunkt und die Achse berechnet werden. Die Erzeugenden $\mathfrak{K}$ des Paraboloides sind zu $\mathfrak{A}$ senkrecht; damit ist die Richtung der einen Leitebene bekannt. Die zweite Leitebene folgt aus der Richtung der zweiten Schar von Erzeugenden. Ist

$$\mathfrak{G} = X\mathfrak{A} + Y\mathfrak{H} + Z\mathfrak{B}; \quad \mathfrak{G}\,\mathfrak{G} = 1$$

eine Erzeugende der zweiten Schar, so muß der Dualteil von $(\mathfrak{G}\,\mathfrak{K})$ identisch in $\bar{\varphi}$ verschwinden. Denn jede Erzeugende der einen Schar schneidet jede der anderen. Man erhält für X, Y, Z die drei Gleichungen

$$y - 2\bar{a}\,x = 0,$$

$$k\,z + \bar{z} + \bar{b}\,x = 0,$$

$$k\,\bar{y} + (2\bar{a}\,k^2 - \bar{c}\,k)\,x = 0,$$

dabei ist

$$X = x + \varepsilon\,\bar{x}, \quad Y = y + \varepsilon\,\bar{y}, \quad Z = z + \varepsilon\,\bar{z}.$$

Nur die erste Gleichung gibt eine Bedingung für die Richtung von $\mathfrak{G}$. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erhält man für das sphärische Bild von $\mathfrak{G}$

$$\mathfrak{g} = x\,(\mathfrak{a} + 2\bar{a}\,\mathfrak{b}) + \sqrt{1 - x^2(1 + 4\,\bar{a}^2)}\;\mathfrak{b}. \tag{26}$$

Dann ist x der Parameter der zweiten Schar von Erzeugenden. Aus der letzten Gleichung erkennt man, daß die Leitebene, zu der diese Erzeugenden parallel sind, durch $\mathfrak{B}$ geht und gegen $\mathfrak{A}$ unter dem Winkel ϑ geneigt ist, für den gilt

$$\operatorname{tg}\vartheta = 2\bar{a} = -p. \tag{27}$$

Die Achse des Paraboloides ist zur Schnittgeraden der beiden Leitebenen parallel; die Achsenrichtung wird also durch die Binormale $\mathfrak{B}$ des Komplexstrahles gegeben. Zur Bestimmung der Achse und des Scheitelpunktes berechnen wir diejenige Kehlpunktsnormale des Paraboloides, die parallel zu $\mathfrak{B}$ ist. Die Erzeugende $\mathfrak{K}$, die durch den Scheitelpunkt geht, ist zu $\mathfrak{B}$ senkrecht. Das ist nach (25) nur der Fall, wenn $\bar{\varphi} = 0$. Die Achse des Paraboloides ist dann die Kehlpunktsnormale für den Wert $\bar{\varphi} = 0$. Es wird

$$\mathfrak{K}' = \frac{d\,\mathfrak{K}}{d\,\bar{\varphi}}\Big|_{\bar{\varphi}=0} = -\frac{1}{k}\,[\varepsilon\bar{b}\,\mathfrak{A} + (1+\varepsilon k)\,\mathfrak{B}];$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{K}'\,\mathfrak{K}'}} = k(1-\varepsilon k).$$

Daher ist

$$\frac{\mathfrak{K}'}{\sqrt{\mathfrak{K}'\,\mathfrak{K}'}} = -\varepsilon\bar{b}\,\mathfrak{A} - \mathfrak{B} \tag{28}$$

die *Achse des Paraboloides.* Sie hat von $\mathfrak{B}$ den Abstand b und liegt in der durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ aufgespannten Ebene. Der *Scheitelpunkt*, als Schnittgerade der Achse mit der zu $\bar{\varphi} = 0$ gehörenden Erzeugenden $\mathfrak{K}$ hat in bezug auf $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ die Koordinaten

$$2\bar{a}\,k - \bar{c} \quad \text{und} \quad \bar{b}. \tag{29}$$

Der reziproke Drall des Paraboloides im Scheitelpunkt ist gleich dem Hauptdrall k des Komplexes.

Damit ist eine neue Deutung der Invarianten k, $\bar{b} = k_3$ und p gewonnen. Vergleicht man noch (27) mit I § 7 (5), so folgt der

Satz 7. *Die zweite Leitebene des Paraboloides ist parallel zur Tangente derjenigen Kurve, die der Zentralpunkt beschreibt, wenn sich der Strahl $\mathfrak{A}$ auf dem Zylinder bewegt.*

(Eingegangen am 2. Juli 1935.)

Der Primdivisorsatz für algebraische Funktionenkörper über einem endlichen Konstantenkörper.

Von

Hans Reichardt in Jena.

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über einem Konstantenkörper von q Elementen, und g sei sein Geschlecht. Für den hyperelliptischen Fall hat zuerst Artin[1]) den Primdivisorsatz — das Analogon zum Primidealsatz der algebraischen Zahlentheorie — bewiesen, und ebenso für die Primdivisoren einer arithmetischen Progression im Fall $g = 0$. Die neuere Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionenkörper[2]) gestattet es nun, in äußerst einfacher Weise den Primdivisorsatz in folgender allgemeiner Form zu beweisen.

Es sei Λ eine separable galoissche Erweiterung n-ten Grades von K. Mit $M_{\mathfrak{C}}$ bezeichne ich die Menge der Primdivisoren von K, die in Λ unverzweigt sind und denen durch den Frobenius-Automorphismus die Klasse $\mathfrak{C}$ konjugierter Elemente der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von Λ/K zugeordnet ist. Für die Anzahl $N_\nu(M_{\mathfrak{C}})$ der Primdivisoren ν-ten Grades aus $M_{\mathfrak{C}}$ gilt dann, wenn $n_{\mathfrak{C}}$ die Zahl der Elemente von $\mathfrak{C}$ ist, asymptotisch in ν:

$$N_\nu(M_{\mathfrak{C}}) = \frac{n_{\mathfrak{C}}}{n} \cdot \frac{q^\nu}{\nu} + O\left(\frac{q^{\Theta\nu}}{\nu}\right).$$

Dabei ist Θ das Maximum der Realteile der Nullstellen der Zetafunktion von Λ, also $\frac{1}{2} \leqq \Theta < 1$. (Sind keine Nullstellen vorhanden, ist also Λ rationaler Funktionenkörper, so setze ich $\Theta = \frac{1}{2}$.)

Nimmt man $\Lambda = \mathsf{K}$, so erhält man den Primdivisorsatz für K. Nimmt man Λ abelsch über K, so erhält man nach dem Reziprozitätsgesetz[3]) und Existenzsatz[4]) der Klassenkörpertheorie den Primdivisorsatz für die allgemeine arithmetische Progression in K. Speziell ergibt sich dann noch, daß es in jeder Strahlklasse nach einem beliebigen Modul stets Primdivisoren ν-ten Grades für alle genügend großen ν gibt.

---

[1]) E. Artin, Quadratische Körper im Gebiete der höheren Kongruenzen, I, II. Math. Zeitschr. 19 (1924).

[2]) Eine zusammenfassende Darstellung gibt H. Hasse, Über die Kongruenzzetafunktionen, Sitz.-Ber. d. Pr. Akad. d. Wiss. XVII (1934).

[3]) H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper. Crelles Journ. 172 (1934).

[4]) E. Witt, Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper. Crelles Journ. 172 (1934).

1.

Ich betrachte zunächst den Fall $g = 0$. Die Zetafunktion ist definiert durch

$$\zeta_0(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{a}^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}^s}} \quad \text{für } \Re(s) > 1,$$

wobei die Summe über alle ganzen Divisoren $\mathfrak{a}$ und das Produkt über alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K zu erstrecken ist und $\mathfrak{N}\mathfrak{a}$ die Restklassenzahl mod. $\mathfrak{a}$ bedeutet. Daraus folgt

$$\frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)} = \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{-\log \mathfrak{N}\mathfrak{p}}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\nu s}} \quad \text{für } \Re(s) > 1.$$

Bezeichnet n_ν die Zahl der Primdivisoren ν-ten Grades von K, so ist

$$\frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} n_\varkappa \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{-\varkappa \log q}{q^{\varkappa\nu s}}$$

$$= -\log q \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\nu s}} \sum_{\varkappa|\nu} \varkappa n_\varkappa. \tag{1}$$

Nun ist andererseits

$$\zeta_0(s) = \frac{1}{1 - \frac{q}{q^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q^s}}$$

also

$$\frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)} = -\log q \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu + 1}{q^{\nu s}} \quad \text{für } \Re(s) > 1. \tag{2}$$

Koeffizientenvergleich zwischen (1) und (2) ergibt

$$\sum_{\varkappa|\nu} \varkappa n_\varkappa = q^\nu + 1,$$

also, wenn $\mu(\varkappa)$ die Moebiussche Funktion bedeutet,

$$n_\nu = \frac{1}{\nu} \sum_{\varkappa|\nu} (q^\varkappa + 1)\, \mu\left(\frac{\nu}{\varkappa}\right) = \begin{cases} q + 1 & \text{für } \nu = 1, \\ \frac{1}{\nu} \sum_{\varkappa|\nu} q^\varkappa \mu\left(\frac{\nu}{\varkappa}\right) & \text{für } \nu > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Diese Formel steht natürlich schon bei Dedekind[5]); sie wurde der Vollständigkeit halber hier noch einmal abgeleitet in der Art, wie es nachher im allgemeinen Fall geschehen wird. — Aus (3) folgt für $\nu > 1$, indem ich das Glied mit $\varkappa = \nu$ von der Summe abspalte,

$$\left| n_\nu - \frac{q^\nu}{\nu} \right| \leqq \frac{1}{\nu} \sum_{\varkappa \leqq \frac{\nu}{2}} q^\varkappa,$$

[5]) R. Dedekind, Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl Modulus. Crelles Journ. 54 (1857).

also

$$n_\nu = \frac{q^\nu}{\nu} + O\left(\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{\nu}\right). \tag{4}$$

2.

Es sei nun $g > 0$. Für die Zetafunktion von K gilt entsprechend, wenn N_ν die Zahl der Primdivisoren ν-ten Grades von K bezeichnet,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\log q \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\nu s}} \sum_{\varkappa|\nu} \varkappa N_\varkappa \quad \text{für } \Re(s) > 1. \tag{5}$$

Nun ist andererseits

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta_0(s)} = L(s) = \prod_{\varkappa=1}^{2g}\left(1 - \frac{\omega_\varkappa}{q^s}\right) = \sum_{\varkappa=0}^{2g} \frac{a_\varkappa}{q^{\varkappa s}} \text{ mit } a_0 = 1, \tag{6}$$

also

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)} = \frac{L'(s)}{L(s)} = \log q \sum_{\varkappa=1}^{2g} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega_\varkappa^\nu}{q^{\nu s}} = \log q \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s_\nu}{q^{\nu s}} \tag{7}$$

mit $s_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{2g} \omega_\varkappa^\nu$. Aus (1) und (5) folgt dagegen

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{\zeta_0'(s)}{\zeta_0(s)} = -\log q \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\nu s}} \sum_{\varkappa|\nu} \varkappa (N_\varkappa - n_\varkappa),$$

also

$$\sum_{\varkappa|\nu} \varkappa (N_\varkappa - n_\varkappa) = -s_\nu, \tag{8}$$

und daraus ergibt sich

$$N_\nu = n_\nu - \frac{1}{\nu} \sum_{\varkappa|\nu} s_\varkappa \mu\left(\frac{\nu}{\varkappa}\right). \tag{9}$$

Das ist also die genaue Formel für die Anzahl der Primdivisoren festen Grades. Dieser ist übrigens (was aber im folgenden nicht gebraucht wird) zu entnehmen, daß die Kenntnis der Zahlen $N_1, \ldots, N_g$ gleichbedeutend ist mit der Kenntnis der Nullstellen von $\zeta(s)$. Sind nämlich die Nullstellen bekannt, so ergeben sich nach (9) die Zahlen $N_1, \ldots, N_g$. Sind umgekehrt diese Zahlen bekannt, so liefert (8) die Zahlen $s_1, \ldots, s_g$, und daraus lassen sich nach den Newtonschen Formeln die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_g$ berechnen. Da nun $q^{gs} L(s)$ sich nicht ändert, wenn man s durch $1 - s$ ersetzt, bekommt man nun auch noch die übrigen Koeffizienten $a_{g+1}, \ldots, a_{2g}$ und damit alle Nullstellen von $\zeta(s)$ und alle übrigen N_ν und sogar noch die Klassenzahl h von K, denn es ist $h = L(0)$.

Aus (9) folgt aber auch sofort der Primdivisorsatz für K. Ist Θ das Maximum der Realteile der Nullstellen von $\zeta(s)$, so ist

$$\nu|N_\nu - n_\nu| \leqq \sum_{\varkappa=1}^{\nu} |s_\varkappa| \leqq \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \sum_{\lambda=1}^{2g} |\omega_\varkappa|^\nu \leqq 2g \sum_{\varkappa=1}^{\nu} q^{\Theta\nu},$$

also

$$N_\nu = n_\nu + O\left(\frac{q^{\Theta\nu}}{\nu}\right), \tag{10}$$

oder auch nach (4) wegen $\Theta \geqq \frac{1}{2}$

$$N_\nu = \frac{q^\nu}{\nu} + O\left(\frac{q^{\Theta\nu}}{\nu}\right). \tag{11}$$

Nebenbei sei noch bemerkt, daß Θ in (10) nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann. Ist nämlich

$$N_\nu = n_\nu + O\left(\frac{q^{\Theta'\nu}}{\nu}\right),$$

wobei ich $\Theta' > 0$ voraussetzen kann, so ist nach (8)

$$|s_\nu| \leqq \sum_{\varkappa|\nu} \varkappa |N_\varkappa - n_\varkappa| \leqq \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \varkappa |N_\varkappa - n_\varkappa|,$$

also

$$s_\nu = O(q^{\Theta'\nu}).$$

Daraus folgt aber nun, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s_\nu}{q^{\nu s}}$ für $\Re(s) > \Theta'$ regulär ist. Nach (7) liegt also in diesem Gebiet keine Nullstelle von $L(s)$, d. h. es ist $\Theta' \geqq \Theta$. — Die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung für $\zeta(s)$ ist daher gleichbedeutend damit, daß (10) — oder wegen (4) auch (11) — mit $\Theta = \frac{1}{2}$ richtig ist.

3.

Zum Beweis des angekündigten allgemeinen Primdivisorsatzes ziehe ich die zu Λ/K gehörigen, mit Gruppencharakteren gebildeten L-Reihen heran, die entsprechend zu definieren sind, wie es Artin bei den algebraischen Zahlkörpern getan hat[6]). Es sei also χ ein einfacher Charakter der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von Λ/K, $\mathfrak{p}$ sei ein Primdivisor von K, der nicht in der Diskriminante $\mathfrak{d}$ von Λ/K aufgeht, und $\mathfrak{P}$ sei ein in $\mathfrak{p}$ aufgehender

[6]) E. Artin, Über eine neue Art von L-Reihen. Abh. a. d. Math. Seminar Hamburg III (1924).

Primdivisor von Λ. Ist dann S der zu $\mathfrak{P}$ gehörige Frobenius-Automorphismus und $\mathfrak{C}$ die Klasse von $\mathfrak{G}$, der S angehört, so darf ich setzen

$$\chi(\mathfrak{p}^\nu) = \chi(S^\nu) = \chi(\mathfrak{C}^\nu),$$

da ja zu den Konjugierten von $\mathfrak{P}$ die Konjugierten von S gehören. Dann wird definiert:

$$\log L(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{d}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p}^\nu)}{\nu\, \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\nu s}} \quad \text{für } \Re(s) > 1, \tag{12}$$

also

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{d}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p}^\nu)\log \mathfrak{N}\mathfrak{p}}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\nu s}}$$

$$= -\sum_{\mathfrak{C}} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} N_\varkappa(M_{\mathfrak{C}}) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{C}^\nu)\varkappa \log q}{q^{\varkappa\nu s}} \tag{13}$$

$$= -\log q \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\nu s}} \sum_{\varkappa\mid\nu} \sum_{\mathfrak{C}} \varkappa N_\varkappa(M_{\mathfrak{C}})\chi(\mathfrak{C}^{\frac{\nu}{\varkappa}}).$$

Man kann nun genau wie bei den algebraischen Zahlkörpern zeigen, daß sich diese L-Reihen darstellen lassen als Potenzprodukte mit rationalen Exponenten solcher L-Reihen, die zu Λ/Z gehören, wo Z alle Körper zwischen Λ und K durchläuft, über denen Λ zyklisch ist. Und zwar benötigt man zur Darstellung der L-Reihen, die nicht zum Hauptcharakter gehören, auch nur solche L-Reihen von Λ/Z, die nicht zum Hauptcharakter von Λ/Z gehören. Die zum Hauptcharakter von Λ/K gehörige L-Reihe ist dagegen im wesentlichen gleich der Zetafunktion von K; man erhält sie nämlich, indem man aus dieser Zetafunktion alle zu $\mathfrak{d}$ nicht primen Bestandteile wegläßt, was darauf hinauskommt, daß man sie mit gewissen endlich vielen Faktoren der Form $1 - \frac{\varepsilon}{q^s}$ multipliziert, wobei die ε Einheitswurzeln sind. In derselben Weise erhält man auch die hier gebrauchten L-Reihen von Λ/Z aus den eigentlichen L-Reihen. Von diesen eigentlichen L-Reihen von Λ/Z weiß man nun[7]), daß sie Polynome (ev. sogar Konstanten) in $\frac{1}{q^s}$ sind und sich in der Form schreiben lassen $\prod\left(1 - \frac{\omega_\nu}{q^s}\right)$, wobei das Produkt zu erstrecken ist über gewisse der zur Zetafunktion $\zeta_\Lambda(s)$ im Sinn von (6) gehörigen ω_ν. Damit haben wir also:

[7]) Beweis mit Hilfe des Reziprozitätsgesetzes entsprechend wie a. a. O. [3]).

Ist χ ein vom Hauptcharakter verschiedener einfacher Charakter von $\mathfrak{G}$, so ist

$$L(s,\chi) = \prod_{\nu=1}^{a_\chi}\left(1-\frac{\omega_{\chi\nu}}{q^s}\right)^{x_{\chi\nu}} \cdot \prod_{\nu=1}^{b_\chi}\left(1-\frac{\varepsilon_{\chi\nu}}{q^s}\right)^{y_{\chi\nu}}, \tag{14}$$

und für den Hauptcharakter χ_0 ist

$$L(s,\chi_0) = \zeta_0(s)\prod_{\nu=1}^{a_{\chi_0}}\left(1-\frac{\omega_{\chi_0\nu}}{q^s}\right)^{x_{\chi_0\nu}} \cdot \prod_{\nu=1}^{b_{\chi_0}}\left(1-\frac{\varepsilon_{\chi_0\nu}}{q^s}\right)^{y_{\chi_0\nu}}. \tag{14_0}$$

Dabei sind die $x_{\chi\nu}$, $y_{\chi\nu}$ rationale Zahlen; die $\varepsilon_{\chi\nu}$ sind Einheitswurzeln; die $\omega_{\chi\nu}$ sind für $\chi \neq \chi_0$ gewisse der zu $\zeta_\Delta(s)$ gehörigen ω_ν, ebenso aber auch die $\omega_{\chi_0\nu}$, da aus (12) sofort folgt, daß $\prod_\chi L(s,\chi)^{r_\chi}$, wobei das Produkt über alle einfachen Charakterere χ zu erstrecken ist und r_χ der Grad von χ ist, mit $\zeta_\Delta(s)$ übereinstimmt, abgesehen von endlich vielen Faktoren der Form $\frac{1}{1-\frac{1}{q^{\nu s}}}$. Aus (14) folgt für $\chi \neq \chi_0$

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \log q \sum_{\varkappa=1}^{a_\chi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x_{\chi\varkappa}\omega_{\chi\varkappa}^{\nu}}{q^{\nu s}} + \log q \sum_{\varkappa=1}^{b_\chi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{y_{\chi\varkappa}\varepsilon_{\chi\varkappa}^{\nu}}{q^{\nu s}}$$

$$= \log q \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{q^{\nu s}}(s_\nu(\chi)+e_\nu(\chi)), \tag{15}$$

und ebenso aus (14_0) und (2)

$$\frac{L'(s,\chi_0)}{L(s,\chi_0)} = \log q \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{q^{\nu s}}(s_\nu(\chi_0)+e_\nu(\chi_0)-(q^\nu+1)) \tag{15_0}$$

mit

$$s_\nu(\chi) = \sum_{\varkappa=1}^{a_\chi} x_{\chi\varkappa}\omega_{\chi\varkappa}^{\nu},$$
$$e_\nu(\chi) = \sum_{\varkappa=1}^{b_\chi} y_{\chi\varkappa}\varepsilon_{\chi\varkappa}^{\nu}. \tag{16}$$

Vergleich von (13) mit (15), (15_0) ergibt

$$\sum_{\varkappa\mid\nu}\sum_{\mathfrak{C}}\varkappa N_\varkappa(M_{\mathfrak{C}})\chi(\mathfrak{C}^{\frac{\nu}{\varkappa}}) = -s_\nu(\chi)-e_\nu(\chi)+\begin{cases} q^\nu+1 & \text{für } \chi=\chi_0,\\ 0 & \text{für } \chi\neq\chi_0.\end{cases}$$

Nun multipliziere ich auf beiden Seiten mit $\chi(\mathfrak{B}^{-1})$, wo $\mathfrak{B}$ eine beliebige Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ ist, und summiere über alle einfachen Charaktere χ, wobei ich die Formel benutze

$$\sum_\chi \chi(\mathfrak{C})\chi(\mathfrak{B}^{-1}) = \begin{cases}\frac{n}{n_{\mathfrak{B}}} & \text{für } \mathfrak{C}=\mathfrak{B},\\ 0 & \text{für } \mathfrak{C}\neq\mathfrak{B}.\end{cases}$$

Auf der linken Seite erhalte ich so

$$\sum_{\varkappa \mid \nu} \sum_{\mathfrak{C}} \varkappa N_\varkappa(M_{\mathfrak{C}}) \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{C}^{\frac{\nu}{\varkappa}}) \chi(\mathfrak{B}^{-1})$$

$$= \nu N_\nu(M_{\mathfrak{B}}) \frac{n}{n_{\mathfrak{B}}} + \sum_{\substack{\varkappa \mid \nu \\ \varkappa \leqq \frac{\nu}{2}}} \sum_{\mathfrak{C}} \varkappa N_\varkappa(M_{\mathfrak{C}}) \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{C}^{\frac{\nu}{\varkappa}}) \chi(\mathfrak{B}^{-1}).$$

Nun ist $\varkappa N_\varkappa(M_{\mathfrak{C}}) \leqq \varkappa N_\varkappa = O(q^\varkappa)$ nach (11). Daher ist dies gleich

$$\nu N_\nu(M_{\mathfrak{B}}) \frac{n}{n_{\mathfrak{B}}} + O(q^{\frac{\nu}{2}}).$$

Auf der rechten Seite erhalte ich dagegen

$$q^\nu + 1 - \sum_{\chi} (s_\nu(\chi) + e_\nu(\chi)) \chi(\mathfrak{B}^{-1})$$

$$= q^\nu + O(q^{\Theta\nu}),$$

da ja aus (16) folgt

$$s_\nu(\chi) = O(q^{\Theta\nu}),$$

$$e_\nu(\chi) = O(1),$$

wobei Θ wie in der Einleitung definiert ist. Und so bekommen wir den Primdivisorsatz:

$$N_\nu(M_{\mathfrak{B}}) = \frac{n_{\mathfrak{B}}}{n} \cdot \frac{q^\nu}{\nu} + O\left(\frac{q^{\Theta\nu}}{\nu}\right).$$

(Eingegangen am 13. Juli 1935.)

Über Doetschs Umkehrformel der Gauß-Transformation und eine neue Umkehrung der Laplace-Transformation.

Von

F. Tricomi in Turin.

1. Ich habe schon Gelegenheit gehabt[1]), auf die einfache physikalische Deutung aufmerksam zu machen, welche die lineare Funktionaltransformation

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2m}} F(\xi)\, d\xi \equiv \mathfrak{G}^{(m)}[F(\xi)] \qquad (m > 0),$$

die ich als „Gauß-Transformation" zu bezeichnen pflege, besitzt: Bedeutet $F(x)$ die Anfangstemperatur (d. h. die Temperaturverteilung für $t = 0$) eines beiderseits unendlich langen linearen Wärmeleiters von der Wärmeleitfähigkeit 1 so ist $f(x)$ der Temperaturzustand zur Zeit $t = m/2$.

Es folgt daraus, daß das Problem der Umkehrung der Transformation (1) mit dem der „Rückwärtsverfolgung" des Temperaturzustandes in dem angegebenen Wärmeleiter identisch ist, d. h. mit einem Problem, welches schon mehrmals untersucht worden ist[2]). Z. B. weiß man nach Appel und Lalesco, daß eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit dieses Problems die ist, daß $f(x)$ eine ganze analytische Funktion höchstens von der Ordnung (und damit dem Geschlechte) 2 im Sinne der Laguerre-Hadamardschen Theorie sei.

Man kann nun für die Umkehrung der Gauß-Transformation eine sehr bemerkenswerte Formel benutzen, die Doetsch[3]) im Jahre 1928 bei der Lösung einer Aufgabe aus der Spektroskopie für die explizite Be-

[1]) In meiner Arbeit: *Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione*, die bald in den „Commentarii Mathematici Helvetici" erscheinen wird.

[2]) Siehe G. Doetsch, *Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung.* III., Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 608—626 und die darin enthaltenen Literaturangaben.

[3]) *Die Elimination des Dopplereffektes bei spektroskopischen Feinstrukturen und exakte Bestimmung der Komponenten*, Zeitschr. f. Physik 49 (1928), S. 705—730, Formel (20*).

rechnung von $F(x)$ gegeben hat, eine Formel, die — mit unseren Symbolen geschrieben — lautet:

$$(2) \qquad \boxed{F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\frac{m z^2}{2}} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos z(x - \xi)\, d\xi}.$$

Man gewinnt so eine Formel für die Umkehrung der Gauß-Transformation, welche in manchen Hinsichten vorteilhafter scheint als die von mir letzthin gegebene[4]), weil sie ein zwar doppeltes aber doch *reelles* Integral enthält.

Die Tragweite des errungenen Fortschrittes kann vielleicht besser eingesehen werden, wenn man die Sache in das Gebiet der wohlbekannten (zweiseitigen) Laplace-Transformation:

$$(3) \qquad \varphi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \Phi(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}_{II}[\Phi(t)]$$

überträgt, welche durch die einfache Relation

$$(4) \qquad \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{s^2}{2}} f(-\sqrt{m}\, s) = \mathfrak{L}_{II}[e^{-\frac{t^2}{2}} F(\sqrt{m}\, t)]$$

mit der Gauß-Transformation eng verbunden ist.

Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{s^2}{2}} f(-\sqrt{m}\, s) = \varphi(s), \quad e^{-\frac{t^2}{2}} F(\sqrt{m}\, t) = \Phi(t),$$

woraus

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2m}} \varphi\left(-\frac{\xi}{\sqrt{m}}\right), \quad F(x) = e^{\frac{x^2}{2m}} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)$$

folgt, in die Gleichung (2) ein; dann ergibt sich

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2m}}}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^{\infty} e^{\frac{m z^2}{2}} dz \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2m}} \varphi\left(-\frac{\xi}{\sqrt{m}}\right) \cos z(x - \xi)\, d\xi,$$

und es genügt noch die Substitution

$$x = \sqrt{m}\, t, \quad \xi = -\sqrt{m}\, s, \quad z = \frac{u}{\sqrt{m}}$$

auszuführen, um folgende *neue Umkehrformel*:

$$(5) \qquad \boxed{\Phi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^{\infty} e^{\frac{u^2}{2}} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \varphi(s) \cos(s + t) u\, ds}$$

---

[4]) In meiner unter [1]) zitierten Arbeit.

für die zweiseitige Laplace-Transformation zu gewinnen, welche keine Spur von komplexen Größen enthält.

Der Gültigkeitsbereich der neuen Formel bleibt übrigens noch zu erörtern. Man sieht aber sofort ein, daß eine Vorbedingung für ihre Anwendbarkeit die ist, daß die Funktion $\varphi(s)$ auf der ganzen reellen Achse existiert.

2. Es ist lehrreich, die neue Umkehrformel (5) mit einem direkteren Verfahren wieder zu gewinnen.

Zu diesem Zwecke gehen wir von der Mellinschen Umkehrformel der Laplace-Transformation

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{st}\, \varphi(s)\, ds \tag{6}$$

aus (wo $\varkappa$ eine reelle, in gewissen Grenzen willkürliche Größe bedeutet), die wir zunächst in der offenbar gleichwertigen Form

$$\Phi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{\frac{(s+t)^2}{2}}\, e^{-\frac{s^2}{2}}\, \varphi(s)\, ds \tag{7}$$

schreiben wollen. Nehmen wir nun an, daß die Funktion $e^{-\frac{s^2}{2}} \varphi(s)$ durch den Fourierschen Integralsatz darstellbar sei:

$$e^{-\frac{s^2}{2}} \varphi(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \varphi(\sigma) \cos(s-\sigma)\, u\, d\sigma$$

und führen diesen Ausdruck in die Formel (7) ein; durch Vertauschung der Integrationsfolge, deren Zulässigkeit später diskutiert werden soll, ergibt sich

$$\Phi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2\pi^2 i} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \varphi(\sigma)\, d\sigma \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{\frac{(s+t)^2}{2}} \cos(s-\sigma)\, u\, ds. \tag{8}$$

Jetzt haben wir das Integral

$$J = \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} e^{\frac{(s+t)^2}{2}} \cos(s-\sigma)\, u\, ds \tag{9}$$

auszurechnen, wofür zunächst bemerkt sei, daß, wenn man

$$t = t_1 + i t_2, \quad s = \varkappa + i s_2$$

setzt, sich (mit Rücksicht auf die Realität von u)

$$\left| e^{\frac{(s+t)^2}{2}} \right| = e^{\frac{(t_1+\varkappa)^2 - (t_2+s_2)^2}{2}}, \quad \left|\cos(s-\sigma)u\right| = \tfrac{1}{2}\left| e^{u s_2 - i u(\varkappa - \sigma)} + e^{-u s_2 + i u(\varkappa-\sigma)} \right|$$

ergibt, woraus folgt, daß

$$|e^{\frac{(s+t)^2}{2}} \cos(s-\sigma)u| = O(e^{-\frac{s_2^2}{2}}) \qquad (s_2 \to \pm\infty)$$

ist. Das Integral J ist also gleichmäßig konvergent und von $\varkappa$ unabhängig, was uns gestattet, $\varkappa = -t_1$ zu setzen, womit unter Verwendung der Substitution

$$s + t = ix$$

die Gleichung (9) in die Form

$$J = i\cos(t+\sigma)u \cdot \int_{\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathfrak{Cos}\, ux\, dx - \sin(t+\sigma)u \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathfrak{Sin}\, ux\, dx$$

gebracht werden kann. Bekanntlich ist aber

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathfrak{Cos}\, ux\, dx = \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{u^2}{2}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathfrak{Sin}\, ux\, dx = 0,$$

wie übrigens leicht zu kontrollieren ist; also hat man endlich

$$J = i\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{u^2}{2}} \cos(t+\sigma)u.$$

Infolgedessen nimmt die Gleichung (8) die Gestalt

$$\Phi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi^3}} \int_0^{\infty} e^{\frac{u^2}{2}} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \varphi(\sigma) \cos(t+\sigma)u\, d\sigma$$

an, und so kommt man — abgesehen von der Vertauschung zwischen s und σ — wieder auf die Gleichung (5).

3. Die vorliegenden Betrachtungen sichern die Gültigkeit der Umkehrformel (5) unter folgenden Bedingungen: a) es gilt die klassische Umkehrformel (6); b) die Funktion $e^{-\frac{s^2}{2}} \varphi(s)$ ist durch das Fouriersche Integral darstellbar; c) die Vertauschung der Integrationsfolge, die auf die Formel (8) geführt hat, ist zulässig.

Von diesen drei Bedingungen ist besonders die dritte unbequem, weil nicht leicht *a priori* kontrollierbar. Trotzdem ist es durch eine passende Umformung des neuen Umkehrungsverfahrens, die übrigens einige formelle Vorteile bietet, möglich, seinen Gültigkeitsbereich ziemlich scharf abzugrenzen.

Zu diesem Zwecke beziehen wir uns auf die Gaußsche Transformation statt auf die Laplacesche — was immer möglich ist — und setzen von

Anfang an voraus, daß die gegebene Resultat-Funktion $f(s)$ durch den Fourierschen Integralsatz darstellbar sei, d. h., daß die zwei Integrale

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\tau u\, d\tau, \quad b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\tau u\, d\tau$$

konvergieren und

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(u)\cos tu + b(u)\sin tu]\, du \tag{11}$$

sei. Unter diesen Umständen kann man leicht beweisen, daß, falls das Integral

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{\frac{mu^2}{2}} [a(u)\cos tu + b(u)\sin tu]\, du, \tag{12}$$

welches für $m = 0$ sich auf (11) reduziert, auch für einige *positive* Werte[5]) von m konvergiert und überhaupt *gleichmäßig konvergiert*, man dann für dieselben Werte von m hat:

$$f(s) = \mathfrak{G}^{(m)}[F(t)]. \tag{13}$$

Mit anderen Worten: *Die Umkehrformel* (2) *der Gauß-Transformation*[6]) *gilt wenigstens für alle diejenigen Funktionen* f, *deren Fourierkoeffizienten* $a(u)$ *und* $b(u)$ *das Integral* (12) *gleichmäßig konvergieren lassen.*

Um diesen Satz zu beweisen, merken wir zunächst an, daß — wie man leicht durch eine kurze Rechnung kontrollieren kann — die zwei Formeln

$$\boxed{\mathfrak{G}^{(m)}[\cos tu] = e^{-\frac{mu^2}{2}}\cos su, \quad \mathfrak{G}^{(m)}[\sin tu] = e^{-\frac{mu^2}{2}}\sin su} \tag{14}$$

gelten, welche eine kleine Verallgemeinerung zweier von mir schon veröffentlichten Formeln darstellen[7]) und in wesentlichem mit den Formeln (10) übereinstimmen. Es folgt daraus und aus der Tatsache, daß die zwei Integrale

$$\mathfrak{G}^{(m)}[\cos tu] = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-t)^2}{2m}}\cos tu\, dt,$$

$$\mathfrak{G}^{(m)}[\sin tu] = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-t)^2}{2m}}\sin tu\, dt$$

[5]) Es ist leicht einzusehen, daß diese Werte, wenn vorhanden, ein gewisses Intervall $(0, m_0)$ ausfüllen.

[6]) Welche sofort wiedergewonnen wird, wenn man die Werte (10) von $a(u)$ und $b(u)$ in (12) einführt.

[7]) Siehe die Formeln (31) meiner unter [1]) zitierten Arbeit.

offenbar gleichmäßig konvergent sind, daß die Gauß-Transformierte der Funktion

$$F(t, U) = \int_0^U e^{\frac{m u^2}{2}} [a(u) \cos t u + b(u) \sin t u] \, d u$$

durch die Formel

$$(15) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}^{(m)}[F(t, U)] = \int_0^U e^{\frac{m u^2}{2}} \{a(u)\, \mathfrak{G}^{(m)}[\cos t u] + b(u)\, \mathfrak{G}^{(m)}[\sin t u]\} \, d u \\ \qquad\qquad = \int_0^U [a(u) \cos s u + b(u) \sin s u] \, d u \end{cases}$$

berechnet werden kann. Andererseits, da das Integral (12) gleichmäßig konvergent vorausgesetzt ist, kann man bei einem gegebenen, willkürlich kleinen $\eta > 0$ eine andere positive Größe Ω (unabhängig von t) so bestimmen, daß für $U > \Omega$ immer

$$|F(t) - F(t, U)| < \eta$$

und infolgedessen:

$$|\mathfrak{G}^{(m)}[F(t)] - \mathfrak{G}^{(m)}[F(t, U)]| < \mathfrak{G}^{(m)}[\eta] = \eta$$

ist. Die letzte Ungleichung zeigt, daß

$$\lim_{U \to \infty} \mathfrak{G}^{(m)}[F(t, U)] = \mathfrak{G}^{(m)}[F(t)]$$

ist; aus der Gleichung (15) folgt aber, daß

$$\lim_{U \to \infty} \mathfrak{G}^{(m)}[F(t, U)] = \int_0^\infty [a(u) \cos s u + b(u) \sin s u] \, d u = f(s)$$

ist; also gilt die Formel (13), was zu beweisen war.

4. Der soeben bewiesene Satz zeigt, daß — unter den vorher angegebenen Bedingungen — zwischen den Fourierkoeffizienten:

$$(16) \quad \begin{cases} a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \tau u \, d \tau \\ b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \tau u \, d \tau \end{cases} \qquad \begin{cases} A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cos \tau u \, d \tau \\ B(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \sin \tau u \, d \tau \end{cases}$$

zweier durch die Gauß-Transformation verknüpften Funktionen f und F, die sehr einfachen Relationen:

$$(17) \quad \boxed{\begin{array}{ll} A(u) = a(u) e^{\frac{m u^2}{2}}, & B(u) = b(u) e^{\frac{m u^2}{2}}; \\ a(u) = A(u) e^{-\frac{m u^2}{2}}, & b(u) = B(u) e^{-\frac{m u^2}{2}} \end{array}}$$

bestehen. *Man geht also von den Fourierkoeffizienten* $a(u)$, $b(u)$ *der „Resultat-Funktion“* f *zu den* $A(u)$, $B(u)$ *der „Objekt-Funktion“* F *über durch Hinzufügung des „Verstärkungsfaktors“* $e^{\frac{m u^2}{2}}$, *und umgekehrt von den Fourierkoeffizienten von* F *zu denen von* f *durch Hinzufügung des „Abklingungsfaktors“* $e^{-\frac{m u^2}{2}}$, um die Nomenklatur anzuwenden, die Doetsch im Falle eines endlichen Intervalles [siehe Fußnote[2])] benutzt.

In Integralform geschrieben lauten die Relationen (17) zwischen den Fourierkoeffizienten:

$$(18)\qquad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\tau) - e^{-\frac{m u^2}{2}} F(\tau)] \cos \tau u \, d\tau = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\tau) - e^{-\frac{m u^2}{2}} F(\tau)] \sin \tau u \, d\tau = 0. \end{cases}$$

Um eine sehr einfache Anwendung dieser Resultate zu zeigen, können wir eines der klassischen Summationsverfahren für das Fouriersche Integral, nämlich dasjenige, welches dem Weierstraßschen Verfahren für die Fourierschen Reihen entspricht[8]), fast ohne Rechnung wiederfinden.

Dafür genügt es nämlich, eine bekannte, den Ausgangspunkt einer klassischen Arbeit von Weierstraß[9]) darstellende Formel auszunutzen, welche — mit unseren Symbolen geschrieben — lautet:

$$(19)\qquad f(s) = \lim_{h \to 0} \mathfrak{G}^{(2h)}[f(t)].$$

In der Tat: sind $a(u)$, $b(u)$ die Fourierkoeffizienten von f, dann sind $e^{-hu^2} a(u)$, $e^{-hu^2} b(u)$ die ihrer $\mathfrak{G}^{(2h)}$-Transformierten, und daher hat man — wenn diese Transformierte durch den Fourierschen Integralsatz darstellbar ist — infolge von (19):

$$(20)\qquad f(s) = \lim_{h \to 0} \int_0^{\infty} e^{-hu^2} [a(u) \cos su + b(u) \sin su] \, du,$$

eine Formel, welche das angedeutete Summationsverfahren ausdrückt.

Patsch in Tirol, den 15. Juli 1935.

---

[8]) Siehe z. B. den Artikel von A. Plessner, *Trigonometrische Reihen* in Pascals Repertorium d. höheren Math. 1 [3], 2. Aufl. (Leipzig, Teubner, 1929), S. 1390, Form. (7).

[9]) *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente*, Werke 3, S. 1—37.

(Eingegangen am 20. Juli 1935.)

Dreidimensionale wirbelgefaserte Räume.

Von

W. Hantzsche und H. Wendt in Dresden.

Die folgenden Untersuchungen sind ein Beitrag zum Homöomorphieproblem dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Solange man das vollständige Invariantensystem dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten gegen topologische Abbildungen nicht kennt, muß man sich damit begnügen, einzelne Mannigfaltigkeiten aufzuzählen, zu klassifizieren und auf ihre Homöomorphie zu untersuchen. Ein wichtiges Hilfsmittel hierzu ist die Faserung der Mannigfaltigkeit. Läßt sich eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit fasern[1]), so beherrscht man sie damit ziemlich gut, da man das vollständige Invariantensystem gefaserter Räume gegen faserтreue topologische Abbildungen kennt und die nahezu stärkste bekannte Invariante, die Fundamentalgruppe, aus den Faserinvarianten ablesen kann.

Wir verallgemeinern hier die Faserung, indem wir „Wirbellinien" zulassen, und stellen das volle Invariantensystem solcher gefaserter Räume, die mit mindestens einer Wirbellinie gefasert sind, gegen faserтreue topologische Abbildungen auf. Das Ergebnis ist, daß die Wirbellinien enthaltenden gefaserten Räume eine sehr viel einfachere topologische Struktur haben als die wirbelfrei gefaserten Räume. Bohrt man aus einem wirbelfrei gefaserten Raume eine Faser aus, nimmt man also einen gefaserten Vollring heraus und schließt die Ausbohrung durch einen wirbelgefaserten Vollring, so daß Fasern der Randringfläche des Vollringes auf Fasern der Randringfläche der Ausbohrung fallen, so zerfällt der entstehende Raum in eine topologische Summe einfacher und wohlbekannter Räume.

§ 1.

Berandeter gefaserter Raum.

Wir gehen von einem berandeten gefaserten Raum aus. Darunter verstehen wir eine endliche dreidimensionale berandete Mannigfaltigkeit[2]), die folgende Eigenschaften hat:

[1]) H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume. Acta math. 60 (1933), S. 147—238. Im folgenden zitiert mit Fas. Die vorliegende Arbeit setzt die Kenntnis von Fas. nicht voraus. Wegen der Ausführung einiger Beweise wird jedoch darauf verwiesen.

[2]) Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner 1934, § 64.

I. Die Punkte der Mannigfaltigkeit verteilen sich auf geschlossene Kurven (Jordan-Kurven), sogenannte *Fasern*. Durch jeden Punkt geht genau eine Faser H hindurch.

II. Jede Faser besteht entweder ganz aus inneren Punkten oder ganz aus Randpunkten der Mannigfaltigkeit. Wir unterscheiden dementsprechend zwischen *inneren* und *Randfasern*. Da die orientierbare und die nichtorientierbare Ringfläche die einzigen geschlossenen faserbaren Flächen sind[3]), so kommen nur die beiden Ringflächen als Randflächen in Frage. Die nichtorientierbare Ringfläche schließen wir aus durch das Axiom

III. Ein berandeter gefaserter Raum hat nur orientierbare Ringflächen zu Randflächen[4]).

IV. Zu jeder inneren Faser H gibt es eine *Faserumgebung*, das ist eine solche H enthaltende Teilmenge von inneren Fasern, die sich fasertreu auf einen „gefaserten Vollring" abbilden läßt, wobei H in die „mittlere" Faser übergeht.

Fig. 1. Gefaserter Vollring.

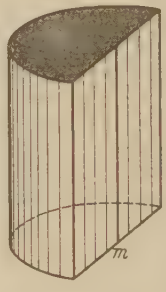


Fig. 2. Gefaserter Halbvollring.

Unter einem *gefaserten Vollring* verstehen wir einen geraden Kreiszylinder des euklidischen Raumes, der durch die zur Achse parallelen Geraden gefasert ist und dessen Grund- und Dachfläche, um einen rationalen Winkel $2\pi \frac{\nu}{\mu}$ gegeneinander verschraubt, zur Deckung gebracht sind; μ und ν sind dabei teilerfremde ganze Zahlen. Die Achse des Vollrings heißt die mittlere Faser (Fig. 1). — Bei der Schließung

[3]) Man sieht die Behauptung folgendermaßen ein. Die Umgebung einer jeden Faser H einer gefaserten Fläche ist ein durch konzentrische Kreise gefaserter Kreisring, in dem H eine innere Faser ist. Die faserbaren Flächen erhält man dann offenbar aus einem gefaserten Kreisring durch Zuordnung der beiden Randfasern. Damit ergeben sich nur die beiden oben genannten Flächen. Vgl. auch W. Threlfall, Räume aus Linienelementen, Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinig. 42 (1932), S. 110.

[4]) Der Kürze wegen behandeln wir nur diesen Fall ausführlich. Im Falle nichtorientierbarer Randringflächen ergibt sich nichts wesentlich Neues. (Darüber vgl. Anhang S. 753.)

des Zylinders zum gefaserten Vollring setzen sich je μ achsenparallele Strecken zu einer einzigen Faser aneinander, nur die Achse bildet eine Faser für sich allein.

Wenn Grund- und Dachfläche unverschraubt einander zugeordnet sind, also die Zahl $\mu = 1$ ist, so heißt der Vollring ein *gewöhnlich gefaserter Vollring*.

V. Zu jeder Randfaser H' gibt es eine *Randfaserumgebung*, das ist eine H' enthaltende Teilmenge von inneren Fasern und Randfasern, die sich fasertreu auf einen „gefaserten Halbvollring" abbilden läßt, und zwar derart, daß die Randfasern einen Kreisring auf dem Halbvollring bilden und die Faser H' in die „mittlere" Faser dieses Kreisringes übergeht.

Unter einem *gefaserten Halbvollring* verstehen wir ein gerades euklidisches Prisma, dessen Querschnitt eine Halbkreisfläche ist und das durch Strecken parallel zu den Kanten gefasert ist. Seine Grund- und Dachfläche sind durch Translation zuzuordnen und zu identifizieren. Die Faser durch den Mittelpunkt m des Halbkreises heißt mittlere Faser (Fig. 2); die Fasern durch den berandenden Durchmesser des Halbkreises bilden einen gefaserten Kreisring. Er entspricht Randfasern des gefaserten Raumes, aus dem wir uns den gefaserten Halbvollring ausgeschnitten denken.

Fasertreu wird eine Abbildung genannt, wenn sie erstens topologisch ist und zweitens Fasern in Fasern überführt.

Wir versehen jeden Vollring mit einer bestimmten räumlichen Orientierung, die uns einen bestimmten Schraubsinn in dem Vollring liefert. Der Schraubsinn legt dann bei der Zuordnung von Grund- und Dachfläche den positiven Drehsinn eindeutig fest. Dadurch sind die Zahlen μ und ν für den orientierten Vollring innerhalb der Grenzen $0 \leqq \nu < \mu$ eindeutig bestimmt. — Zwei orientierte gefaserte Vollringe sind dann und nur dann mit Erhaltung der Orientierung fasertreu aufeinander abbildbar, wenn sie in den so normierten Zahlen μ und ν übereinstimmen.

Betrachtet man also zwei Vollringe, die sich mit Erhaltung der Orientierung fasertreu aufeinander abbilden lassen, als nicht verschieden, so ist hiernach ein gefaserter Vollring durch die Zahlen μ, ν charakterisiert. Kehrt man die Orientierung im Vollring μ, ν um, so geht er in den Vollring μ, $\mu - \nu$ über.

§ 2.

Wirbelgefaserter Raum.

Aus den berandeten gefaserten Räumen leiten wir die *wirbelgefaserten Räume* ab. Wir geben dazu auf jeder der Randringflächen des berandeten

gefaserten Raumes einen Teil der Randfasern an, die einen oder endlich viele Kreisringe auf diesen ausmachen, oder aber auch alle Fasern der betreffenden Randringflächen erschöpfen. Diese Randfasern H wollen wir je zu einem Punkte zusammenziehen, indem wir die Punkte einer Randfaser H zu einem Punkte P identifizieren[5]). Hierdurch entsteht eine neue Mannigfaltigkeit. Die Punkte P bilden darin Kurvenstücke, die wir *Wirbelstücke* nennen wollen, oder eine einzige geschlossene Kurve, eine *Wirbellinie*. Wir verfolgen dies näher an einer Randringfläche, die wir uns zum Rechteck, dem Fundamentalpolygon, aufgeschnitten denken. Im Rechteck $ABCD$ mit paarweise zugeordneten Seiten $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, das durch die Strecken parallel zu $\overline{AB}$ gefasert ist, seien endlich viele zu $\overline{AB}$ parallele Streifen ausgezeichnet, die die erwähnten Kreisringe der Randringfläche ausmachen (schraffierte Streifen der Fig. 3a).

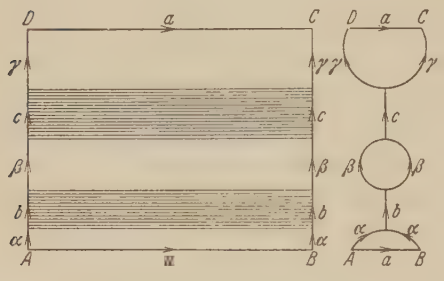


Fig. 3a. Fig. 3b.

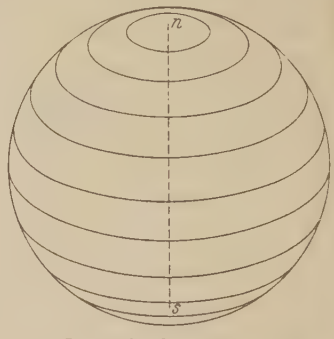


Fig. 4. Wirbelgefaserte Vollkugel.

Auf jeder Faser eines solchen Kreisringes werden die sämtlichen Punkte identifiziert. Wir erhalten durch dieses Identifizieren aus der Ringfläche endlich viele Kugelflächen, die durch Wirbelstücke miteinander verbunden sind (Fig. 3b), oder eine einzige geschlossene Wirbellinie, falls alle Fasern zu identifizieren sind.

Die aus dem berandeten gefaserten Raum entstehenden Räume sind also im allgemeinen von endlich vielen Kugelflächen und Ringflächen berandete Mannigfaltigkeiten und nur dann geschlossene Mannigfaltigkeiten, wenn man alle Fasern der Randringflächen des berandeten Raumes zu Punkten zusammenzieht. Auch der wirbelgefaserte Raum hat die Eigenschaft, daß durch jeden seiner Punkte genau eine Faser hindurchgeht mit Ausnahme nur der Punkte der Wirbelstücke oder Wirbellinien. Wir denken uns im folgenden einen wirbelgefaserten Raum, falls er orientierbar ist, stets mit einer bestimmten Orientierung versehen.

[5]) In dem präzisen Sinne, den dieser Terminus nach Seifert-Threlfall, Topologie (1934), § 8, besitzt.

Zwei wirbelgefaserte Räume sind gleich, wenn sie sich fasertreu und im Falle der Orientierbarkeit mit Erhaltung der Orientierung aufeinander abbilden lassen.

Wir erläutern die eingeführten Begriffe an zwei Beispielen.

1. *Wirbelgefaserte Vollkugel.* Man erhält sie, wenn man eine euklidische Vollkugel durch die Bahnkurven fasert, die ihre Punkte bei der Rotation um einen Durchmesser (Endpunkte n und s, Fig. 4) beschreiben. Der Durchmesser $\overline{ns}$ ist ein Wirbelstück. Der berandete gefaserte Raum, aus dem die wirbelgefaserte Vollkugel durch Identifizieren gewisser Randfasern entsteht, ist ein gewöhnlich gefaserter Vollring; auf seinem Rande ist ein gefaserter Kreisring ausgezeichnet, dessen Fasern in Punkte zusammenzuziehen sind.

2. *Wirbelvollring.* Der Wirbelvollring ist ein gerader Kreiszylinder des euklidischen Raumes, der durch die Bahnkurven seiner Punkte bei der Rotation um seine Achse gefasert ist und dessen Grund- und Dachfläche durch Parallelverschiebung zu identifizieren sind (Fig. 5). Die

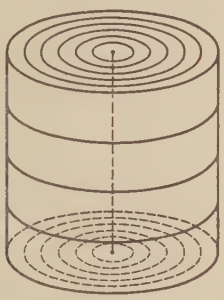


Fig. 5. Wirbelvollring.

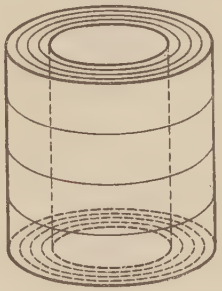


Fig. 6. Gefaserter Hohlzylinder.

Achse ist die Wirbellinie. Man erhält den Wirbelvollring auch aus einem gewöhnlich gefaserten Hohlring, das ist ein gerader, durch koaxiale Kreise gefaserter Hohlzylinder (Fig. 6), durch Identifizieren der Punkte der Fasern einer Mantelfläche.

Die Bezeichnung „Wirbellinie" ist im Anschluß an die Hydrodynamik gewählt. Die vorhergehenden Beispiele geben dazu Anlaß, da sie die Wirbellinie als Wirbellinie einer Flüssigkeitsbewegung auffassen lassen.

Weitere Beispiele, auch von geschlossenen wirbelgefaserten Mannigfaltigkeiten, folgen im § 7.

§ 3.

Zerlegungsfläche.

Einem wirbelgefaserten Raum F können wir eine *Zerlegungsfläche* f zuordnen. Wir identifizieren zu diesem Zwecke jede Faser von F (aber

nicht die Wirbellinien und auch nicht die Wirbelstücke) zu je einem Punkte. Genauer: Betrachtet man die sämtlichen Punkte einer Faser als äquivalent, so entsteht durch Identifizieren äquivalenter Punkte ein neuer „Umgebungsraum", von dem wir zeigen werden, daß er eine berandete Fläche, die sogenannte Zerlegungsfläche f von F ist. Die inneren Punkte von f entsprechen umkehrbar eindeutig den inneren Fasern von F, während einem Randpunkte entweder eine Randfaser oder ein Punkt eines Wirbelstückes oder einer Wirbellinie entspricht. Zur leichteren Bezeichnung dieses Unterschiedes ziehen wir die Randkreise von f, die Wirbellinien von F entsprechen, bzw. die Stücke von Randkreisen, die zu Wirbelstücken gehören, in den folgenden Figuren stark aus (*„markieren sie"*). — Da der wirbelgefaserte Raum F aus einem berandeten gefaserten Raum $\overline{F}$ durch Identifizieren von Faserpunkten hervorgegangen ist und man das Identifizieren schrittweise vornehmen kann, ohne das Ergebnis zu ändern, so stimmen die Zerlegungsflächen von F und $\overline{F}$ als berandete Flächen überein und unterscheiden sich nur als Zerlegungsflächen durch die starke Markierung gewisser Randkurvenstücke. Daß aber aus $\overline{F}$ durch Identifizieren der Punkte auf allen Fasern in der Tat eine berandete Fläche $\bar{f}$ hervorgeht, ergibt sich daraus, daß $\overline{F}$ von lauter gefaserten Ringflächen berandet wird. Diese Randringflächen kann man mit gewöhnlich gefaserten Vollringen schließen, indem man eine Randringfläche von $\overline{F}$ mit der Randringfläche eines gewöhnlich gefaserten Vollringes fasertreu identifiziert. Es entsteht dann aus $\overline{F}$ ein geschlossener gefaserter Raum. Dieser hat eine geschlossene Fläche als Zerlegungsfläche, wie in Fas. S. 155 bewiesen worden ist. Die Verschlußringe bilden sich in punktfremde Elementarflächenstücke der Zerlegungsfläche ab (Fas. § 4). Sieht man daher von den inneren Fasern der Verschlußvollringe ab, so bleibt als Zerlegungsfläche von $\overline{F}$ eine berandete Fläche $\bar{f}$ übrig.

§ 4.

Bewertung der Zerlegungsfläche.

Ist s ein Weg der Zerlegungsfläche f, der von einem Punkt h_1 nach einem Punkt h_2 führt und die markierten Teile des Randes von f vermeidet, so kann man in dem wirbelgefaserten Raum die Faser H_1 in die Faser H_2 so deformieren, daß sie immer Faser bleibt und ihr Bildpunkt auf der Zerlegungsfläche den Weg s durchläuft. Durch den Weg s ist nicht schon eine punktweise Abbildung der Anfangsfaser H_1 auf die Endfaser H_2 bestimmt, sondern unterwegs kann sich die Faser noch beliebig in sich verschieben. Wohl aber ist die Abbildung der Anfangsfaser auf

die Endfaser bis auf eine Selbstabbildung von H_1 mit Erhaltung der Orientierung bestimmt. Ist also die Anfangsfaser orientiert, so überträgt sich die Orientierung längs des Weges s eindeutig auf die Endfaser. Ist s' ein zweiter Weg von h_1 nach h_2, so kann die Fortsetzung ein und derselben Orientierung von h_1 längs s' zu einem anderen Ergebnis führen als diejenige längs s. Dagegen stimmen die Endorientierungen überein, wenn sich s in s' auf der Zerlegungsfläche deformieren läßt. Ist insbesondere s eine geschlossene Kurve der Zerlegungsfläche, so sind die beiden Fälle möglich, daß die Orientierung der Faser bei Durchlaufung von s erhalten bleibt oder sich umkehrt. Je nachdem der erste oder zweite Fall eintritt, erteilen wir der Kurve s den *Wert* $+1$ oder -1. Da sich der Wert einer geschlossenen Kurve bei Deformation nicht ändert, so kommt jeder Wegeklasse, d. h. jedem Element der Fundamentalgruppe, ein bestimmter Wert zu. Bei aufeinander folgender Durchlaufung zweier Wege a und b, d. h. bei Produktbildung ab der den Wegen entsprechenden Elemente der Fundamentalgruppe, multiplizieren sich die zugehörigen Werte; bei Umkehrung der Durchlaufung, d. h. bei Reziprokenbildung, bleibt der Wert erhalten. Hieraus folgt, daß der Wert einer Kurve sogar schon durch die Homologieklasse bestimmt ist. Denn jede nullhomologe Kurve hat den Wert $+1$, weil das ihr entsprechende Element der Fundamentalgruppe der Kommutatorgruppe dieser Gruppe angehört, also Produkt von Kommutatoren ist, und jeder Kommutator $ab \cdot a^{-1}b^{-1}$ den Wert $+1$ hat. Man kennt daher die Bewertung aller Kurven, wenn man sie für ein fundamentales Kurvensystem (Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe), ja sogar, wenn man sie für eine Basis der Homologiegruppe kennt.

Eine Zerlegungsfläche, in der man die Bewertung aller geschlossenen Kurven kennt, heißt eine *bewertete Zerlegungsfläche*. Beispiele solcher finden sich im § 7. Wir erwähnen noch, daß ein orientierbarer, wirbelgefaserter Raum sehr wohl eine nichtorientierbare Zerlegungsfläche haben kann und umgekehrt (Beispiel S. 745).

Jede geschlossene Kurve der Zerlegungsfläche, die einer Randkurve homolog ist, hat den Wert $+1$. Das ist klar, wenn die Randkurve nicht markiert ist, denn dann entspricht jedem Punkt der Randkurve selbst eine Faser. Diese Fasern bilden aber eine orientierbare Randringfläche in F, auf der sich die Orientierung einer Faser nicht umkehrt, also kehrt sich auch auf jeder zu einer solchen Randkurve homologen, ganz im Innern der Zerlegungsfläche verlaufenden Kurve die Faserorientierung nicht um. Da durch das Identifizieren von Punkten einer Randfaser die inneren Fasern von f nicht berührt werden, so bleibt der Wert $+1$ auch nach dem Identifizieren erhalten, gilt also für Kurven, die be-

liebigen, auch ganz oder stückweise markierten Randkurven von f homolog sind.

Die Frage, wieviele Möglichkeiten man für die Bewertung der geschlossenen Kurven einer geschlossenen Fläche hat, die bewertete Zerlegungsfläche eines geschlossenen (ohne Wirbellinien) gefaserten Raumes werden soll, ist in Fas. § 8 vollständig beantwortet worden. Bezeichnen wir die Orientierbarkeit bzw. die Nichtorientierbarkeit des gefaserten Raumes mit O bzw. N, diejenige der Zerlegungsfläche mit o bzw. n und die Henkelzahl von f mit h[6]) bzw. die Kreuzhaubenzahl mit k, so lautet das Ergebnis folgendermaßen: In den Fällen $(O\,o\,h)$, $(O\,n\,k)$, $(N\,o\,h)$ gibt es genau eine Bewertung[7]). Im Falle $(N\,n\,k)$ gibt es für $k > 2$ drei verschiedene Bewertungen, die durch die Symbole $(N\,n\,\mathrm{I}\,k)$, $(N\,n\,\mathrm{II}\,k)$, $(N\,n\,\mathrm{III}\,k)$ unterschieden werden; für $k = 2$ existiert nur $(N\,n\,\mathrm{I}\,2)$ und $(N\,n\,\mathrm{II}\,2)$, für $k = 1$ nur noch $(N\,n\,\mathrm{I}\,1)$. Im Falle $(O\,o\,h)$ sind die sämtlichen Kurven der orientierbaren Zerlegungsfläche f mit $+1$ bewertet, im Falle $(O\,n\,k)$ dagegen nur diejenigen, längs deren die Flächenorientierung erhalten bleibt.

Durch Anbringung von w Löchern mit markierten oder unmarkierten Randkreisen ändert sich an den Bewertungsmöglichkeiten nichts, da die Kurven, die ein Loch umlaufen, wie wir sahen, den Wert $+1$ haben, denselben, den sie vor Anbringung des Loches hatten, weil sie vordem nullhomolog sind.

Wir können also die topologische Struktur (Orientierbarkeitscharakter, Geschlecht, Ränderzahl) und die Bewertung der Zerlegungsfläche f eindeutig durch die Symbole

$(O\,o\,h\,w)$, $(O\,n\,k\,w)$, $(N\,o\,h\,w)$, $(N\,n\,\mathrm{I}\,k\,w)$, $(N\,n\,\mathrm{II}\,k\,w)$, $(N\,n\,\mathrm{III}\,k\,w)$

festlegen. Nicht dagegen kommt in den Symbolen die Markierung der Ränder, sowie die Lage und Art der Ausnahmepunkte (§ 5) zum Ausdruck.

§ 5.

Ausnahmefasern.

Ein orientierbarer berandeter gefaserter Raum mit fester Orientierung bestimmt für jede Faserumgebung eine Orientierung. Damit sind nach § 1 die Zahlen μ und ν für jede Faserumgebung eindeutig fesgelegt. Daß die so erhaltenen Zahlen μ, ν unabhängig von der Auswahl der Faserumgebung einer betrachteten Faser sind, liegt daran, daß man je

---

[6]) In Fas. wird die Henkelzahl einer orientierbaren Fläche mit p bezeichnet. Wir ersetzen diesen Buchstaben durch den jetzt üblichen h.

[7]) Zwei bewertete Flächen, die sich mit Erhaltung der Bewertung topologisch aufeinander abbilden lassen, gelten als nicht verschieden.

zwei Faserumgebungen durch eine fasertreue Deformation unter Festhaltung der mittleren Faser ineinander überführen kann (Fas. S. 164). Durch die Orientierung des Raumes sind sie für jede Faser eindeutig bestimmt[8]). Sie heißen die *charakteristischen Zahlen* der Faser. In einem nichtorientierbaren Raum läßt sich für die einzelnen Faserumgebungen keine einheitliche Orientierung festlegen. Wir orientieren dann die Faserumgebungen unabhängig voneinander, und zwar jede so, daß $0 \leqq \nu \leqq \frac{\mu}{2}$ wird[9]).

Ist $\mu > 1$, so heißt die Faser eine μ-fache Ausnahmefaser des wirbelgefaserten Raumes, für $\mu = 1$ eine gewöhnliche Faser. Die Punkte, in die sich Ausnahmefasern in der Zerlegungsfläche abbilden, heißen *Ausnahmepunkte*. In der bewerteten Zerlegungsfläche eines orientierbaren orientierten oder eines nichtorientierbaren wirbelgefaserten Raumes tragen wir diese ein und geben die charakteristischen Zahlen μ, ν an. Ausnahmefasern sind im geschlossenen wirbelgefaserten Raum ebenso wie im ohne Wirbellinien gefaserten nur in endlicher Anzahl vorhanden (Fas. S. 158).

§ 6.
Faserinvarianten.

Wir beweisen nun einen wichtigen Satz, der im wesentlichen aussagt, daß der wirbelgefaserte Raum durch seine bewertete markierte und mit ihren Ausnahmepunkten versehene Zerlegungsfläche bestimmt ist.

Hauptsatz I^0. *Es seien zwei orientierbare mit fester Orientierung versehene wirbelgefaserte berandete oder geschlossene Räume F und F' mit ihren Zerlegungsflächen f und f' gegeben. Wir setzen über die Zerlegungsflächen voraus:*

I. *Daß sie sich mit Erhaltung der Bewertung ihrer geschlossenen Kurven topologisch aufeinander abbilden lassen.*

II. *Die Randkreislinien der beiden Flächen sollen sich aufeinander so beziehen lassen, daß entsprechende die gleiche Anzahl von markierten Stücken (Wirbelstücken) enthalten, oder beide vollständig markiert sind.*

III. *Die Ausnahmepunkte sollen sich so zuordnen lassen, daß entsprechende die gleichen charakteristischen Zahlen μ, ν haben.*

Diese drei Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, daß sich F und F' mit Erhaltung der Orientierung fasertreu aufeinander abbilden lassen.

---

[8]) Bei Umorientierung des gefaserten Raumes würden die Zahlen μ, ν übergehen in μ, $\mu - \nu$.

[9]) Für $\mu > 2$ ist dadurch die Orientierung jeder Faserumgebung eindeutig festgelegt.

Beweis. Daß die Bedingungen I. bis III. notwendig für die Abbildbarkeit von F und F' sind, ist klar. Wir setzen daher im folgenden voraus, daß die Zerlegungsflächen f und f' diese Bedingungen erfüllen, und beweisen die Abbildbarkeit von F und F' zunächst für eine Reihe von Spezialfällen.

1. f (und demnach f') besitze keinen Ausnahmepunkt, und es sei nur ein einziger, und zwar ein nichtmarkierter Randkreis vorhanden. f ist also die einmal gelochte orientierbare Fläche vom Geschlecht (Henkelzahl) h oder die nichtorientierbare vom Geschlecht (Kreuzhaubenzahl) k. Für diesen Fall ist der Beweis in Fas. S. 173 geführt worden. Der berandete gefaserte Raum ist dort als *Klassenraum* bezeichnet worden. Die Klassenräume sind vollständig durch die Symbole auf S. 734 charakterisiert, in denen man $w = 1$ zu setzen hat; z. B. gibt es danach für eine einmal gelochte Fläche vom Geschlecht h bzw. k eine und nur eine Bewertung von der Art, daß der zugehörige Klassenraum orientierbar ist.

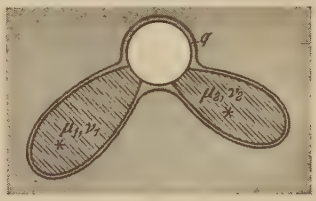


Fig. 7.

2. Die Zerlegungsfläche f sei eine Kreisscheibe mit höchstens einem Ausnahmepunkt der charakteristischen Zahlen μ, ν und unmarkiertem Rand. Der gefaserte Raum ist alsdann nach Fas. S. 162 ein orientierter gefaserter Vollring mit den charakteristischen Zahlen μ, ν.

3. f besitze einen einzigen unmarkierten Randkreis q und beliebig viele Ausnahmepunkte. Wir schneiden durch untereinander punktfremde Kurven, die von dem Randkreis q ausgehen und dort enden, je einen Ausnahmepunkt aus. In der Fig. 7 sind zwei Ausnahmepunkte gezeichnet und die ausgeschnittenen Flächenstücke sind schraffiert. Die Restfläche ist eine einmal gelochte Fläche ohne Ausnahmepunkte; der Lochrand ist in der Figur doppelt umfahren. Ihr kommt also nach 1. ein eindeutig bestimmter berandeter gefaserter Raum zu. Jedes ausgeschnittene Flächenstück, das einen Ausnahmepunkt enthält, stellt eine Kreisscheibe dar ohne Randmarkierung. Über ihr erhebt sich nach 2. ein gefaserter Vollring mit den charakteristischen Zahlen μ, ν. Man hat damit den berandeten gefaserten Raum in den Klassenraum und gefaserte Vollringe zerlegt. Und es fragt sich nur, ob man, wenn diese Teile gegeben sind, den Raum auf eindeutige Weise aus ihnen zusammensetzen kann. Die

Bausteine, nämlich der Klassenraum und die gefaserten Vollringe, haben dabei eine vorgegebene Orientierung. Der Klassenraum hat mit jedem der Vollringe einen aus Fasern bestehenden Kreisring gemeinsam. Man hat also den ersten Vollring auf den Klassenraum längs eines gefaserten Randkreisringes so aufzusetzen, daß die Orientierung der beiden Teilräume durch den gemeinsamen Kreisring hindurch kohärent[10]) ist. Wie man dabei den gemeinsamen Kreisring auf dem Klassenraum wählt, ist für den entstehenden Raum gleichgültig, da man einen von einer Ringfläche berandeten gefaserten Raum so auf sich fasertreu mit Erhaltung der Orientierung abbilden kann, daß ein beliebig gefaserter Randkreisring in einen beliebigen anderen übergeht. Das gleiche gilt für die Wahl des Kreisringes auf dem Vollring. Ferner ist für den entstehenden Raum gleichgültig, wie man die beiden Kreisringe fasertreu aufeinander abbildet, denn jede die Flächenorientierung erhaltende fasertreue Selbstabbildung der Randringfläche eines gefaserten Vollringes läßt sich fasertreu in den Vollring fortsetzen (Fas. S. 167). Danach wird ebenso der zweite Vollring auf den damit gewonnenen von einer Ringfläche berandeten Raum aufgeklebt und so fort. So werden die beiden Räume F und F' in gleicher Weise von dem gemeinsamen Klassenraum ausgehend aufgebaut.

4. Hieraus folgt der Satz für den allgemeineren Fall, daß die Zerlegungsfläche w ($\geqq 1$) Randkreise und beliebig viele Ausnahmepunkte enthält. Schließt man nämlich $w-1$ der Randkreise durch Elementarflächenstücke, so gehört zu der neuen Zerlegungsfläche nach 3. ein eindeutig bestimmter gefaserter Raum. Aus diesem leitet sich ein Raum mit der gegebenen Zerlegungsfläche ab, wenn man $w-1$ gewöhnliche Fasern ausbohrt, d. h. die inneren Fasern einer Faserumgebung fortläßt. Wie man die $w-1$ auszubohrenden Fasern und ihre Faserumgebungen wählt, das ist für den entstehenden Raum gleichgültig (Fas. S. 165).

5. Wir gehen jetzt zum allgemeinsten Fall über, wo es sich um zwei wirbelgefaserte (berandete oder unberandete) orientierbare und fest orientierte Räume F und F' handelt. Läßt man in den beiden Zerlegungsflächen f und f' die Markierungen auf den Randkreislinien fort, so erfüllen sie immer noch die Bedingungen I. bis III. Es gehört also zu ihnen nach 4. ein eindeutig bestimmter berandeter gefaserter Raum $\bar{F}$. Aus diesem leiten sich die gegebenen wirbelgefaserten Räume F und F' durch Identifizieren der Punkte der markierten Fasern ab Man hat also etwa auf der ersten Randringfläche von F die Fasern von ϱ_1 punktfremden Kreisringen, auf der zweiten die von ϱ_2 ebensolchen zu Punkten zu identifizieren usw. Unter Umständen sind auch alle Fasern einer Rand-

[10]) Seifert-Threlfall, Topologie (1934), S. 88.

ringfläche zu identifizieren. Die Fig. 8 zeigt den Fall, daß die Zerlegungsfläche drei Randkreislinien hat. Es ist $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 2$, während die dritte Randkreislinie vollständig stark markiert ist. Außerdem sind zwei Ausnahmepunkte gezeichnet, und es wird angenommen, daß es sich um eine dreifach gelochte Ringfläche (Rechteck mit paarweiser Seitenzuordnung) handelt. — Da man den berandeten gefaserten Raum $\bar{F}$ mit Erhaltung der Orientierung fasertreu so auf sich abbilden kann, daß die Randringflächen sich in vorgegebener Weise permutieren (Fas. S. 165), so ist es für den entstehenden wirbelgefaserten Raum gleichgültig, auf welche der Randringflächen wir die Fasern von ϱ_1 Kreisringen, auf welcher die von ϱ_2 ebensolchen zu Punkten identifizieren usw., und natürlich auch wie wir die aus Fasern bestehenden Kreisringe auf den Randringflächen auswählen. Daher stimmen die beiden Räume F und F' überein.

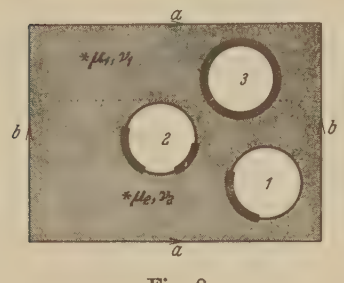


Fig. 8.

Wir wenden uns nun einem nichtorientierbaren wirbelgefaserten Raum zu. Da in ihm keine einheitliche Raumorientierung festgelegt werden kann, so lassen sich auch die Faserumgebungen nicht übereinstimmend orientieren. Wir wählen die Orientierung einer jeden Faserumgebung gemäß unserer Festsetzung von S. 735 stets so, daß $0 \leqq \nu \leqq \frac{\mu}{2}$ wird. Mit Rücksicht auf diese Festsetzung gilt der Hauptsatz I^O auch für nichtorientierbare Räume.

Hauptsatz I^N. *Zwei nichtorientierbare berandete oder unberandete wirbelgefaserte Räume F und F' lassen sich dann und nur dann fasertreu aufeinander abbilden, wenn I. sich ihre Zerlegungsflächen f und f' topologisch mit Erhaltung der Bewertung ihrer geschlossenen Kurven aufeinander abbilden lassen, wenn II. die Randkreislinien sich so aufeinander beziehen lassen, daß entsprechende gleichviel markierte Stücke tragen, und wenn III. die Ausnahmepunkte einander so zugeordnet werden können, daß entsprechende die gleichen charakteristischen Zahlen haben.*

Beweis: 1. Der Satz gilt, wenn in den Zerlegungsflächen kein Ausnahmepunkt und nur ein Randkreis vorhanden ist, der überdies nicht markiert ist. Für diesen Fall ist der Satz in Fas. S. 173 bewiesen worden. Der Raum wird als Klassenraum bezeichnet.

2. Wir beweisen den Satz für Zerlegungsflächen mit einem einzigen, und zwar unmarkierten Rand und beliebig vielen Ausnahmepunkten. Wir schneiden wie unter 3. des vorigen Beweises die Ausnahmepunkte einzeln aus; die Restfläche ist eine einfach gelochte Fläche ohne Aus-

nahmepunkte und mit bekannter Bewertung. Es gehört also zur Restfläche nach 1. ein bestimmter Klassenraum. Auf seine Randringfläche haben wir, wie beim vorigen Beweise, längs gefaserter Kreisringe die gefaserten Vollringe der Reihe nach aufzukleben, die sich über den ausgeschnittenen Flächenstücken mit je einem Ausnahmepunkt erheben. Wieder ist die Wahl der beiden aufeinander zu klebenden gefaserten Kreisringe K_1 und K_2 auf der Randringfläche des Klassenraums und des ersten gefaserten Vollrings gleichgültig. Dagegen hat man je vier wesentlich verschiedene Möglichkeiten, K_1 und K_2 aufeinander abzubilden, da über die Orientierung nichts festgesetzt ist. Zeichnet man nämlich in K_1 und ebenso in K_2 eine bestimmte Flächenorientierung und eine bestimmte Faserorientierung aus, so läßt sich K_1 und K_2 mit Erhaltung oder mit Umkehrung der Flächenorientierung bzw. Faserorientierung abbilden. Wenn man die Flächenorientierung erhält, so ist es gleichgültig, ob man die Faserorientierung erhält oder umkehrt, da man den gefaserten Vollring so fasertreu mit Erhaltung der Oberflächenorientierung auf sich abbilden (umkippen) kann, daß sich die Faserorientierung umkehrt. Ob man aber bei fester Faserorientierung die Flächenorientierung des Kreisrings erhält oder umkehrt, das ist für das Ergebnis deshalb gleichgültig, weil man einen nichtorientierbaren von einer Ringfläche berandeten gefaserten Raum so auf sich fasertreu abbilden kann, daß die Randringfläche ihre Orientierung umkehrt. Man schließt, um dies zu beweisen, die Randringfläche durch einen gewöhnlich gefaserten Vollring V, deformiert diesen fasertreu in dem nunmehr geschlossenen gefaserten Raum so, daß er auf einer geschlossenen Kurve herumgeführt wird, längs deren sich die Raumorientierung umkehrt. Nach seiner Rückkehr in die Anfangslage hat sich seine räumliche Orientierung, also auch seine Flächenorientierung umgekehrt. Entfernt man jetzt die inneren Fasern von V wieder, so erhält man die gewünschte Selbstabbildung (Fas. S. 190).

Nachdem man so aus dem Klassenraum und dem ersten Vollring in eindeutiger Weise einen neuen von einer Ringfläche berandeten Raum gewonnen hat, setzt man an diesen den zweiten Vollring an und fährt so fort. Da man F' in analoger Weise aufbauen kann und nach jedem Schritt dasselbe Ergebnis erhält, stimmen F und F' überein.

Für einen geschlossenen wirbelgefaserten Raum F ist die Bedingung II. eine Folge von I. F ist also charakterisiert durch die bewertete Zerlegungsfläche und die Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ der Ausnahmefasern, und läßt sich somit vollständig beschreiben durch die auf S. 734 eingeführten Symbole für die bewertete Zerlegungsfläche, denen man noch die Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ zufügt. Z. B. bezeichnet

$$(O\,o\,h\,w\,|\,\mu_1,\ \nu_1;\ \ldots;\ \mu_r,\ \nu_r)$$

einen eindeutig bestimmten orientierbaren gefaserten Raum mit $w \geqq 1$ Wirbellinien und $r \geqq 0$ Ausnahmefasern der charakteristischen Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ, dessen Zerlegungsfläche orientierbar vom Geschlecht h ist. Wir erinnern daran, daß die Zahlen μ, ν bei orientierbaren Räumen die Bedingung $0 < \nu < \mu$, bei nichtorientierbaren dagegen $0 < \nu \leqq \frac{\mu}{2}$ erfüllen.

Die vorhergehenden Untersuchungen gelten nur, falls $w > 0$ ist. Treten keine Wirbellinien auf und ist der gefaserte Raum geschlossen, so ist seine Charakterisierung weniger einfach; dieser Fall ist in Fas. vollständig behandelt worden.

§ 7.

Beispiele.

Wir geben jetzt einige Beispiele wirbelgefaserter Räume und ihrer Zerlegungsflächen.

1. Die Zerlegungsfläche sei ein Elementarflächenstück mit einem Ausnahmepunkt der charakteristischen Zahlen μ, ν mit vollständig markiertem Rand (Fig. 9).

Die Bewertung der Kurven brauchen wir nicht besonders anzugeben, da alle Kurven nullhomolog sind, also mit $+1$ bewertet sind. Wäre der Rand des Elementarflächenstücks nicht markiert, so hätte man als zugehörigen orientierten gefaserten Raum (nach Fas. S. 162) einen orientierten Vollring mit der Ausnahmefaser μ, ν. Den Punkten des Randes entsprechen dabei Fasern auf der Oberfläche des Vollrings. Die Markierung des Randes gibt uns aber an, daß den Randpunkten im wirbelgefaserten Raum nicht Fasern sondern Punkte der Wirbellinien entsprechen sollen. Der wirbelgefaserte Raum geht also aus dem Vollring durch Identifizieren der einzelnen Fasern der Oberfläche zu je einem Punkte hervor. Wir denken uns wieder den gefaserten Vollring als einen geraden durch achsenparallele Strecken gefaserten Kreiszylinder, dessen Grund- und Dachfläche durch den Winkel $2\pi \frac{\nu}{\mu}$ verschraubt zugeordnet sind, und führen dort die Identifizierung von je μ eine Faser bildenden Mantellinien des Kreiszylinders zu einem Punkte durch. Man erkennt, daß man eine Linse erhält, deren Kalotten um den Winkel $2\pi \frac{\nu}{\mu}$ verdreht spiegelbildlich zur Deckung gebracht sind. Die scharfe Kante der Linse ist die Wirbellinie. Es ist dies der *wirbelgefaserte Linsenraum* (μ, ν). Die Linse ist rotationssymmetrisch zu ihrer Achse gefasert. In Fig. 10 haben wir einen ebenen Schnitt durch diese Achse gezeichnet. Für die geschlossenen wirbelgefaserten Räume haben wir auf S. 739 die Invarianten aufgestellt. Der

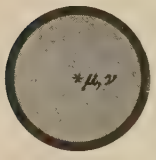


Fig. 9.
Linsenraum (μ, ν).

wirbelgefaserte Linsenraum ist ein orientierbarer Raum, der als Zerlegungsfläche die einfach gelochte ($w = 1$) Kugelfläche ($h = 0$) besitzt. Es existiert ein Ausnahmepunkt μ, ν. Seine Invarianten sind also:

$$(O\,o,\ h = 0,\ w = 1\,|\,\mu,\ \nu).$$

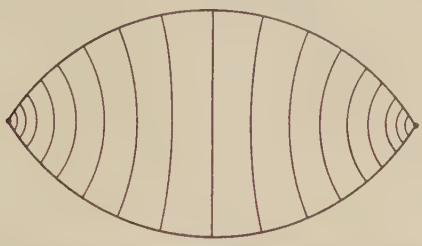


Fig. 10. Schnitt durch die (vertikale) Achse einer wirbelgefaserten Linse.

Ist $\mu = 1$, d. h. besitzt die Zerlegungsfläche keinen Ausnahmepunkt, dann sind die Kalotten der Linse unverschraubt spiegelbildlich zuzuordnen. Der Raum ist die wirbelgefaserte Hypersphäre (Zerlegungsfläche Fig. 11). Als Invarianten erhält man:

$$(O\,o,\quad h = 0,\quad w = 1\,|\,-).$$

2. Die Zerlegungsfläche sei ein Kreisring ohne Ausnahmepunkte. Da die Randkurven nach S. 733 mit $+1$ zu bewerten sind und jede geschlossene Kurve homolog einem Vielfachen einer Randkurve ist, so sind alle geschlossenen Kurven mit $+1$ zu bewerten. Die Bewertung ist mithin eindeutig gegeben.

Fig. 11. Hypersphäre.

Fig. 12. Topologisches Produkt aus Kreisring und Kreislinie.

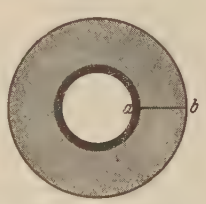


Fig. 13. Wirbelvollring.

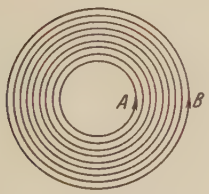


Fig. 14. Gefaserter Kreisring über $\overline{a\,b}$ der Fig. 13.

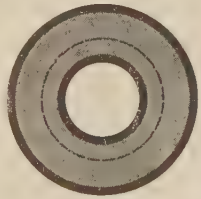


Fig. 15. Topologisches Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche (orientierbarer Henkel).

Sind beide Randkreise unmarkiert (Fig. 12), so ist der zugehörige berandete gefaserte Raum das topologische Produkt aus Kreisring und Faser, denn dieser berandete gefaserte Raum hat zur Zerlegungsfläche einen Kreisring mit unmarkierten Rändern, und nach dem Hauptsatz gibt es nur einen Raum, der zu dieser bewerteten Zerlegungsfläche gehört.

Ist nur der innere Randkreis und zwar voll markiert, so betrachten wir einen radialen Schnitt $\overline{ab}$ (Fig. 13). Über ihm erhebt sich ein gefaserter Kreisring mit den Randkreisen A und B (Fig. 14). Die Faser A ist jetzt in einen Punkt zusammenzuziehen. Der Kreisring geht dadurch in eine Kreisscheibe über, die durch konzentrische Kreise gefasert ist. Da jedem solchen Radius eine gefaserte Kreisscheibe entspricht, so ist der berandete gefaserte Raum das topologische Produkt aus der gefaserten Kreisscheibe und einer Kreislinie, also ein Wirbelvollring (§ 2), dessen Zerlegungsfläche durch Fig. 13 dargestellt ist.

Markiert man beide Randkreise der Zerlegungsfläche (Fig. 15), so hat man beide Fasern A und B zu je einem Punkt zusammenzuziehen. Man erhält eine Kugelfläche, die durch Breitenkreise gefasert ist. Der entstehende Raum ist ein geschlossener wirbelgefaserter Raum, nämlich das topologische Produkt aus Kugelfläche und Kreislinie; es enthält zwei geschlossene Wirbellinien. Seine Invarianten sind:

$$(O\,o, \quad h = 0, \quad w = 2\,|\,-).$$

Man kann das eben erhaltene topologische Produkt aus Kugelfläche und Kreislinie auch folgendermaßen gewinnen. Man zerteile die Zerlegungsfläche (durch die in Fig. 15 gestrichelte Linie) in zwei Kreisringe vom Typus der Fig. 13. Der Raum zerfällt dementsprechend in zwei Wirbelvollringe, deren Oberflächen fasertreu aufeinandergesetzt sind.

3. Die Zerlegungsfläche sei eine Kreisscheibe ohne Ausnahmepunkt, deren Randkreis zur Hälfte markiert ist. In der Fig. 16 ist die topologische Kreisscheibe als Halbkreisfläche gezeichnet; der Durchmesser $\overline{ns}$ ist das markierte Stück. Man erhält den zugehörigen wirbelgefaserten Raum offenbar, wenn man die Halbkreisfläche um den markierten Durchmesser rotieren läßt. Die Fasern sind die Bahnkurven der Punkte. Es handelt sich also um die wirbelgefaserte Vollkugel (§ 2).

Hat man allgemein eine Zerlegungsfläche eines wirbelgefaserten Raumes, in der auf einem Randkreis ein Teilbogen markiert ist (Fig. 17), so kann man die Faserung in der Umgebung des Randkreises sich in verschiedener Weise entstanden denken, entweder wie bisher durch das Identifizieren der Punkte der entsprechenden Randfasern, oder aber man denkt sich das markierte Stück zu einem vollständig markierten Randkreis ergänzt (Fig. 18) und aus der diesem entsprechenden Wirbellinie

eine wirbelgefaserte Vollkugel ausgeschnitten. In der Zerlegungsfläche zeigt sich dies darin, daß man von der ganz markierten Kreislinie ein Elementarflächenstück mit halbmarkiertem Rand abschneidet (linker Halbkreis der Fig. 18). Es entsteht ein berandeter gefaserter Raum, der zum Rand (evtl. unter anderen Flächen) eine durch Breitenkreise gefaserte Kugelfläche hat, wie wir sie bereits in § 2 kennengelernt haben. So stellen z. B. die Fig. 19, 20 die Zerlegungsflächen eines Linsenraumes, aus dem eine Kugel ausgebohrt ist (*einfach gelochter* Linsenraum), bzw. eines topologischen Produktes aus Kreislinie und Kugelfläche, aus dem eine Kugel ausgebohrt ist (*einfach gelochtes* topologisches Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche) dar.

Fig. 16.
Wirbelgefaserte Vollkugel.

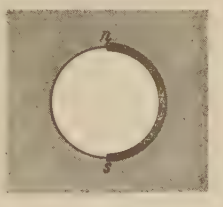


Fig. 17.

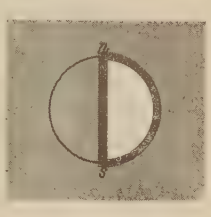


Fig. 18.

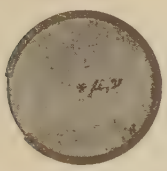


Fig. 19. Einfach gelochter Linsenraum (μ, ν)

Fig. 20. Einfach gelochtes topologisches Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche (gelochter orientierbarer Henkel).

Fig. 21. Zweifach gelochte Hypersphäre (Hohlkugel)

Läßt man einen Kreisring um einen Durchmesser rotieren, so entsteht eine wirbelgefaserte Hohlkugel. Fasern sind die Bahnkurven der Punkte, Wirbelstücke die beiden im Inneren der Hohlkugel verlaufenden Strecken des Durchmessers. Die Zerlegungsfläche ist eine Kreisscheibe, von deren Rand zwei punktfremde zusammenhängende Teile markiert sind (Fig. 21). Nach Obigem ist dies aber auch die Zerlegungsfläche einer zweifach gelochten wirbelgefaserten Hypersphäre. Die wirbelgefaserte Hohlkugel und die zweifach gelochte wirbelgefaserte Hypersphäre sind nach dem Hauptsatz daher gleich, was man auch unmittelbar einsieht.

Fig. 22 stellt schließlich noch die Zerlegungsfläche einer achtfach gelochten Hypersphäre dar.

Schneidet man aus einer Zerlegungsfläche einen vollständig markierten Randkreis durch einen Kreisring heraus, so entspricht dem im Raum das Herausnehmen eines Wirbelvollrings. Wir sehen, daß jede Wirbellinie als „Umgebung" einen Wirbelvollring hat.

4. Die Zerlegungsfläche f ist die gelochte projektive Ebene; der Lochrand sei markiert, es seien keine Ausnahmepunkte vorhanden. Wir denken uns f (Fig. 23) als Kreisring, bei dem ein Randkreis markiert ist, während bei dem anderen Randkreis Diametralpunkte zu identifizieren sind. Der letzte Rand ist also auf der Fläche eine zweimal durchlaufene

Fig. 22.
Achtfach gelochte Hypersphäre.

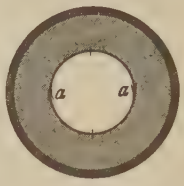


Fig. 23. a mit $+1$ bewertet = Dreidimensionales Analogon zur nichtorientierbaren Ringfläche (nichtorientierbarer Henkel), a mit -1 bewertet: Topologisches Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche (orientierbarer Henkel).

Kurve a. Zur Bewertung der Fläche genügt es, die Kurven eines Erzeugendensystems der Homologiegruppe zu bewerten (vgl. S. 733). In unserem Falle wird nun die Homologiegruppe von a erzeugt und hat die definierende Relation $2a \sim 0$. Die Bewertung der Fläche ist damit durch die Bewertung von a festgelegt. Es gibt zwei Fälle: a ist mit $+1$ oder -1 bewertet. Daß es für die gelochte ($w = 1$) projektive Ebene ($k = 1$) nur zwei Bewertungsmöglichkeiten gibt, wissen wir schon von S. 734; dort haben wir sie mit

$$(On,\ k = 1,\ w = 1) \quad \text{und} \quad (N\,n\,\mathrm{I},\ k = 1,\ w = 1)$$

bezeichnet.

Sehen wir von der Diametralpunktidentifizierung des einen Randkreises zunächst ab, so ist die Zerlegungsfläche der S. 741 behandelte Kreisring (Fig. 13) mit nur einem markierten Randkreis. Als zugehörigen Raum hatten wir den Wirbelvollring gefunden. Die Fasern seiner Oberfläche (Meridiane) entsprechen den Punkten des nichtmarkierten Randes. Die gelochte projektive Ebene f geht aus dem Kreisring durch Identifizieren der Diametralpunkte des nichtmarkierten Randes hervor. Die zu f gehörigen Räume wird man also aus dem Wirbelvollring durch Identifizieren von je zwei diametral gegenüberliegenden Meridiankreisen der Oberfläche gewinnen. Das Identifizieren kann mit Erhaltung oder Umkehrung der Faserorientierung erfolgen; dies richtet sich nach der

Bewertung der Zerlegungsfläche. Ist a mit $+1$ bewertet, so geschieht es mit Erhaltung der Orientierung. Dies kommt der Identifizierung von Diametralpunkten auf den Breitenkreisen des Wirbelvollrings gleich. Der Raum ist das dreidimensionale Analogon zur nichtorientierbaren Ringfläche (Kleinschem Schlauch)[11]. Seine Invarianten sind:

$$(N\,n\,\mathrm{I},\ k = 1,\ w = 1\,|\,-).$$

Ist a mit -1 bewertet, so werden die Meridiane mit Umkehrung der Orientierung zugeordnet. Es ergibt sich das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche, das diesmal mit nur einer Wirbellinie gefasert auftritt. Seine Invarianten sind:

$$(O\,n,\ k = 1,\ w = 1\,|\,-).$$

Das so gefaserte Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche ist ein Beispiel für einen orientierbaren wirbelgefaserten Raum mit nichtorientierbarer Zerlegungsfläche.

Man kann die beiden Wirbelfaserungen des topologischen Produktes aus Kreislinie und Kugelfläche und die des wirbelgefaserten dreidimensionalen Analogons zur nichtorientierbaren Ringfläche auch aus der wirbelgefaserten Hohlkugel ableiten. Wir bezeichnen die Endpunkte der Wirbelstücke mit n, n' und s, s', wobei n und s die Punkte auf der äußeren Randkugelfläche seien, und wir orientieren die Randkugelflächen so, daß die äußere orientierte Randkugelfläche durch ähnliche Vergrößerung aus der inneren orientierten hervorgeht, wofür man auch sagen kann, daß die beiden orientierten Randkugelflächen homolog in der Hohlkugel werden.

a) Das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche.

Man erhält es aus einer Hohlkugel dadurch, daß die beiden Randkugelflächen mit Erhaltung der Orientierung aufeinander abgebildet werden. Nehmen wir in der wirbelgefaserten Hohlkugel die Zuordnung der Randkugelflächen fasertreu vor, so sind noch zwei wesentlich verschiedene Abbildungsmöglichkeiten vorhanden. Entweder fallen nämlich die Punkte n und n' (s und s') oder n und s' (n' und s) der Wirbelstücke aufeinander. Im ersten Falle ist das entstehende topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche mit zwei Wirbellinien, im zweiten Falle mit einer Wirbellinie gefasert. Daß diese Faserungen mit der auf S. 742 und der oben hergeleiteten übereinstimmen, sieht man an ihren Zerlegungsflächen. Die Zerlegungsfläche der wirbelgefaserten Hohlkugel war eine Kreisscheibe mit zwei markierten Randstücken (Fig. 21). Die Identifizierung der

[11] H. Seifert, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, Ber. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig 83 (1931), S. 49.

Randkugelflächen in der Hohlkugel wirkt sich in der Zerlegungsfläche im Identifizieren der beiden nichtmarkierten Teile des Randes aus. Im ersten Falle erhalten wir einen Kreisring mit vollständig markierten Rändern, im zweiten eine gelochte projektive Ebene (= Möbiusband) mit vollständig markiertem Lochrand. Zur ersten Fläche gibt es aber als zugehörigen wirbelgefaserten Raum nur das mit zwei Wirbellinien gefaserte topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche (S. 742). Im zweiten Falle sind zwar noch zwei Bewertungsmöglichkeiten der Zerlegungsfläche denkbar, aber nur eine bestimmt eine Wirbelfaserung des topologischen Produkts aus Kreislinie und Kugelfläche. Die andere bestimmt, wie wir sahen, das wirbelgefaserte dreidimensionale Analogon zur nichtorientierbaren Ringfläche.

b) Das dreidimensionale Analogon zur nichtorientierbaren Ringfläche.

Es geht entsprechend aus einer Hohlkugel durch Abbildung der Randkugelflächen mit Umkehrung der Orientierung hervor. Auch hier kann die fasertreue Abbildung der Kugelflächen auf zwei verschiedene Weisen vorgenommen werden. Entweder fallen dabei die Punkte n und s' (n' und s) oder n und n' (s und s') zusammen. Im ersten Falle erhält man die Wirbelfaserung des dreidimensionalen Analogons zur nichtorientierbaren Ringfläche von S. 745. Daß die Zerlegungsfläche die gelochte projektive Ebene wird, erkennt man genau wie unter a). Im zweiten Falle ergibt sich kein wirbelgefaserter Raum. Die Wirbelstücke schließen sich zu einer geschlossenen Kurve, die deshalb keine Wirbellinie sein kann, da sie keinen Wirbelvollring als „Umgebung" (vgl. S. 744) besitzt. Die „Umgebung" ist ein Kreiszylinder, der durch die Bahnkurven seiner Punkte bei der Rotation um seine Achse gefasert ist und dessen Grund- und Dachfläche mit Umkehrung der Orientierung einander zuzuordnen sind[12]).

Wir bezeichnen im folgenden das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche kurz als *orientierbaren Henkel*, das dreidimensionale Analogon zur nichtorientierbaren Ringfläche als *nichtorientierbaren Henkel*.

§ 8.

Summenbildung.

Der Hauptsatz des § 6 setzt uns in den Stand, die topologische Struktur der wirbelgefaserten Räume vollständig zu überblicken.

Wir beschränken uns der Kürze wegen auf einen geschlossenen wirbelgefaserten Raum F, der w ($\geqq 1$) Wirbellinien enthält. Die Zerlegungsfläche f ist dann eine von w vollständig markierten Randkreisen

[12]) Über die hier auftretende Faserung vgl. Anhang.

berandete bewertete orientierbare oder nichtorientierbare Fläche von der Henkelzahl h bzw. Kreuzhaubenzahl k, die r Ausnahmepunkte auf sich trage. Wir zeichnen einen Randkreis q aus und schneiden Elementarflächenstücke, die den Randkreis q längs je eines Bogenstückes berühren und nur je einen Ausnahmepunkt enthalten, aus der Fläche heraus. Ebenso schneiden wir durch gelochte Elementarflächenstücke, die wieder an q längs eines Bogenstückes angrenzen und nur einen Randkreis enthalten, die übrigen $w-1$ Randkreise aus. Die Fig. 24 zeigt den Fall zweier Randkreise ($w=2$) und eines Ausnahmepunktes ($r=1$); die ausgeschnittenen Stücke sind schraffiert und die Fläche ist als Ringfläche (Rechteck mit identifizierten Gegenseiten) gedacht, während die Bewertung etwa dadurch festgelegt sei, daß alle geschlossenen Kurven den Wert $+1$ erhalten.

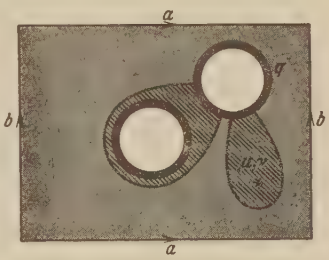


Fig. 24.

Die gegebene Zerlegungsfläche f zerfällt danach in r Zerlegungsflächen vom Typus § 7, Fig. 19, in $w-1$ Zerlegungsflächen vom Typus § 7, Fig. 20, und eine Restfläche f_0. Diese enthält keinen Ausnahmepunkt und einen einzigen Randkreis, auf dem $r+w-1$ Stücke markiert sind. F zerfällt dementsprechend in r wirbelgefaserte einfach gelochte Linsenräume $\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_r$, in $w-1$ wirbelgefaserte einfach gelochte orientierbare Henkel $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_{w-1}$ und in einen $(r+w-1)$-fach gelochten wirbelgefaserten Restraum $\bar{F}_0$. Die Lochränder sind jetzt wirbelgefaserte Kugelflächen, die man mit wirbelgefaserten Vollkugeln (§ 7, Fig. 16) schließen kann. Dadurch entstehen aus den gelochten Räumen $\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_r$, $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_{w-1}, \bar{F}_0$ geschlossene wirbelgefaserte Räume $L_1, \ldots, L_r$ (wirbelgefaserte Linsenräume, die eine Wirbellinie und eine Ausnahmefaser μ_ϱ, ν_ϱ ($\varrho = 1, \ldots, r$) enthalten), $P_1, \ldots, P_{w-1}$ (wirbelgefaserte orientierbare Henkel, die zwei Wirbellinien und keine Ausnahmefasern enthalten und alle fasertreu aufeinander abbildbar sind) und F_0 (ein mit einer einzigen Wirbellinie gefaserter Restraum ohne Ausnahmefasern). Die Zerlegungsfläche von F_0 ist eine einmal gelochte Fläche f_0, die aus f hervorgeht, wenn man alle Ausnahmepunkte und alle Randkreise bis auf einen fortläßt und die Bewertung beibehält. Sieht man davon ab, daß der eine Randkreis markiert ist, was dem Ausbohren der Wirbellinie gleichkommt, so ist der ausgebohrte, also von einer gefaserten Ringfläche berandete Raum, der so entsteht, ein Klassenraum im Sinne von Fas. S. 173.

Wir verstehen unter der topologischen Summe zweier geschlossener dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 die geschlossene Mannig-

faltigkeit M, die man erhält, wenn man aus jeder eine kleine Kugel ausbohrt und die Ränder der kugelförmigen Löcher aufeinander auf eine der zwei, durch die Orientierungen wesentlich verschiedenen Arten, abbildet und die ineinander abgebildeten Punkte identifiziert. Sind M_1 und M_2 orientierbar und orientiert, so ist die Summenbildung eindeutig durch die Forderung bestimmt, daß die Orientierung sich durch die Randkugelfläche kohärent fortsetzen lasse.

Dann haben wir das Ergebnis gewonnen:

Satz II. *Jeder* w ($\geqq 1$) *Wirbellinien enthaltende wirbelgefaserte geschlossene Raum ist die topologische Summe von* r *(wirbelgefaserten) orientierten Linsenräumen* $L_1, \ldots, L_r$, *deren topologische Struktur im allgemeinen verschieden sein wird, und* $w-1$ *orientierbaren Henkeln* $P_1, \ldots, P_{w-1}$ *(die alle mit zwei Wirbellinien gefasert sind und daher faserтreu aufeinander abbildbar sind) und einem (mit einer einzigen Wirbellinie gefaserten) orientierbaren oder nichtorientierbaren Restraum* F_0, *der ein mit einem Wirbelvollring geschlossener Klassenraum ist.*

Der Satz II bezieht sich auf die topologische Struktur der wirbelgefaserten geschlossenen Räume als bloße Punktmannigfaltigkeiten. Die darin vorkommenden Begriffe der Summenbildung, der Linsenräume, der orientierbaren Henkel sind unabhängig von jeder Faserung definiert. Wir haben daher die auf die Faserung bezogenen Angaben in Klammern gesetzt.

Sind die Summanden einschließlich ihrer Faserung gegeben, so ist durch sie der ganze Raum eindeutig bestimmt. Man schneide nur aus jedem der Summanden eine Wirbelvollkugel heraus und bilde dann die topologische Summe, indem man die Randkugelflächen der kugelförmigen Löcher fasertreu aufeinander abbildet und ineinander abgebildete Punkte identifiziert. Wenn alle Summanden orientierbar sind, so ist F einschließlich seiner Orientierung bestimmt. Wo man in den einzelnen Summanden die Wirbelvollkugel herausnimmt und wie man zwei zugeordnete kugelförmige Ränder aufeinander abbildet, ist deshalb belanglos, weil man immer dieselbe bewertete Zerlegungsfläche, dieselben Ausnahmefasern μ_ϱ, ν_ϱ, dieselbe Zahl w der Wirbellinien erhält, die nach dem Hauptsatz von § 6 den wirbelgefaserten Raum eindeutig festlegen. Ist F nichtorientierbar, so könnte man zwei zugeordnete kugelförmige Lochränder noch mit oder ohne Erhaltung ihrer Orientierung abbilden. Unabhängig von dieser Auswahl ist aber die bewertete Zerlegungsfläche, und ebenso sind es die normierten charakteristischen Zahlen der Ausnahmefasern. Nach dem Hauptsatz ist also auch jetzt das Ergebnis der Summenbildung eindeutig.

Die topologische Struktur der wirbelgefaserten Räume ist somit einfacher als diejenige der ohne Wirbellinien gefaserten Räume, die in Fas.

untersucht wurden. Durch Anbringung einer einzigen Wirbellinie zerfällt ein im Sinne von Fas. gefaserter Raum in eine topologische Summe einfacher uns bekannter Räume, unter denen nur die Struktur des Restraumes F_0 noch einer weiteren Zerlegung bedarf (§ 9). Gewissermaßen die Umkehrung dieses Ergebnisses ist der

Satz III. *Die topologische Summe zweier geschlossener Räume, die sich mit* w ($\geqq 1$) *Wirbellinien fasern lassen, ist wieder wirbelfaserbar.*

Zum Beweise hat man nur aus den beiden Räumen je eine Wirbelvollkugel auszubohren und die beiden wirbelgefaserten Randkugelflächen aufeinander abzubilden.

Das Analogon zu Satz III für ohne Wirbellinien gefaserte geschlossene Räume (Fas. S. 229) gilt nicht. Es läßt sich im allgemeinen vielmehr die Summe von zwei ohne Wirbellinien gefaserten geschlossenen Räumen nicht ohne Wirbellinien fasern.

Nach Satz II zerfällt ein geschlossener wirbelgefaserter Raum in Linsenräume, orientierbare Henkel und einen Restraum. Alle diese Teilräume lassen sich nun mit einer einzigen Wirbellinie fasern. (Für den orientierbaren Henkel siehe S. 745). Ihr Summenraum ist also ebenfalls mit einer Wirbellinie faserbar. Damit ergibt sich

Satz IV. *Jede dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die sich wirbelfasern läßt, läßt sich insbesondere mit nur einer Wirbellinie fasern.*

§ 9.

Der Restraum.

Wir haben einen geschlossenen wirbelgefaserten Raum mit r Ausnahmefasern und w ($\geqq 1$) Wirbellinien als Summe von r Linsenräumen und $w-1$ orientierbaren Henkeln und einem Restraum F_0 dargestellt. F_0 war ein mit einer Wirbellinie gefaserter Raum. Seine bewertete Zerlegungsfläche f_0 ist die einmal gelochte bewertete Fläche der Henkelzahl h bzw. der Kreuzhaubenzahl k. Der Rand des Loches ist markiert.

Wir werden zeigen, daß auch F_0 sich als topologische Summe einfacher bekannter Räume darstellen läßt.

I. Zunächst werde der Fall behandelt, daß f_0 orientierbar, also eine einmal gelochte Fläche der Henkelzahl h ist. Eine solche läßt sich nun als Kreisscheibe mit $2h$ angesetzten Bändern b_i ($i = 1, 2, \ldots, 2h$) darstellen. Der Rand der Fläche besteht aus einer geschlossenen Linie, dem Lochrand, fällt also mit der Wirbellinie zusammen. Fig. 25 zeigt eine gelochte Fläche der Henkelzahl 2 (Doppelringfläche). Schneiden wir die angesetzten Bänder b_i längs Kurven α_i durch. Die Fläche wird ein Elementarflächenstück, dessen Rand bis auf die $4h$ Kurvenstücke α_i', α_i''

markiert ist. α_i' und α_i'' sind die Teile des Randes, die von dem Schnitt längs α_i herrühren (vgl. Fig. 26). Nach S. 743 wissen wir, daß dies die Zerlegungsfläche einer $4h$-fach gelochten Hypersphäre ist. Aus dem Elementarflächenstück erhält man die Zerlegungsfläche f_0 zurück durch Identifizieren der Randkurvenstücke α_i' und α_i''. Den Restraum F_0 können wir uns daher als $4h$-fach gelochte Hypersphäre darstellen, bei der noch die α_i' und α_i'' entsprechenden Kugelflächen A_i' und A_i'' paarweise zu identifizieren sind. Die $4h$-fach gelochte Hypersphäre können wir nun

Fig. 25.

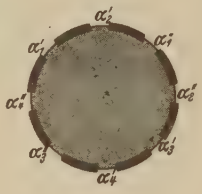


Fig. 26.

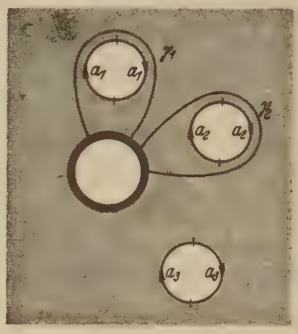


Fig. 27.

als Summe von $2h$ Hohlkugeln K_i (zweifach gelochte Hypersphären) auffassen. Dabei richten wir es so ein, daß die Hohlkugel K_i von A_i' und A_i'' berandet wird. K_i ist kein wirbelgefaserter Raum. Je nachdem in K_i die Kugelflächen A_i' und A_i'' mit Erhaltung oder Umkehrung der Orientierung zugeordnet sind, erhält man den orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Henkel (vgl. S. 745, 746).

Wir bekommen daher: Der Restraum F_0 ist die topologische Summe aus orientierbaren und nichtorientierbaren Henkeln.

II. Ist die Zerlegungsfläche f_0 nichtorientierbar von der Kreuzhaubenzahl k, so kann man sie als gelochte Kugel mit k Kreuzhauben darstellen, also als eine Kugel mit $k+1$ Löchern, wo auf den Rändern von k der Löcher Diametralpunkte zu identifizieren sind und der Rand des letzten Loches markiert ist und der Wirbellinie entspricht. Wir teilen nun die Kugelfläche durch Kurven γ_i $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ in k Gebiete so auf, daß in jedem genau eine Kreuzhaube liegt und jedes Gebiet als Teil seines Randes ein endliches Stück der Wirbellinie besitzt. Die Fig. 27 zeigt dies im Falle der gelochten Kugel mit drei aufgesetzten Kreuzhauben ($k = 3$). Der Lochrand ist markiert.

Schneiden wir die Kugel längs der gezogenen Kurven γ_i auf, so erhalten wir k gelochte projektive Ebenen; bei jeder ist ein Teil des Lochrandes markiert. Nach S. 744 können als zugehörige Räume je nach der

Bewertung entweder der mit einer Wirbellinie gefaserte gelochte orientierbare oder nichtorientierbare Henkel auftreten.

Auch wenn f_0 nichtorientierbar ist, gilt also der auf S. 750 für orientierbare Zerlegungsflächen ausgesprochene Satz:

Der Restraum F_0 ist die topologische Summe aus orientierbaren und nichtorientierbaren Henkeln.

Da der geschlossene wirbelgefaserte Raum topologische Summe von Linsenräumen, orientierbaren Henkeln und einem Restraum F_0 ist, so ist hiernach F in Linsenräume, orientierbare und nichtorientierbare Henkel aufgespalten. Ist F orientierbar, so kommen offenbar nichtorientierbare Henkel nicht in Frage. Ist F nichtorientierbar, so tritt mindestens ein nichtorientierbarer Henkel auf, und man kann alle orientierbaren Henkel beseitigen nach folgendem

Hilfsatz. *Die topologische Summe aus einem nichtorientierbaren und einem orientierbaren Henkel ist homöomorph der topologischen Summe zweier nichtorientierbarer Henkel.*

Beweis. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Räume als Hohlkugeln (zweifach gelochte Hypersphären) mit den Randkugelflächen A'_O und A''_O im Falle des orientierbaren Henkels, A'_N und A''_N im Falle des nichtorientierbaren Henkels. Diese Hohlkugeln schließen sich, wenn man die Randkugelflächen A'_O und A''_O mit Erhaltung und A'_N und A''_N mit Umkehrung der Orientierung einander zuordnet, zum orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Henkel (vgl. S. 745, 746). Die Summe können wir uns vorstellen als vierfach gelochte Hypersphären mit den Randkugelflächen A'_O, A''_O, A'_N und A''_N. Wir identifizieren nun A'_N und A''_N. Dann erhalten wir einen nichtorientierbaren Raum. Auf A'_O kleben wir eine Vollkugel auf, führen diese auf einem geschlossenen Weg, der die Orientierung umkehrt, herum und nehmen sie nun wieder heraus. Die Orientierung von A'_O hat sich dabei umgekehrt. Die Identifizierung von A'_O und A''_O muß nun also mit Umkehrung der Orientierung geschehen. Damit haben wir offenbar denselben Raum erhalten, der sich bei Summenbildung von zwei nichtorientierbaren Henkeln ergibt.

Wir müssen nun noch ermitteln, wieviel und welche der Bausteine (Linsenräume, orientierbare oder nichtorientierbare Henkel) in einem bestimmten Raum F vorkommen. F habe w Wirbellinien und r Ausnahmefasern μ_ϱ, ν_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$). Bei dem Abbau von F zu F_0 treten r Linsenräume $(\mu_\varrho, \nu_\varrho)$ und $w - 1$ orientierbare Henkel auf (Satz II). Bei der Zerlegung von F_0 (vgl. S. 750) traten bei orientierbarer Zerlegungsfläche von F_0 (Henkelzahl h) $2h$ orientierbare oder nichtorientierbare Henkel auf. Bei nichtorientierbarer Zerlegungsfläche (Kreuzhaubenzahl k) ergaben sich k orientierbare oder nichtorientierbare Henkel.

Daraus folgt zusammen mit dem Hilfsatz

Satz V (Summensatz). *In einem geschlossenen wirbelgefaserten Raum F sei*

$w (\geqq 1)$ *die Anzahl der Wirbellinien,*

$r \geqq 0$ *die Anzahl der Ausnahmefasern,*

h bzw. k das Geschlecht der orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Zerlegungsfläche, dann ist F topologische Summe von r Linsenräumen und $2h + w - 1$ bzw. $k + w - 1$ Henkeln, die je nach dem Orientierbarkeitscharakter von F alle orientierbar oder alle nichtorientierbar sind.

Ist F orientierbar, so ist die Struktur der Linsenräume einschließlich ihrer Orientierung durch die normierten charakteristischen Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ mit $0 < \nu_\varrho < \mu_\varrho$ bestimmt. Dadurch ist die Summenbildung auf Grund der Forderung kohärenter Orientierung eindeutig gemacht. Bei nichtorientierbarem F kommt es auf die Orientierung der Linsenräume entsprechend der Normierung der charakteristischen Zahlen durch die Ungleichung

$$0 < \nu_\varrho \leqq \frac{\mu_\varrho}{2}$$

nicht an.

Die Fundamentalgruppe von F ist hiernach leicht zu ermitteln. Denn die Fundamentalgruppe einer topologischen Summe ist das freie Produkt der Fundamentalgruppen der Summanden[13]).

Die Fundamentalgruppe des Linsenraums $(\mu_\varrho, \nu_\varrho)$ ist die zyklische Gruppe der Ordnung μ_ϱ, die Fundamentalgruppe des Henkels die freie zyklische Gruppe. Somit gilt

Satz VI. *Die Fundamentalgruppe des geschlossenen wirbelgefaserten Raumes F ist das freie Produkt von r zyklischen Gruppen der Ordnung μ_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ und $2h + w - 1$ bzw. $k + w - 1$ freien zyklischen Gruppen.*

Die Fundamentalgruppe und damit die Homologiegruppe besteht dann und nur dann aus dem Einselement, wenn $2h + w - 1 = 0$ bzw. $k + w - 1 = 0$ ist und keine Ausnahmefasern auftreten. Daraus folgt $h = k = 0$, $w = 1$, $r = 0$. Das Symbol des gefaserten Raumes kann also nur lauten:

$$(O\, o,\ h = 0,\ w = 1 \,|\, -).$$

Das ist aber die wirbelgefaserte Hypersphäre. Daher gilt

Satz VII. *Der einzige wirbelgefaserte geschlossene Raum, dessen Homologiegruppe aus dem Einselement allein besteht, ist die Hypersphäre, und diese läßt sich nur auf eine Weise wirbelfasern.*

---

[13]) H. Seifert, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, Ber. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig 83 (1931), S. 36.

Es gibt also insbesondere keine wirbelfaserbaren Poincaréschen Räume. Für geschlossene wirbelfrei faserbare Räume gilt dieser Satz nicht. Denn erstens läßt sich die Hypersphäre auf unendlich viele Weisen wirbelfrei fasern und zweitens gibt es unendlich viele wirbelfrei faserbare Poincarésche Räume. Dazu gehört z. B. der sphärische Dodekaederraum. Dagegen gilt der Satz, daß unter den geschlossenen Räumen, deren Fundamentalgruppe aus dem Einselement allein besteht, die Hypersphäre der einzige ist, der sich wirbelfrei fasern läßt.

Wie die Poincaréschen Räume ein Beispiel von Räumen geben, die sich wohl ohne, aber nicht mit Wirbellinien fasern lassen, so ist die topologische Summe zweier orientierbarer Henkel ein Beispiel für einen Raum, der sich mit, aber nicht ohne Wirbellinien fasern läßt (vgl. Fas. S. 230 und diese Arbeit S. 749). Endlich ist die topologische Summe zweier Poincarés cher Räume, deren Fundamentalgruppen nicht beide zugleich aus dem Einselement allein bestehen, weder mit noch ohne Wirbellinien faserbar — nicht ohne nach Fas. S. 229 und nicht mit, weil die Fundamentalgruppe kein freies Produkt von zyklischen Gruppen oder freien Gruppen ist.

Anhang.

Wir hatten bei der Definition der berandeten gefaserten Räume durch Axiom III gefordert, daß die Randflächen orientierbare Ringflächen sind. Wir wollen nun auch berandete gefaserte Räume zulassen, für die das Axiom III dahin abgeändert wird, daß als Randflächen orientierbare und nichtorientierbare Ringflächen auftreten können. Aus solchen berandeten Mannigfaltigkeiten kann man allgemeinere gefaserte geschlossene Räume ableiten, als wie sie in der vorliegenden Arbeit erhalten werden. Es ergibt sich nichts wesentlich Neues. Wir beschränken uns darauf, nur die Ergebnisse anzugeben.

Wir ordnen jedem solchen berandeten gefaserten Raum durch Identifizieren jeder Faser zu einem Punkt eine Zerlegungsfläche zu. Es ist eine gelochte Fläche. Die Lochränder entsprechen den Randringflächen. Genau wie im § 3 können wir die Bewertung der Zerlegungsfläche einführen. Die Lochränder, die orientierbaren Randringflächen zugeordnet sind, sind wieder mit + 1 bewertet, dagegen ist die Bewertung der Lochränder, die nichtorientierbaren Ringflächen zugeordnet sind, — 1. Durch Identifizierung der Randfasern des berandeten gefaserten Raumes zu je einem Punkt erhalten wir einen geschlossenen Raum, den wir wieder als wirbelgefaserten Raum bezeichnen. Die Wirbellinien sind die aus den Randringflächen hervorgehenden geschlossenen Kurven, und zwar unterscheiden wir Wirbellinien erster und zweiter Art, je nachdem die Ring-

flächen, aus denen die Wirbellinien entstehen, orientierbar oder nichtorientierbar sind. In der Zerlegungsfläche deuten wir das Identifizieren der Randfasern wieder durch starkes Markieren der Lochränder an. Die zu einem der Lochränder homologen Kurven sind mit $+1$ oder -1 bewertet, je nachdem der betreffende Lochrand einer Wirbellinie erster oder zweiter Art entspricht. Ein mit Wirbellinien zweiter Art gefaserter Raum ist uns schon in der Faserung des nichtorientierbaren Henkels von S. 746 begegnet. Man erhielt diesen aus einer wirbelgefaserten Hohlkugel, deren Randkugelflächen so orientiert waren, daß die orientierte innere Randkugelfläche durch ähnliche Vergrößerung in die orientierte äußere übergeht, durch geeignetes fasertreues Aufeinanderkleben der Randkugelflächen mit Umkehrung der Orientierung. Seine Zerlegungsfläche wird dann offenbar ein Kreisring, wo die einem Randkreise homologen Kurven mit -1 bewertet sind.

Die Zerlegungsfläche eines geschlossenen wirbelgefaserten Raumes denken wir uns zum gelochten Fundamentalpolygon mit der Seitenfolge

$$a_1\, b_1\, a_1^{-1}\, b_1^{-1} \ldots a_h\, b_h\, a_h^{-1}\, b_h^{-1} \quad \text{bzw.} \quad a_1\, a_1 \ldots a_k\, a_k$$

aufgeschnitten. Den Wirbellinien erster und zweiter Art entsprechen die Ränder der Löcher. In Fig. 28 haben wir die Zerlegungsfläche eines

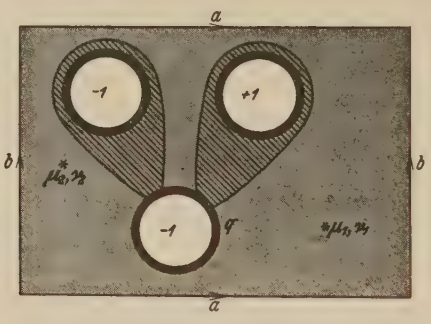


Fig. 28. In der Figur gibt $+1$ und -1 die Bewertung der betreffenden Wirbellinien an.

wirbelgefaserten Raumes gezeichnet, der eine Wirbellinie erster Art und zwei zweiter Art und zwei Ausnahmefasern der charakteristischen Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ $(\varrho = 1, 2)$ besitzt. Einen Lochrand q zeichnen wir aus. Durch Kreisringe, die keine Ausnahmepunkte enthalten, und von denen ein Randkreis ein endliches Stück auf q verläuft, schneiden wir die übrigen Lochränder aus. Ein solcher Kreisring ist, je nachdem die zu seinen Randkreisen homologen Kurven mit $+1$ oder -1 bewertet sind, die Zerlegungsfläche eines gelochten orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Henkels (vgl. S. 744 und 745). Die Restfläche, eine einmal gelochte Fläche, ist Zerlegungsfläche eines wirbelgefaserten Raumes, der keine

Wirbellinien zweiter Art enthält, da eine zum Lochrand homologe Kurve der Seitenfolge

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} \text{ bzw. } a_1 a_1 \dots a_k a_k$$

homolog ist, wo jede Kante zweimal auftritt, also mit + 1 bewertet ist. Man erkennt somit, daß der gesamte Raum die topologische Summe aus einem wirbelgefaserten Raum, der keine Wirbellinien zweiter Art enthält, und orientierbaren und nichtorientierbaren Henkeln ist. Damit gilt auch für diese wirbelgefaserten Räume der Satz, *daß sie topologische Summe aus Linsenräumen und orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Henkeln sind.* Schließt man in der zum gelochten Fundamentalpolygon aufgeschnittenen Fläche alle Lochränder in eine Kurve ein, so ist diese dem Rand des Fundamentalpolygons, also der Seitenfolge

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} \quad \text{bzw.} \quad a_1 a_1 \dots a_k a_k,$$

homolog und daher mit + 1 bewertet. Nun ist diese Kurve aber auch homolog der Summe aller Lochränder und es gilt somit: *Ein wirbelgefaserter Raum enthält stets eine gerade Anzahl Wirbellinien zweiter Art.*

Die Problemstellung verdanken wir den Herren W. Threlfall und H. Seifert in Dresden, die uns auch während der Ausführung der Arbeit hilfreich zur Seite standen.

(Eingegangen am 30. August 1935.)

Über den Einfluß endlich vieler Änderungen auf das Borelsche Limitierungsverfahren.

Von

Viktor Garten in Tübingen.

Bekanntlich bleibt beim Borelschen Limitierungsverfahren, das einer Folge (s_n) den Grenzwert

$$\text{B-lim } s_n = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!} = s$$

allemal dann als verallgemeinerten Grenzwert zuordnet, wenn die angeschriebene Potenzreihe beständig konvergiert und $F(x)$ im Sinne gewöhnlicher Konvergenz gegen eine Zahl s strebt, der Satz über den Einfluß endlich vieler Änderungen nicht erhalten. Während zwar aus B-lim $s_{n+1} = s$ stets B-lim $s_n = s$ folgt, darf, wie das zuerst von G. H. Hardy angegebene Beispiel lehrt, nicht ohne weiteres umgekehrt geschlossen werden[1]). Im folgenden gebe ich eine hinreichende Bedingung[2]) dafür an, daß eine Folge auch nach Tilgung ihres ersten Gliedes B-limitierbar bleibt:

Aus B-lim $s_n = s$ *und* $s_n = O(n^k)$ *folgt* B-lim $s_{n+1} = s$.

Setzt man $s_0 = a_0$, $s_n - s_{n-1} = a_n$ $(n \geqq 1)$, so ist einerseits die Bedingung B-lim $a_{n+1} = 0$ notwendig und hinreichend dafür, daß aus B-lim $s_n = s$ die Behauptung folgt, andererseits hat der erste Teil der Voraussetzung B-lim $a_n = 0$, B-lim $a_{n-1} = 0$, B-lim $a_{n-2} = 0, \ldots$ zur Folge. Daher genügt es offenbar, den Satz in der folgenden Form zu beweisen:

---

[1]) Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 488 und 494, woselbst auch das Hardysche Beispiel angegeben ist.

[2]) J. Karamata hat in einer Note in den Comptes Rendus 193 (1931), S. 1156 bis 1159 unter Zugrundelegung des Borelschen Integrals einige weitere, gleichfalls auf die Glieder $a_n = s_n - s_{n-1}$ der B-summierbaren Reihe bezügliche hinreichende Bedingungen (ohne Beweis) ausgesprochen. Insbesondere genügt danach die einseitige Beschränktheit der a_n oder ihrer ersten Differenzen dafür, daß Tilgung des ersten Gliedes erlaubt ist. — Da jede im oben angegebenen Sinne B-limitierbare Folge s_n zugleich auch nach der Borelschen Integraldefinition limitierbar ist, gilt die hinreichende Bedingung ebenfalls unter Zugrundelegung des Borelschen Integrals.

Aus B-lim $a_n = 0$ *und* $a_n = O(n^k)$ *für ein beliebiges festes positives* k *folgt mit* $A_n^{(p)} = a_{n+1} - \binom{p}{1} a_n + \binom{p}{2} a_{n-1} - + \ldots + (-1)^p a_{n-p+1}$ *für jedes ganzzahlige* $p > 2k$, *daß* B-lim $A_n^{(p)} = 0$ *ist.*

Nach Voraussetzung konvergieren die Potenzreihen

$$f_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-j} \frac{x^n}{n!} \quad (j = -1, 0, 1, \ldots, p-1)$$

beständig, und es ist $e^{-x} f_j(x) = o(1)$ mit $j = 0, \ldots, p-1$ für $x \to +\infty$, während $e^{-x} f_{-1}(x) = o(1)$ bzw.

$$e^{-x} g(x) \equiv e^{-x} \left\{ \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \binom{p}{\nu} f_{\nu-1} \right\} = o(1)$$

gerade den Inhalt der Behauptung ausmacht.

Zum Beweise werde unter θ ein noch in geeigneter Weise zu bestimmender Parameter verstanden und die Zerlegung

$$f_j(x) = \sum_{n=0}^{\alpha-1} a_{n-j} \frac{x^n}{n!} + \sum_{\alpha}^{\beta} + \sum_{\beta+1}^{\gamma} + \sum_{\gamma+1}^{\infty} \equiv S_1^{(j)} + S_2^{(j)} + S_3^{(j)} + S_4^{(j)}$$

mit

$$\alpha = [(1-\theta)x], \quad \beta = [(1+\theta)x], \quad \gamma = [3x], \quad 0 < \theta < \tfrac{1}{2}$$

(für alle $j = -1, 0, \ldots, p-1$ mit demselben θ) ausgeführt.

Bei ganz grober Abschätzung ergibt sich mit $a_n = O(n^k)$ für genügend große x

$$|e^{-x} S_1^{(j)}| < K_1 e^{-x} \frac{x^{k+\alpha+1}}{\alpha!}$$
$$< K_2 \exp\{(k+\tfrac{3}{2}) \log x - \theta x - (1-\theta) x \log(1-\theta)\} \equiv L_1,$$
$$|e^{-x} S_3^{(j)}| < K_3 e^{-x} \frac{x^{k+\beta+1}}{\beta!}$$
$$< K_4 \exp\{(k+\tfrac{3}{2}) \log x + \theta x - (1+\theta) x \log(1+\theta)\} \equiv L_2.$$
$$(K_1, K_2, \ldots \text{konstant}).$$

Wir wählen nunmehr θ so, daß $\theta, \theta^3 x$, L_1 und L_2 gegen Null streben (für $x \to +\infty$), was z. B. die Festsetzung

$$\theta = \left(2(k+2) \frac{\log x}{x}\right)^{1/2}$$

sicher leistet. Beachtet man, daß in $S_4^{(j)}$ $n > 3x$ und also für genügend große x sicher $n > 2k$ ist, so findet man wegen

$$\frac{n^k}{n!} = \frac{n^k}{n(n-1)\ldots(n-k+1)} \frac{1}{(n-k)!} < \frac{n^k}{(n-k)!\,(n-k)^k} < \frac{2^k}{(n-k)!}$$

und nach dem Taylorschen Satze

$$|e^{-x} S_4^{(j)}| < K_5 e^{-x} \sum_{\gamma+1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-k)!} < K_5 e^{-x} x^k \sum_{\gamma-k}^{\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda!}$$

$$< K_5 \frac{x^\gamma}{(\gamma-k)!} e^{\vartheta x - x} < K_6 x^{k+1} \left(\frac{e}{3}\right)^{3x} \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

also alles in allem:

$$e^{-x} S_1^{(j)} = o(1), \quad e^{-x} S_3^{(j)} = o(1), \quad e^{-x} S_4^{(j)} = o(1) \quad (j = -1, \ldots, p-1).$$

Mit Rücksicht auf die Voraussetzung haben wir aber $e^{-x} f_j(x) = o(1)$ für $j = 0, 1, \ldots, p-1$ und daher auf Grund der soeben gewonnenen Abschätzungen für dieselben j auch $e^{-x} S_2^{(j)} = o(1)$. Es bleibt noch zu zeigen, daß hieraus tatsächlich

$$e^{-x} S_2^* \equiv e^{-x} \sum_{\nu=0}^{p} (-1)^\nu \binom{p}{\nu} S_2^{(\nu-1)} = o(1)$$

und damit $e^{-x} S_2^{(-1)} = o(1)$ folgt.

Wegen $a_n = O(n^k)$ ist zunächst

$$e^{-x} S_2^* = e^{-x} \sum_{n=\alpha}^{\beta} A_n^{(p)} \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_{n=\alpha}^{\beta} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} h_n^{(p)} + o(1)$$

mit

$$h_n^{(p)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu \binom{p}{\nu} \frac{x^\nu}{n(n+1)\ldots(n+\nu-1)} \qquad (\alpha \leqq n \leqq \beta).$$

Ein Vergleich dieses Ausdruckes mit $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^p$ legt die Vermutung nahe, daß auch $h_n^{(p)} = O(\theta^p)$ gilt. Für $p = 2$ haben wir in der Tat

$$h_n^{(2)} = 1 - 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^2 - \frac{1}{n+1}\frac{x^2}{n^2} = O(\theta^2) + O\left(\frac{1}{x}\right) = O(\theta^2).$$

Angenommen, die Vermutung sei für alle positiven ganzen Zahlen $\leqq p$ richtig; dann bestätigt man sie leicht folgendermaßen auch für $p+1$. Es ist nämlich zunächst wegen $\binom{p+1}{\nu} - \binom{p}{\nu} = \binom{p}{\nu-1}$

$$(1) \qquad h_n^{(p)} - h_n^{(p+1)} = \frac{x}{n} \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu \binom{p}{\nu} \frac{x^\nu}{(n+1)\ldots(n+\nu)} = \frac{x}{n} h_{n+1}^{(p)}$$

und entsprechend

$$(2) \quad h_n^{(p)} - h_{n+1}^{(p)} = \frac{p}{n} \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu \binom{p-1}{\nu-1} \frac{x^\nu}{(n+1)\ldots(n+\nu)} = \frac{p}{n} (h_{n+1}^{(p)} - h_{n+1}^{(p-1)}).$$

Die Formel (1) liefert aber bei Ersetzung von p durch $p-1$

$$h_{n+1}^{(p-1)} = \frac{n}{x} (h_n^{(p-1)} - h_n^{(p)})$$

und dies wieder in Verbindung mit (2) wegen $\frac{1}{x} < \theta^2$

$$\left(1 + \frac{p}{n}\right) h_{n+1}^{(p)} = h_n^{(p)} + \frac{p}{x}\,(h_n^{(p-1)} - h_n^{(p)}) = h_n^{(p)} + O(\theta^{p+1}).$$

Hieraus und aus (1) gewinnen wir die behauptete Abschätzung

$$h_n^{(p+1)} = \left(1 - \frac{x}{n+p}\right) h_n^{(p)} + O(\theta^{p+1}) = O(\theta^{p+1})$$

und mit Rücksicht auf die Bedeutung von θ schließlich

$$|a_n h_n^{(p)}| < K_7 \frac{(\log x)^{p/2}}{x^{\frac{p}{2}-k}},$$

woraus aber für $p > 2k$ sofort $e^{-x} S_2^* = o(1)$ und damit die Behauptung folgt.

(Eingegangen am 13. September 1935).

Die mehrfachen Punkte der Linearscharen auf einer algebraischen Kurve.

Von

Harald Geppert in Gießen.

Eine umfangreiche Klasse geometrischer Fragen läßt sich auf die Aufgabe zurückführen, die mehrfachen Punkte einer Linearschar von Punktgruppen, die von einem linearen Kurvensystem auf einer algebraischen Kurve C ausgeschnitten werden, zu bestimmen. Diese Aufgabe zerfällt in zwei Teile, einmal die Ermittelung der Anzahl der gesuchten Punkte, und zweitens ihre geometrische Kennzeichnung, etwa durch Angabe einer Kurve, die sie auf C ausschneidet — man denke z. B. an die Wendepunkte und ihre Bestimmung mittels der Hesseschen Kurve; beide Teilfragen sind lange gelöst. Bei der Berechnung der Anzahl ist jeder Punkt, wie immer in der algebraischen Geometrie, mit einem gewissen Gewichte σ zu zählen; wir entwickeln ein rasches Verfahren, um die Formel für σ zu finden, und benutzen diese, um weiterhin festzustellen, wie groß die Anzahl N der *voneinander verschiedenen* mehrfachen Punkte ist. Über die leicht erkennbare Feststellung hinaus, daß auf nichtrationalen Kurven $N \geqq 2$ sein muß, lassen sich schärfere untere Schranken für N gewinnen, wenn die betrachtete Linearschar vollständig ist; dann erlaubt die Anwendung des Riemann-Rochschen und des verschärften Cliffordschen Satzes die Ableitung von Formeln, die besonders dann von Belang sind, wenn es sich um die kanonische Schar und ihre Vielfachen, also um die Weierstraßpunkte der Kurve und deren Verallgemeinerung handelt. Um die Darstellung geschlossen zu gestalten, behandeln wir den gesamten Fragenkreis.

1.

$f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2) \ldots f_r(x_1, x_2)$ seien linear unabhängige, homogene Polynome n-ten Grades von x_1, x_2. Dann gelten die Eulerschen Identitäten:

$$n(n-1)\ldots(n-r+1) f_i \equiv x_1^r \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} + \binom{r}{1} x_1^{r-1} x_2 \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1}\partial x_2} + \ldots + \binom{r}{r} x_2^r \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r},$$

$$(n-1)\ldots(n-r+1)\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \equiv x_1^{r-1}\frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} + \binom{r-1}{1} x_1^{r-2} x_2 \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1}\partial x_2} + \ldots + \binom{r-1}{r-1} x_2^{r-1} \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1 \partial x_2^{r-1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n-r+1)\frac{\partial^{r-1} f_i}{\partial x_1^{r-1}} \equiv x_1 \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} + \binom{1}{1} x_2 \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1}\partial x_2}.$$

Daher folgt die Determinantenidentität[1]):

$$\left\| f_i; \frac{\partial f_i}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} \right\| \equiv (-1)^{\frac{1}{2}r(r+1)}$$

$$\cdot \{n(n-1)^2(n-2)^3 \ldots (n-r+1)^r\}^{-1} \cdot x_2^{\frac{1}{2}r(r+1)} \left\| \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r}; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\},$$

oder

$$\left\| \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r}; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\|$$

$$(1) \qquad \equiv (-1)^{\frac{1}{2}r(r+1)} \{n(n-1)^2(n-2)^3 \ldots (n-r+1)^r\} x_2^{-\frac{1}{2}r(r+1)} \left\| f_i; \frac{\partial f_i}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial^r f}{\partial x} \right.$$

$$\equiv \{n(n-1)^2(n-2)^3 \ldots (n-r+1)^r\} x_1^{-\frac{1}{2}r(r+1)} \left\| f_i; \frac{\partial f_i}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\|.$$

2.

Auf einer Geraden h mit den homogenen Koordinaten x_1, x_2 sei eine r-stufige lineare Schar von Gruppen zu je n Punkten, g_n^r, durch die Gleichung

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2) + \ldots + \lambda_r f_r(x_1, x_2) = 0$$

mit den veränderlichen Gruppenparametern $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gegeben. Da je r beliebige Punkte von h stets einer Gruppe der g_n^r angehören, kann jeder Punkt r-facher Punkt in einer ihn enthaltenden Gruppe sein; dagegen gibt es, falls $r < n$ ist, besondere Punkte, die in einer sie enthaltenden Gruppe mindestens $(r+1)$-fach zu zählen sind; in ihnen gelten die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^k \partial x_2^{r-k}} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, r);$$

sie bestimmen sich also aus der Gleichung $(r+1) \cdot (n-r)$-ten Grades

$$(2) \qquad \left\| \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r}; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\| = 0.$$

(2) kann unter unseren Voraussetzungen nicht identisch erfüllt sein; denn wäre dies der Fall, so müßte gemäß (1) gelten:

$$\left\| f_i; \frac{\partial f_i}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} \right\| \equiv 0, \quad \left\| f_i; \frac{\partial f_i}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\| \equiv 0,$$

woraus man Beziehungen der Form

$$f_0 = \sum_{i=1}^{r} c_i f_i; \quad \frac{\partial^k f_0}{\partial x_1^k} = \sum_{i=1}^{r} c_i \frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^k}; \quad \frac{\partial^k f_0}{\partial x_2^k} = \sum_{i=1}^{r} c_i \frac{\partial^k f_i}{\partial x_2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

[1]) Wir schreiben von jeder $(r+1)$-reihigen Determinante die allgemeine Zeile des Zeigers i, der von 0 bis r läuft, hin.

entnimmt; daraus wiederum folgt durch schrittweise Ableitung:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial c_i}{\partial x_1} f_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial c_i}{\partial x_1} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^k} = 0,$$

und

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial c_i}{\partial x_2} f_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial c_i}{\partial x_2} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_2^k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r-1),$$

also ist entweder

$$\left\| \frac{\partial^{r-1} f_i}{\partial x_1^{r-1}}; \frac{\partial^{r-1} f_i}{\partial x_1^{r-2} \partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^{r-1} f_i}{\partial x_2^{r-1}} \right\| \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, r),$$

und dann genau so weiter zu schließen, oder $\frac{\partial c_i}{\partial x_1} = \frac{\partial c_i}{\partial x_2} = 0$, c_i konstant.

In beiden Fällen gelangt man zum Ergebnis, daß aus dem identischen Erfülltsein von (2) die lineare Abhängigkeit der $f_0 \ldots f_r$ mit konstanten Koeffizienten folgt.

Auf einer Geraden besitzt danach jede g_n^r $(r+1)(n-r)$ $r+1$-fache Punkte; diese bilden eine Punktgruppe γ. Nach den Grundsätzen der algebraischen Geometrie wird ein Punkt von γ mehrfach zu zählen sein; diese Vielfachheit wollen wir bestimmen. Wir legen jedem Punkte P von h eine Folge von Zeigern $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_r$ bezüglich der g_n^r zu, die folgende Bedeutung haben: P ist ein ν_0-facher Festpunkt der g_n^r, d. h. zählt in allen Gruppen derselben mit der Vielfachheit ν_0; P ist ν_1-facher Festpunkt einer in g_n^r enthaltenen Schar g_n^{r-1}; P ist ν_2-facher Festpunkt einer in dieser g_n^{r-1} enthaltenen $g_n^{r-2}, \ldots$; P ist ν_r-facher Punkt einer Gruppe g_n^0, und die Zahlen ν_i sind dabei die jeweils höchstmöglichen Zahlen. Nach dieser Erklärung ist

$$0 \leqq \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r \leqq n. \tag{3}$$

Man kann die Darstellung der g_n^r so wählen, daß die durch die Gleichung

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2) + \ldots + \lambda_{r-k} f_{r-k}(x_1, x_2) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots r)$$

dargestellte Schar g_n^{r-k} gerade diejenige ist, die P zum ν_k-fachen Festpunkt hat. Legt man P nach $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, so wird man setzen:

$$f_{r-k}(x_1, x_2) \equiv x_1^{\nu_k} \bar{f}_{r-k}(x_1, x_2) \qquad (k = 0, 1, \ldots, r),$$

wobei keine der Funktionen $\bar{f}_{r-k}$ den Faktor x_1 enthält. Aus (1) ergibt sich dann

$$\left\| \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r}; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\| \equiv n(n-1)^2 (n-2)^3 \ldots (n-r+1)^r$$
$$\cdot x_1^{(\nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_r) - \frac{1}{2} r(r+1)} \left\| \bar{f}_i; \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r \bar{f}_i}{\partial x_2^r} \right\|, \quad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

d. h. der Punkt P ist in γ mit der Vielfachheit

$$\sigma = \nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_r - \tfrac{1}{2} r(r+1) = \sum_{i=0}^{r} (\nu_i - i) \tag{4}$$

zu zählen, sobald wir gezeigt haben, daß die Determinante

$$\left\| \bar{f}_i; \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r \bar{f}_i}{\partial x_2^r} \right\| \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

den Faktor x_1 nicht enthält; dies ist aber klar, denn nach Annahme können wir setzen

$$\bar{f}_i(x_1, x_2) = a_{i,0}\, x_2^{n-\nu_r-i} + a_{i-1,1}\, x_2^{n-\nu_r-i-1}\, x_1 + \ldots;\ a_{i,0} \neq 0,$$

und die Determinante

$$\| x_2^{n-\nu_i}; (n-\nu_i)\, x_2^{n-\nu_i-1}; \ldots; (n-\nu_i)(n-\nu_i-1)\ldots(n-\nu_i-r+1)\, x^{n-\nu_i-r} \|$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}r(r+1)} \cdot x_2^{(n-\frac{r}{2})(r+1)-(\nu_0+\ldots+\nu_r)} \cdot \prod_{i<j} (\nu_j - \nu_i)$$

verschwindet gemäß (3) für $x_2 \neq 0$ nicht. *Die genaue Vielfachheit eines Punktes von h in der Gruppe γ ist also stets durch* (4) *gegeben.*

In dieser Aussage sind einige Sonderfälle enthalten; ein „gewöhnlicher" Festpunkt von g_n^r der Vielfachheit ν_0 besitzt die Zeiger: $\nu_1 = \nu_0 + 1$, $\nu_2 = \nu_0 + 2, \ldots, \nu_r = \nu_0 + r$, und zählt daher in γ für $\nu_0(r+1)$ $(r+1)$-fache Punkte der g_n^r. Es kann ferner vorkommen, daß in g_n^r eine Gruppe enthalten ist, die einen Punkt der Vielfachheit $s > r+1$ besitzt; treten keine Besonderheiten ein, so hat dieser die Zeiger $\nu_0 = 0, \nu_1 = 1, \ldots, \nu_{r-1} = r-1$; $\nu_r = s$, und er zählt in γ mit der Vielfachheit $s - r$.

Nach (3) und (4) ist der Höchstwert, den σ erreichen kann: $\sigma = (n-r)(r+1)$; er entspricht den Zeigern: $\nu_0 = n-r$, $\nu_1 = n-r+1$, $\ldots$, $\nu_r = n$, d. h. dem Falle eines $n-r$-fachen Festpunktes der g_n^r. *Nur in diesem Falle eines $n-r$-fachen Festpunktes werden alle $(r+1)$-fachen Punkte der g_n^r von einem einzigen Punkte aufgesaugt; in jedem andern Falle, insbesondere bei festpunktfreien Scharen g_n^r $(r < n)$, gibt es mindestens zwei verschiedene $(r+1)$-fache Punkte.*

3.

Die angeführten Tatsachen gelten auch auf jeder rationalen Kurve, sofern man die Erklärung der Zeiger ν_i eines Punktes beibehält und die Vielfachheiten jeweils auf einem Zweige der Kurve zählt. Untersuchen wir die Verhältnisse auf beliebigen irreduziblen algebraischen Kurven, so dürfen wir daher im folgenden das Geschlecht $p \geqq 1$ voraussetzen. Auf einer irreduziblen Kurve C vom Geschlecht p hat eine Linearschar g_n^r $(r \geqq 1)$

$$\varrho = (r+1)[n + r(p-1)] \tag{5}$$

$(r+1)$-fache Punkte; diese Formel ist bekannt[2]), wir kommen auf ihren Beweis am Ende zurück. Denkt man sich die g_n^r auf C von einem linearen Kurvensystem ausgeschnitten, so erkennt man, daß die Vielfachheit, mit der ein Punkt P in der Gruppe γ der $(r+1)$-fachen Punkte zu zählen ist, lediglich von dem Verhalten der Schar und Kurve in der Umgebung von P abhängt; da man in einer Umgebung beliebiger Ordnung von P den Zweig von C durch eine rationale Kurve ersetzen kann; gilt die Vielfachheitsformel (4) in der gleichen Schärfe auch für C. Sie wurde mittels geometrischer Überlegungen in Überräumen von C. Segre[3]) aufgefunden. Wir wollen aus ihr einige Formeln über die *Anzahl N der wirklich verschiedenen* Punkte von γ ableiten.

Der höchste Wert, den σ annehmen kann, entspricht auch auf der allgemeinen C den Zeigern $\nu_0 = n-r$, $\nu_1 = n-r+1, \ldots, \nu_r = n$, d. h. es ist stets

$$\sigma \leqq (r+1)(n-r),$$

mithin

$$N \geqq \frac{n+r(p-1)}{n-r}; \tag{6}$$

auf jeder nichtrationalen Kurve ist demnach $N \geqq 2$; die rationalen Kurven sind durch die Möglichkeit, daß $N = 1$ sein kann, gekennzeichnet. Aber auf nichtrationalen Kurven läßt sich (6) verschärfen; da es auf diesen keine g_n^n geben kann, muß

$$\nu_i \leqq n-r+i-1, \quad (i = 0, \ldots, r-1), \quad \nu_r \leqq n,$$

also

$$\sigma \leqq (n-r-1)(r+1)+1, \quad N \geqq 1 + \frac{(r+1)(rp+1)-1}{(r+1)(n-r-1)+1} \tag{7}$$

sein. Diese Formel kann N genau liefern. Die Wendepunkte einer C_n sind die dreifachen Punkte der von den Geraden ausgeschnittenen g_n^2; ihre Zahl ist $3n+6(p-1)$; die Mindestzahl der verschiedenen Wendepunkte einer C_n nach (7):

$$N \geqq 1 + \frac{6p+2}{3n-8};$$

für die C_3 mit $p = 1$ liefert sie $N \geqq 9$, während zugleich 9 die Gesamtzahl der Wendepunkte ist.

4.

Besonderes Interesse verdienen die Formeln, die sich ergeben, wenn die zugrunde gelegte g_n^r eine Vollschar ist; ist P ein Punkt von γ mit den Zeigern ν_i, so müssen die Scharen $\left| g_n^r - \nu_i \cdot P \right| = \left| g_{n-\nu_i}^{r-i} \right| (i = 0, \ldots, r)$ Vollscharen sein, die P nicht zum Festpunkt haben. Behandeln wir

[2]) A. v. Brill, Math. Annalen 4, (1871), S. 530.

[3]) Annali di Mat. 21 (1894), S. 86—88.

zunächst den Fall, daß $|g_n^r|$ speziell, d. h. in der kanonischen Schar enthalten ist, und C eine nichthyperelliptische Kurve darstellt, also $p \geqq 3$ ist; dann ist entweder die Schar kanonisch, also frei von Festpunkten: $\nu_0 = 0$, oder $1 \leqq r \leqq p-2$. Im letzteren Falle sagt der verschärfte Cliffordsche Satz aus:

$$(8)\quad n - \nu_i \geqq 2r - 2i + 1,\ \nu_i - i \leqq n - 2r + i - 1,\ (i = 0, 1, \ldots, r-1),$$

$$(9)\quad \sigma \leqq (n-2r)(r+1) + \tfrac{1}{2} r(r-1);$$

handelt es sich aber um die kanonische Schar $|g_{2p-2}^{p-1}| = |g_n^r|$, dann gelten die Beziehungen (8) erst von $i = 1$ an, während für $i = 0$: $\nu_0 = 0$, $n = 2r$ ist; an die Stelle von (9) tritt dann

$$(9')\quad \sigma \leqq \sum_{i=1}^{r} (i-1) + 1 = \tfrac{1}{2} r(r-1) + 1 = \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2) + 1.$$

In (9) ist nun, da es sich um eine spezielle Schar handelt, zu setzen:

$$n - r \leqq p - 1,\quad n - 2r \leqq n - r - 1 \leqq p - 2,$$

$$\sigma \leqq \tfrac{1}{2}[(n-2r+n-r-2)(r+1)+2] \leqq \tfrac{1}{2}[(2p-5)(r+1)+2];$$

da andererseits, ebenfalls zufolge des Cliffordschen Satzes, $n \geqq 2r+1$ ist, wird

$$(10)\quad N \geqq \frac{2(r+1)[r(p+1)+1]}{(r+1)(2p-5)+2} = r + \frac{7r(r+1)+2}{(r+1)(2p-5)+2}.$$

Eine spezielle Vollschar $|g_n^r|$, die nicht mit der kanonischen Schar zusammenfällt, hat auf einer nichthyperelliptischen Kurve mindestens $r+1 \geqq n-p+2$ verschiedene $(r+1)$-fache Punkte. Diese Abschätzung läßt sich zu $N \geqq r+2$ verschärfen im Falle, daß die $|g_n^r|$ keine Festpunkte besitzt. Denn dann ist

$$\sigma \leqq r(n-2r) + \tfrac{1}{2} r(r-1) + 1 \leqq r(p-2) + 1,$$

$$N \geqq \frac{(r+1)[r(p+1)+1]}{r(p-2)+1} = r + 1 + \frac{3r(r+1)}{r(p-2)+1}.$$

Hat man es hingegen mit der kanonischen Schar $|g_{2p-2}^{p-1}|$ auf einer nichthyperelliptischen C zu tun, so folgt aus (9'):

$$(10\,a)\quad N \geqq \frac{2p(p^2-1)}{(p-1)(p-2)+2} = 2p + 6 + \frac{8(p-3)}{(p-1)(p-2)+2};$$

die p-fachen Punkte der kanonischen Schar sind die Weierstraß (W)-punkte der Kurve; *die Zahl der verschiedenen W-Punkte einer nichthyperelliptischen Kurve ist mindestens $2p+6$*; diese untere Grenze wird für $p = 3$ bei der kanonischen ebenen C_4: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$, deren W-Punkte die 12 Wendepunkte sind, tatsächlich erreicht. Die Abschätzung (10 a) hat schon C. Segre mittels überräumlicher Betrachtungen gewonnen[4]); sie

[4]) Rendic. Accad. Lincei 8 (1899), S. 89; vgl. auch F. Severi, Trattato di geometria algebrica I, 1, Bologna 1926, S. 167.

verschärft die von Hurwitz[5]) durch die Methode der additiven Moduln gefundene Schranke $2p+2$.

Gehen wir nun zur Untersuchung der speziellen Vollscharen auf einer hyperelliptischen C über, die eine g_2^1 trägt, so können wir uns diese C in üblicher Weise in eine ebene Kurve $p+2$-ter Ordnung mit einem p-fachen Punkt O birational transformiert denken, auf der die g_2^1 von den Geraden durch O ausgeschnitten wird. Nehmen wir zunächst eine $|g_n^r|$ mit Festpunkten; ein ν_0-facher Festpunkt, der nicht Doppelpunkt der g_2^1 ist, hat die Zeiger: $\nu_1 = \nu_0+1, \ldots, \nu_r = \nu_0+r$, für ihn ist also $\sigma = \nu_0(r+1)$; fällt hingegen ein Festpunkt in einen Doppelpunkt der g_2^1, so kommen ihm die Zeiger: $\nu_1 = \nu_0+2, \ldots, \nu_r = \nu_0+2r$ zu, so daß $\sigma = \left(\nu_0+\frac{r}{2}\right)(r+1)$ wird. Jeder Punkt P von γ, der nicht Festpunkt ist, muß schließlich einer der Doppelpunkte der g_2^1 sein, denn sonst gäbe er und sein in g_2^1 Konjugierter, jeder $(r+1)$-fach gezählt, zusammen eine Gruppe der von den Festpunkten befreiten Vollschar, da jede solche mit der g_2^1 zusammengesetzt ist; die Ordnung dieser Gruppe wäre $2r+2$, während die jener Schar $2r$ ist; P hat dann die Zeiger $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 2, \ldots, \nu_r = 2r$, führt also zu $\sigma = \frac{1}{2}r(r+1)$. Danach gilt für jeden der Punkte von γ:

$$\sigma \leqq \left(\nu_0+\frac{r}{2}\right)(r+1);$$

auch hier ist: $n \geqq 2r$, und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $|g_n^r|$ frei von Festpunkten ist. Für eine mit Festpunkten versehene $|g_n^r|$ wird

$$n-\nu_0 \geqq 2r, \quad 2\nu_0+r \leqq n-2r+n-r \leqq 2p-3,$$
$$\varrho \geqq (r+1)[r(p+1)+1)],$$
$$N \geqq \frac{2r(p+1)+2}{2p-3} = r+\frac{5r+2}{2p-3}, \tag{11}$$

d. h. *es gilt auch hier das Ergebnis, daß N mindestens den Wert $r+1$ hat.* Hat dagegen die $|g_n^r|$ keine Festpunkte, so ist $n = 2r$; die Punkte von γ können nur die Doppelpunkte der g_2^1 sein, und umgekehrt liefert jeder dieser Doppelpunkte, $2r$-fach gezählt, eine Gruppe der $|g_n^r|$, gehört also zu γ; für jeden Punkt von γ wird: $\sigma = \frac{1}{2}r(r+1)$, daher

$$N = \frac{2r(r+1)(p+1)}{r(r+1)} = 2(p+1), \tag{11a}$$

und in der Tat gibt es $2p+2$ verschiedene Doppelpunkte der g_2^1.

---

[5]) Math. Annalen **41** (1892), S. 403—442; Math. Werke I, Basel 1932, S. 391—430. Vgl. Hensel-Landsberg, Theorie der algebr. Funktionen einer Variablen, Leipzig 1902, S. 493—498.

5.

Wir wenden uns nun der Untersuchung derjenigen Vollscharen $|g_n^r|$ zu, die nicht speziell — wir sagen: gewöhnlich — sind, für die also der Riemann-Rochsche Satz die Beziehung $n = r + p$ liefert; ein Analogon des Cliffordschen Satzes gibt es hier nicht. Jede gewöhnliche Vollschar, deren Stufe $r \geqq p$ ist, muß nach dem genannten Satz frei von Festpunkten sein. Nehmen wir also zunächst an, es sei $r \geqq p$, und P ein Punkt aus γ mit den Zeigern ν_i, so müssen die Scharen

$$|g_n^r - \nu_i \cdot P| = |g_{n-\nu_i}^{r-i}| \qquad (i = 0, 1, \ldots, r-p)$$

gewöhnliche Vollscharen sein, d. h.

$$\begin{aligned} n - \nu_i &= r + p - \nu_i = r - i + p, \\ \nu_i &= i \qquad\qquad (i = 0, 1, \ldots, r-p). \end{aligned} \tag{12}$$

Für alle Punkte von γ ist demnach die Vielfachheit

$$\sigma = \sum_{i=r-p+1}^{r} (\nu_i - i).$$

Die Schar $|g_n^r - \nu_{r-p+1} \cdot P| = |g_{n-\nu_{r-p+1}}^{p-1}|$ bietet zwei Möglichkeiten; sie ist entweder a) eine gewöhnliche Schar oder b) eine spezielle, und dann die kanonische Schar.

Im Falle a) ist dann

$$n - \nu_{r-p+1} = r + p - \nu_{r-p+1} = 2p - 1; \quad \nu_{r-p+1} = r - p + 1,$$

und

$$|g_{n-\nu_{r-p+1}}^{p-1} - P| = |g_{2p-2}^{p-2}|$$

wiederum eine gewöhnliche Schar; ist also $\nu_{r-p+2} = \nu_{r-p+1} + 1 = r - p + 2$, so gelangt man zu einer gewöhnlichen Schar $|g_{n-\nu_{r-p+2}}^{p-2}|$, bezüglich derer ebenso weiter zu schließen ist; ist hingegen $\nu_{r-p+2} > r - p + 2$, so muß die Schar $|g_{n-\nu_{r-p+2}}^{p-2}|$ speziell sein, und alle folgenden Scharen $|g_{n-\nu_i}^{r-i}|$ $(i = r - p + 2, \ldots, r)$ erst recht; dann gelten aber die Abschätzungen des Cliffordschen Satzes, denen zufolge auf nichthyperelliptischen Kurven:

$$\begin{aligned} n - \nu_i &\geqq 2r - 2i + 1 \qquad (i = r - p + 2, \ldots, r - 1), \\ \nu_{r-p+1+k} &\leqq (r - p + 1 + k) + k \quad (k = 1, 2, \ldots, p - 2), \\ \nu_r &\leqq n = r + p, \end{aligned} \tag{13}$$

auf hyperelliptischen hingegen:

$$\begin{aligned} n - \nu_i &\geqq 2r - 2i \qquad (i = r - p + 2, \ldots, r), \\ \nu_{r-p+1+k} &\leqq (r - p + 1 + k) + (k + 1) \quad (k = 1, 2, \ldots, p - 1), \end{aligned} \tag{14}$$

ist. War nicht von vornherein $r \geqq p$, so beginnt die Folge dieser Ungleichungen schon für $i = 0$. Ein Punkt P, der zur Möglichkeit a) führt, bedingt in γ eine Vielfachheit:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{p-1} \{\nu_{r-p+1+k} - (r-p+1+k)\} \leqq \begin{matrix} \frac{1}{2}p(p+1) - 1, \\ \frac{1}{2}p(p-1) + 1, \end{matrix} \tag{15}$$

je nachdem ob die Kurve hyperelliptisch ist oder nicht.

Es bleibt noch die Möglichkeit b) zu erledigen, in der $|g^{p-1}_{n-\nu_{r-p+1}}| = |g^{p-1}_{2p-2}|$ die kanonische Schar, also $\nu_{r-p+1} = n - 2p + 2 = r - p + 2$ ist; hier sind alle folgenden Scharen $|g^{r-i}_{n-\nu_i}|$ speziell, es gelten also ebenfalls die Ungleichungen (13) bzw. (14), so daß

$$\sigma \leqq \begin{matrix} \frac{1}{2}p(p+1), \\ \frac{1}{2}p(p-1) + 2 \end{matrix} \tag{15 a}$$

wird. Nun ist für jede gewöhnliche Vollschar

$$\varrho = (r+1)[n + r(p-1)] = p(r+1)^2,$$

und daher wird die Zahl der verschiedenen Punkte von γ bei nicht hyperelliptischen Kurven:

$$N \geqq \frac{2p(r+1)^2}{p(p-1)+4} = \frac{2(r+1)^2}{p+1} + \frac{4(p-2)(r+1)^2}{(p+1)[p(p-1)+4]} > \frac{2}{p+1}(r+1)^2, \tag{16}$$

bei hyperelliptischen dagegen:

$$N \geqq \frac{2}{p+1}(r+1)^2. \tag{16 a}$$

Eine gewöhnliche Vollschar $|g^r_n|$ der Stufe $r \geqq p-1$ besitzt mindestens $\frac{2(r+1)^2}{p+1}$ verschiedene $(r+1)$-fache Punkte; diese Abschätzung erhöht sich um Eins, wenn die Kurve nichthyperelliptisch ist.

Hurwitz[6]) hat bemerkt, daß man, falls $p \geqq 1$ ist, den mit der Kurve birational-invariant verknüpften Weierstraßpunkten die entsprechenden Punkte an die Seite stellen kann, die mehrfache Punkte der Vielfachen der kanonischen Schar sind. Die k-fache ($k > 1$) kanonische Schar ist eine $|g^{2k(p-1)-p}_{2k(p-1)}|$, die gewöhnlich ist; ihre $(p-1)\cdot(2k-1)$-fachen Punkte bilden eine Gruppe γ der Ordnung $\varrho = p(p-1)^2(2k-1)^2$, die mit der Kurve invariant verbunden ist. Die Zahl der verschiedenen unter ihnen ist nach unseren Formeln bei nichthyperelliptischen Kurven ($p \geqq 3$) mindestens $2(2k-1)^2(p-2)$, bei hyperelliptischen hingegen $2(2k-1)^2(p-3)$, [für $p = 2$ mindestens $\frac{2}{3}(2k-1)^2$, für $p = 3$ mindestens $2(2k-1)^2$]; diese Angaben verallgemeinern die Formel (10 a). *In jedem Falle übersteigt*, sobald man $k \geqq 3$ wählt, und $p \geqq 2$ ist, *die Zahl dieser invarianten Punkte die Zahl* $2p + 2$, gleichgültig, ob es sich um eine hyperelliptische

[6]) a. a. O. [5]); Werke I, S. 400.

Kurve handelt oder nicht; woraus sich nach Hurwitz[7]) in bekannter Weise sofort der Satz von Schwarz und Klein ergibt, daß eine algebraische Kurve vom Geschlecht $p \geqq 2$ nicht unendlichviele birationale Transformationen in sich gestatten kann.

Der Vollständigkeit halber mögen noch die Abschätzungsformeln Platz finden, die für eine gewöhnliche Vollschar der Stufe $r \leqq p-2$ gelten; dann ist im nichthyperelliptischen bzw. hyperelliptischen Falle

$$\nu_i \leqq p - r + 2i - 1, \qquad (i = 0, 1, \ldots, r-1)$$

bzw.

$$\nu_i \leqq p - r + 2i \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

$$\sigma \leqq (r+1)(p-r) + \tfrac{1}{2} r(r-1) \quad \text{bzw.} \quad \sigma \leqq \tfrac{1}{2}(r+1)(2p-r),$$

und daher

$$N \geqq \frac{2p(r+1)^2}{2(p-r)(r+1) + r(r-1)} > \frac{2p(r+1)}{2p-r-1} > r+1, \tag{17}$$

bzw.

$$N \geqq \frac{2p(r+1)}{2p-r} > r+1; \tag{17 a}$$

jedenfalls ist dann immer $N \geqq r+2$.

Überblickt man alle unsere Abschätzungen, so kann man sie zu folgender, vergröbernder Aussage zusammenfassen: *Auf jeder nichtrationalen Kurve hat eine Vollschar der Stufe* r *mindestens* $r+1$ *voneinander verschiedene* $(r+1)$*-fache Punkte.*

6.

Zum Schluß kommen wir auf die Formel (5) zu sprechen. Ihre wahre algebraische Begründung erfährt sie durch die Bemerkung, daß alle Scharen g_n^r, die zueinander äquivalent sind, d. h. in einer umfassenderen Linearschar gleicher Ordnung g_n^s $(s \geqq r)$ enthalten sind, zu äquivalenten Gruppen γ führen, die selbst einer Linearschar g_ϱ von der zu bestimmenden Ordnung ϱ angehören.

Wird die g_n^r auf C durch das Linearsystem

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3) + \ldots + \lambda_r f_r(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{18}$$

bestimmt, so ist γ zu finden, indem man C mit der Kurve (2) zum Schnitt bringt, wobei man in den f_i sich x_3 als algebraische Funktion von x_1, x_2 zu denken hat, die durch die Gleichung von C: $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ vermittelt wird. Wird die umfassendere g_n^s von dem (18) enthaltenden Kurvensystem

$$\lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_s f_s = 0$$

---

[7]) a. a. O., Werke I, S. 394—395; vgl. Hensel-Landsberg, a. a. O., S. 499—501.

ausgeschnitten, so liegen die zu den in ihr enthaltenen g_n^r gehörigen Gruppen γ in der Linearschar, die auf C von dem Linearsystem:

$$\sum_{i_0, \ldots, i_r} \lambda_{i_0 \ldots i_r} \cdot \left\| \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r}; \quad \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2}; \quad \ldots; \quad \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\|_{(i = i_0, \ldots, i_r)} = 0,$$

worin $i_0 \ldots i_r$ alle Kombinationen von je $r+1$ Zeigern der Folge $0 \ldots s$ durchläuft, ausgeschnitten werden. Sie sind demnach äquivalent.

Man kann für diese Tatsache auch einen mehr begrifflichen Beweis geben. Es seien etwa ${}_0g_n^r$ und $\bar{g}_n^r$ in einer g_n^s enthalten und $f_0 \ldots f_r$, bzw. $\bar{f}_0 \ldots \bar{f}_r$ die in der Darstellung (18) verwandten Funktionen; wir können etwa annehmen, daß ${}_0g_n^r$ und $\bar{g}_n^r$ keine Gruppe gemein haben, Dann bilden wir die Linearsysteme aus $f_0, \ldots, f_{r-1}, \bar{f}_0$; $f_0, \ldots, f_{r-2}, \bar{f}_0, \bar{f}_1$; $\ldots$; $f_0, \bar{f}_0, \ldots, \bar{f}_{r-1}$, die auf C die Scharen ${}_1g_n^r, {}_2g_n^r, \ldots, {}_{r-1}g_n^r$ erzeugen. In der Kette der Scharen ${}_0g_n^r, {}_1g_n^r, \ldots, {}_{r-1}g_n^r, \bar{g}_n^r$ haben je zwei benachbarte eine Linearschar $(r-1)$-ter Stufe gemein; wegen der Transitivität der Äquivalenz ist diese für die zu ${}_0g_n^r$ und $\bar{g}_n^r$ gehörenden Gruppen ${}_0\gamma$, $\bar{\gamma}$ bewiesen, wenn wir sie unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen haben, daß ${}_0g_n^r$ und $\bar{g}_n^r$ eine g_n^{r-1} gemein haben, also etwa

$$f_i = \bar{f}_i \quad (i = 0, 1, \ldots, r-1), \qquad f_r \neq \bar{f}_r$$

ist. Das Linearsystem

$$\lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_{r-1} f_{r-1} + \lambda_r (\mu_0 f_r + \mu_1 \bar{f}_r) = 0$$

schneidet bei festem $\mu_0 : \mu_1$ eine g_n^r aus, die in der vom System

$$\lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_r f_r + \lambda_{r+1} \bar{f}_r = 0$$

ausgeschnittenen g_n^{r+1} enthalten ist. Entsprechend den Werten von $\mu_0 : \mu_1$ erhält man eine rationale, einstufige Gesamtheit Γ solcher g_n^r, die für $\mu_1 = 0$ die ${}_0g_n^r$, für $\mu_0 = 0$ die $\bar{g}_n^r$ umfaßt, und zu deren jeder eine Gruppe γ gehört. Bezüglich jeder Schar, also insbesondere bezüglich der g_n^{r+1}, hat ein allgemeiner Punkt von C die Zeiger $\nu_i = i$, er gehört demnach, $r+1$-fach gezählt, nur einer ihrer Gruppen an, die etwa den Parametern $\lambda_0, \ldots, \lambda_{r+1}$ entspricht; aus $\lambda_r : \lambda_{r+1} = \mu_0 : \mu_1$ bestimmt sich eine einzige g_n^r aus Γ, die die genannte Gruppe enthält, für die also $P(r+1)$-facher Punkt ist; mithin hat man eine einstufige rationale Gesamtheit von Gruppen γ auf C von der Art, daß ein allgemeiner Punkt von C genau einer γ angehört; diese Gesamtheit muß also nach dem Lürothschen Satz eine Linearschar sein, d. h. ${}_0\gamma$ und $\bar{\gamma}$ sind äquivalent.

Nimmt man eine Vollschar $|g_n^s|$ und betrachtet alle in ihr enthaltenen g_n^r $(r \leqq s)$, so bestimmen nach dem Gesagten die zugehörigen Gruppen γ eine Vollschar $|(g_n)_{r+1}|$ der Ordnung ϱ, die sich bei birationalen Trans-

formationen der C kovariant zur $|g_n^s|$ verhält; sie erfüllt die wichtige Beziehung [8]):

$$|(g_n + g_m)_{r+1}| = |(g_n)_{r+1} + (r+1)\,g_m|; \tag{19}$$

denn um die rechte Seite zu finden, braucht man nur die Gruppe γ einer besonderen r-stufigen Schar, die in $|g_n + g_m|$ enthalten ist, aufzusuchen; als solche wählen wir eine g_n^r, zu der eine Gruppe G_m aus g_m als Gruppe von Festpunkten hinzugenommen ist; G_m werde dabei so gewählt, daß in ihr keiner der $r+1$-fachen Punkte der g_n^r vorkommt und alle m Punkte voneinander verschieden sind, so daß jeder ihrer Punkte bezüglich der Schar $g_n^r + G_m$ die Zeiger $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 2, \ldots, \nu_r = r+1$ hat. Nach (4) ist dann die Gruppe der $(r+1)$-fachen Punkte dieser Schar gleich der entsprechenden Gruppe bezüglich g_n^r, vermehrt um $(r+1)\cdot G_m$, so daß (19) folgt.

Um schließlich $|(g_n)_{r+1}|$ und damit ϱ zu finden, nimmt man eine in $|g_n^s|$ enthaltene g_n^1, die bekanntlich eine Gruppe J von $2n + 2p - 2$ Doppelpunkten besitzt; ist $|g_n^s|$ festpunktfrei, so kann man voraussetzen, daß alle Punkte von J verschieden seien; die g_n^1 werde durch die Gleichung $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0$ bestimmt. Das Linearsystem

$$\lambda_0 f_0^r + \lambda_1 f_0^{r-1} f_1 + \ldots + \lambda_r f_1 = 0$$

bestimmt auf C eine g_{nr}^r, deren jede Gruppe durch Zusammenfügen von r Gruppen der g_n^1 entsteht, und deren $(r+1)$-fache Punkte also nur in die Punkte von J fallen können; jeder Punkt von J besitzt gegenüber der g_{nr}^r die Zeiger $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 2, \ldots, \nu_r = 2r$, d. h. es ist nach (19) und (4):

$$\begin{aligned} |(g_{nr}^r)_{r+1}| &= |\tfrac{1}{2} r(r+1)\cdot J| = |\tfrac{1}{2} r(r+1)\cdot (g_n)_2| \\ &= |(r\,g_n^1)_{r+1}| = |(g_n + (r-1)\,g_n)_{r+1}| = |(g_n)_{r+1} + (r^2-1)\,g_n|, \\ |(g_n)_{r+1}| &= |\tfrac{1}{2} r(r+1)\cdot (g_n)_2 - (r^2-1)\,g_n|. \end{aligned} \tag{20}$$

Andererseits ist die invariante kanonische Schar $|g_{2p-2}^{p-1}|$ auf Kurven vom Geschlecht $p \geqq 1$ erklärt durch die Beziehung

$$|g_{2p-2}^{p-2}| = |(g_n)_2 - 2\,g_n|,$$

so daß sich ergibt [9]):

$$|(g_n)_{r+1}| = |(r+1)\,g_n + \tfrac{1}{2} r(r+1)\cdot g_{2p-2}^{p-1}|. \tag{21}$$

Daraus ergibt sich für die Ordnung ϱ der linken Seite die Formel (5). Nach unseren früheren Ausführungen ist sie auch für $p = 0$ richtig. Mittels (19) ist dann die Gültigkeit von (20) und (21) auch auf Scharen $|g_n^s|$, die Festpunkte besitzen, zu übertragen.

---

[8]) Vgl. F. Enriques, Rendic. Accad. Lincei 27, I (1919), S. 371.

[9]) De Franchis, Palermo Rend. 34 (1912), S. 168.

Die Beziehung (20) ist inhaltreicher als (5). Zur Verdeutlichung mögen einige bekannte Beispiele erwähnt werden. Die Wendepunkte einer ebenen C_n sind die dreifachen Punkte der von den Geraden ausgeschnittenen g_n^2, ihre Anzahl ist $3n + 6(p-1)$; sie werden nach (20) von einer Kurve der Ordnung $3n - 6$ ausgeschnitten, die sich in den singulären Punkten der C_n wie die dreifach-adjungierten Kurven verhält; das ist eben die Hessesche Kurve, die in der Tat in jedem gewöhnlichen i-fachen Punkt der C_n einen $3i - 4$-fachen Punkt besitzt, von dem i-Tangenten mit denen an C_n zusammenfallen.

Die sextaktischen Punkte einer ebenen Kurve C_n sind die sechsfachen Punkte der von den C_2 ausgeschnittenen g_{2n}^5; ihre Anzahl ist $12n + 30(p-1)$, und sie werden von einer Kurve der Ordnung $15n - 33$ ausgeschnitten, die sich in den singulären Punkten der C_n wie die 15-fach adjungierten Kurven verhält. Jeder gewöhnliche Wendepunkt besitzt gegenüber der g_{2n}^5 die Zeiger $\nu_0 = 0, \nu_1 = 1, \ldots, \nu_4 = 4, \nu_5 = 6$, zählt also einmal als sextaktischer Punkt (in der Tat berührt die doppeltgezählte Wendetangente die C_n sechspunktig); jede gewöhnliche Spitze besitzt die Zeiger $\nu_0 = 0, \nu_1 = 2, \nu_2 = 3, \ldots, \nu_5 = 6$, zählt also für fünf sextaktische Punkte, und ähnlich ist die Zählung der anderen singulären Punkte der C_n nach (4) leicht zu bestimmen. Die Mindestzahl der verschiedenen sextaktischen Punkte ist nach (7) $N \geqq \frac{12n + 30(p-1)}{12n - 35}$; sie wird bei der elliptischen C_3 mit $N = 36$ wirklich erreicht. Hingegen gelangt man bezüglich der 108 sextaktischen Punkte der C_4 ohne Doppelpunkte auf Grund von (16) zur Aussage, daß mindestens 22 verschiedene darunter sein müssen. Als letztes Beispiel nehmen wir die kanonische Kurve vom Geschlechte 4, d. h. die C_6 des R_3, die als Schnitt zweier allgemeiner Flächen F_2^0 und F_3^0 entsteht. Ihre stationären Punkte mit vierpunktig berührender Schmiegebene sind die Weierstraßpunkte, deren Gesamtzahl 60 ist; sie werden von einer Fläche 10. Ordnung ausgeschnitten; es gibt mindestens 15 verschiedene unter ihnen. Den sextaktischen Punkten entsprechen im räumlichen Falle diejenigen, in denen es außer der F_2^0 eine neunpunktig anschmiegende F_2 gibt; ihre Gesamtzahl ist 324, die Mindestzahl der verschiedenen nach (16) größer als 40, sie werden von einer F_{54} ausgeschnitten.

(Eingegangen am 25. September 1935.)

Neue Beweise der Überkonvergenzsätze für Potenzreihen und Dirichletsche Reihen.

Von

Friedrich Lösch in Stuttgart.

Im folgenden soll ein neuer Zugang zu den Überkonvergenzsätzen angegeben werden, der sowohl bei Potenzreihen als auch bei Dirichletschen Reihen sehr einfach zum Ziel führt. Die Beweise werden zuerst für Potenzreihen auseinandergesetzt, da bei ihnen die notwendigen Abschätzungen besonders kurz ausfallen. Sodann wird der Übergang zu allgemeinen Dirichletschen Reihen vollzogen.

I.

Verschwindet für eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jeder Koeffizient a_n, dessen Index n zwischen zwei festen Indizes $\mu < \nu$ gelegen ist, also

$$a_n = 0 \quad \text{für} \quad \mu < n < \nu,$$

so sagen wir, die Reihe weise die *Lücke* (μ, ν) auf. Unter Verwendung dieser Ausdrucksweise läßt sich der *allgemeine Ostrowskische Überkonvergenzsatz*[1]) folgendermaßen formulieren:

1. Satz: *Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

von endlichem Konvergenzradius ϱ weise eine unendliche Folge von Lücken

$$(\mu_1, \nu_1), \ (\mu_2, \nu_2), \ \ldots, \ (\mu_\tau, \nu_\tau), \ \ldots$$

auf, die für eine von τ unabhängige Zahl $\vartheta > 0$ Relativbreiten

$$\frac{\nu_\tau - \mu_\tau}{\mu_\tau} \geqq \vartheta$$

besitzen. Setzt man dann

$$f_0(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{\mu_1} z^{\mu_1},$$

$$f_\tau(z) = a_{\nu_\tau} z^{\nu_\tau} + a_{\nu_\tau + 1} z^{\nu_\tau + 1} + \ldots + a_{\mu_{\tau+1}} z^{\mu_\tau + 1} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

[1]) A. Ostrowski, Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten, Berliner Sitzungsberichte 1921, S. 557—565.

so konvergiert die Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(z)$$

gleichmäßig in einer gewissen Umgebung jedes regulären Punktes von $f(z)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises.

Beweis: Wir nehmen an, a sei ein regulärer Punkt von $f(z)$ am Rande des Konvergenzkreises und wollen die gleichmäßige Konvergenz der Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(z) \tag{1}$$

in einer vollen Umgebung von a beweisen.

Dazu wählen wir auf dem Radiusvektor $0a$ einen zwischen 0 und a gelegenen Punkt z_0, über den wir weiterhin noch verfügen werden, und entwickeln die einzelnen Polynome $f_\tau(z)$ nach Potenzen von $z - z_0$. Indem wir die so entwickelten Polynome $f_\tau(z)$ an der Stelle μ_τ zerlegen, schreiben wir

$$f_\tau(z) = \varphi_\tau(z) + \psi_\tau(z) = \sum_{\nu=0}^{\mu_\tau} \frac{(z-z_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_0) + \sum_{\nu=\mu_\tau+1}^{\mu_\tau+1} \frac{(z-z_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_0),$$

und behandeln nacheinander die Polynomreihen

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau(z) \tag{2}$$

und

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(z). \tag{3}$$

1. Wir beginnen mit einer Abschätzung der Polynome $\varphi_\tau(z)$. Dazu wählen wir einen Kreis $\mathfrak{K}$ von einem Radius $r < \varrho$ um den Nullpunkt und beschränken nun z_0 auf das Innere dieses Kreises. Die Koeffizienten a_n lassen für jede positive Zahl $\varrho' < \varrho$ eine Abschätzung

$$|a_n| \leqq \frac{C_1}{\varrho'^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten C_1 zu. Denken wir uns weiterhin ϱ' so nahe an ϱ gewählt, daß auch $r < \varrho'$ gilt, so können wir längs $\mathfrak{K}$ für $\tau = 1, 2, \ldots$ abschätzen:

$$|f_\tau(z)| < C_1 \left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{\nu_\tau} \left[1 + \frac{r}{\varrho'} + \left(\frac{r}{\varrho'}\right)^2 + \ldots\right] = C_2 \left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{\nu_\tau},$$

wo C_2 eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Berücksichtigt man die Lückenbedingung $\nu_\tau \geqq (1+\vartheta)\,\mu_\tau$, so folgt hieraus weiter für $\nu \leqq \mu_\tau$:

$$\left|\frac{1}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_0)\right| < C_2 \frac{\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{\nu_\tau}}{(r-|z_0|)^\nu} = \frac{C_2}{\varrho^\nu} \frac{\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{\nu_\tau}}{\left(\frac{r-|z_0|}{\varrho}\right)^\nu} \leqq \frac{C_2}{\varrho^\nu} \left[\frac{\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{(1+\vartheta)}}{\frac{r-|z_0|}{\varrho}}\right]^{\mu_\tau}.$$

Da wir uns ϱ' so nahe an ϱ gewählt denken können, daß $\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{1+\vartheta} < \frac{r}{\varrho}$ gilt, so erkennt man, daß für hinreichend nahe am Nullpunkt gewähltes z_0 eine Abschätzung

$$\left|\frac{1}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_0)\right| \leqq \frac{C_2}{\varrho^\nu} q^{\mu_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots;\ \nu \leqq \mu_\tau)$$

mit einer positiven Zahl $q < 1$ und einer von τ unabhängigen Konstanten C_2 gilt. So denken wir uns z_0 gewählt und weiterhin festgehalten. Für jeden Radius $r_0 < \varrho$ hat man dann in $|z - z_0| \leqq r_0$ eine Abschätzung

$$|\varphi_\tau(z)| < C_2 q^{\mu_\tau}\left[1 + \frac{r_0}{\varrho} + \left(\frac{r_0}{\varrho}\right)^2 + \ldots\right] = C_3 q^{\mu_\tau} \quad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

wo C_3 wieder eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Hieraus entnimmt man, daß die Polynomreihe (2) gewiß in einem den Punkt a im Innern enthaltenden Kreis um z_0 gleichmäßig konvergiert und daselbst eine analytische Funktion $\varphi(z)$ darstellt.

2. Sehr einfach ergibt sich nun weiter die gleichmäßige Konvergenz der Polynomreihe (3) in einer Umgebung des Punktes a. Da sowohl (1) als auch (2) in einer hinreichend kleinen Umgebung von z_0 gleichmäßig konvergieren, gilt dasselbe von der Reihe (3); sie stellt hier die analytische Funktion

$$\psi(z) = f(z) - \varphi(z)$$

dar. Die Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ sind beide in einem a im Innern enthaltenden Kreis $\mathfrak{K}_0$ um z_0 analytisch, also auch $\psi(z)$. Daher konvergiert die Potenzreihenentwicklung von $\psi(z)$ an der Stelle z_0 mindestens in $\mathfrak{K}_0$. Da aber jeweils das nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelte Polynom $\psi_\tau(z)$ nur Glieder der Ordnungen $\leqq \mu_{\tau+1}$, das nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelte Polynom $\psi_{\tau+1}(z)$ nur Glieder der Ordnungen $> \mu_{\tau+1}$ enthält, so erhält man nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz diese Potenzreihenentwicklung aus $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(z)$, indem man die nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelten Polynome $\psi_\tau(z)$ in ihre einzelnen Glieder aufspaltet und dieselben in der entstehenden Anordnung zu einer Reihe zusammenfaßt. Hieraus erkennt man endlich, daß mit dieser Potenzreihe auch die Polynomreihe (3) gleichmäßig in einem a im Innern enthaltenden Kreis um z_0 konvergiert.

Mit (2) und (3) konvergiert auch (1) gleichmäßig in einer vollen Umgebung des Randpunktes a; damit ist der Beweis fertig.

Die geschilderte Methode liefert auch einen einfachen Beweis des *speziellen Ostrowskischen Überkonvergenzsatzes*[2]). Dieser Satz ist insofern

[2]) A. Ostrowski, Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1 (1923), S. 327—350, insbesondere S. 335.

besonders interessant, als er eine Klasse analytischer Funktionen mit schlichtem, einfach zusammenhängendem Regularitätsgebiet liefert. Er lautet:

2. Satz: *Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

von endlichem Konvergenzradius ϱ weise eine unendliche Folge von Lücken

$$(\mu_1, \nu_1), (\mu_2, \nu_2), \ldots, (\mu_\tau, \nu_\tau), \ldots$$

auf, deren Relativbreiten

$$\vartheta_\tau = \frac{\nu_\tau - \mu_\tau}{\mu_\tau} \to \infty$$

streben für $\tau \to \infty$. Setzt man dann

$$f_0(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{\mu_1} z^{\mu_1},$$

$$f_\tau(z) = a_{\nu_\tau} z^{\nu_\tau} + a_{\nu_\tau + 1} z^{\nu_\tau + 1} + \ldots + a_{\mu_\tau + 1} z^{\mu_\tau + 1} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

so konvergiert die Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(z)$$

im ganzen Regularitätsgebiet von $f(z)$ gegen $f(z)$, und zwar gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes Punktes dieses Gebiets.

Beweis: Es sei a ein Punkt des Regularitätsgebiets von $f(z)$. Die analytische Fortsetzung der Funktion $f(z)$ vom Nullpunkt zum Punkt a hin sei möglich durch die Kette der Kreise $\mathfrak{K}_0$ (= Konvergenzkreis von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$), $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ mit den Mittelpunkten $z_0 = 0, z_1, \ldots, z_m$, wobei z_1 in $\mathfrak{K}_0$, z_2 in $\mathfrak{K}_1, \ldots, z_m$ in $\mathfrak{K}_{m-1}$ gelegen ist. Wir wollen die gleichmäßige Konvergenz der Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(z)$$

in einer vollen Umgebung von a beweisen.

Dazu entwickeln wir zunächst die einzelnen Polynome $f_\tau(z)$ nach Potenzen von $z - z_1$. Indem wir sogleich eine passende Zerlegung der so entwickelten Polynome $f_\tau(z)$ vornehmen, schreiben wir

$$f_\tau(z) = \varphi_\tau^{(1)}(z) + \psi_\tau^{(1)}(z)$$

$$= \sum_{0 \leqq \nu \leqq (1+\sqrt{\vartheta_\tau})\,\mu_\tau} \frac{(z-z_1)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_1) + \sum_{(1+\sqrt{\vartheta_\tau})\,\mu_\tau < \nu \leqq \mu_\tau + 1} \frac{(z-z_1)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_1).$$

Wie beim Beweis des Satzes 1 schätzen wir nun die Polynome $\varphi_\tau^{(1)}(z)$ ab. Wir schlagen dazu einen z_1 im Innern enthaltenden Kreis $\mathfrak{K}$ von einem Radius $r < \varrho$ um den Nullpunkt, schätzen $|f_\tau(z)|$ längs $\mathfrak{K}$ ab und bekommen,

wenn $\varrho' < \varrho$ wieder so nahe an ϱ gewählt ist, daß noch $r < \varrho'$ gilt, wie beim Beweis des Satzes 1:

$$\left|\frac{1}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_1)\right| \leqq C_2 \frac{\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{r_\tau}}{(r - |z_1|)^\nu} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo C_2 eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Liegt nun die Kette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ in dem Kreis $|z - z_1| \leqq R$ um z_1, so ergibt sich hieraus für alle Punkte z der Kreiskette die Abschätzung

$$|\varphi_\tau^{(1)}(z)| \leqq C_2 \left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{r_\tau} \sum_{0 \leqq \nu \leqq (1+\sqrt{\vartheta_\tau})\,\mu_\tau} \left(\frac{R}{r - |z_1|}\right)^\nu$$

$$\leqq C_3 \left[\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{1+\vartheta_\tau} \left(\frac{R}{r - |z_1|}\right)^{1+\sqrt{\vartheta_\tau}}\right]^{\mu_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

wo C_3 eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Für $\tau \to \infty$ strebt wegen $\vartheta_\tau \to \infty$ der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck

$$\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{1+\vartheta_\tau} \left(\frac{R}{r - |z_1|}\right)^{1+\sqrt{\vartheta_\tau}} \to 0,$$

und damit erkennt man, daß die Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau^{(1)}(z)$$

auf der ganzen Kreiskette gleichmäßig gegen eine Funktion $\varphi^{(1)}(z)$ konvergiert.

Wir brauchen uns also weiterhin nur noch mit der Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^{(1)}(z)$$

zu beschäftigen. Aus der Regularität von $f(z)$ und $\varphi^{(1)}(z)$ in $\mathfrak{K}_1$ schließt man zunächst wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 1, daß $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^{(1)}(z)$ auf jedem inneren Teil von $\mathfrak{K}_1$ gleichmäßig konvergiert. Weiter weist aber die in $\mathfrak{K}_1$ konvergente Potenzreihe, die aus $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^{(1)}(z)$ durch Zerlegung der nach Potenzen von $z - z_1$ entwickelten Polynome $\psi_\tau^{(1)}(z)$ in ihre einzelnen Glieder entsteht, Lücken von Relativbreiten $> \sqrt{\vartheta_\tau}\,(\tau = 1, 2, \ldots)$ auf, denn $\psi_{\tau-1}^{(1)}(z)$ enthält nur Glieder der Ordnungen $\leqq \mu_\tau$ und $\psi_\tau^{(1)}(z)$ nur Glieder der Ordnungen $> (1 + \sqrt{\vartheta_\tau})\,\mu_\tau$. Man kann daher für die $\psi_\tau^{(1)}(z)$ in derselben Weise schließen wie für die $f_\tau(z)$: Entwickelt man jedes Polynom $\psi_\tau^{(1)}(z)$ nach Potenzen von $z - z_2$ und zerlegt das so entwickelte Polynom $\psi_\tau^{(1)}(z)$ an der Stelle $(1 + \sqrt[4]{\vartheta_\tau})\,\mu_\tau$ in

$$\psi_\tau^{(1)}(z) = \varphi_\tau^{(2)}(z) + \psi_\tau^{(2)}(z),$$

so konvergiert $\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau^{(2)}(z)$ gleichmäßig auf der ganzen Kreiskette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$, während $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^{(2)}(z)$ wenigstens auf jedem inneren Teil von $\mathfrak{K}_2$ gleichmäßig konvergiert und überdies zwischen den nach Potenzen von $(z - z_2)$ entwickelten Polynomen $\psi_{\tau-1}^{(2)}(z)$ und $\psi_\tau^{(2)}(z)$ jeweils eine Lücke von einer Relativbreite $> \sqrt[4]{\vartheta_\tau}$ auftritt. Es ist klar, wie dieser Zerspaltungsprozeß fortzusetzen ist. Nach m Schritten ist $f_\tau(z)$ aufgespalten in $m+1$ Polynome

$$f_\tau(z) = \varphi_\tau^{(1)}(z) + \varphi_\tau^{(2)}(z) + \ldots + \varphi_\tau^{(m)}(z) + \psi_\tau^{(m)}(z),$$

wobei die Reihen

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau^{(1)}(z), \quad \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau^{(2)}(z), \quad \ldots, \quad \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau^{(m)}(z)$$

auf der ganzen Kreiskette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ gleichmäßig konvergieren, während

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^{(m)}(z)$$

jedenfalls in jedem inneren Teil von $\mathfrak{K}_m$ gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt aber die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(z)$$

in einer vollen Umgebung von a und der Beweis ist fertig.

II.

Wir wenden uns nun zur Behandlung allgemeiner Dirichletscher Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots; \lambda_n \to +\infty).$$

In Anlehnung an die für Potenzreihen benutzte Sprechweise, sagen wir, eine solche Reihe weise die *Lücke* $(\lambda_\mu, \lambda_\nu)$ auf, wenn kein nichtverschwindendes Glied der Reihe zu einem Exponenten λ_n mit $\lambda_\mu < \lambda_n < \lambda_\nu$ gehört. Unter Verwendung dieser Ausdrucksweise läßt sich der *allgemeine Ostrowskische Überkonvergenzsatz für Dirichletsche Reihen* folgendermaßen formulieren:

3. Satz: *Die Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots; \lambda_n \to +\infty)$$

mit der endlichen Konvergenzabszisse ϱ weise eine unendliche Folge von Lücken

$$(\lambda_{\mu_1}, \lambda_{\nu_1}), \ (\lambda_{\mu_2}, \lambda_{\nu_2}), \ \ldots, \ (\lambda_{\mu_\tau}, \lambda_{\nu_\tau}), \ \ldots$$

auf, die für eine von τ unabhängige Zahl $\vartheta > 0$ Relativbreiten

$$\frac{\lambda_{\nu_\tau} - \lambda_{\mu_\tau}}{\lambda_{\mu_\tau}} \geqq \vartheta$$

besitzen. Setzt man dann

$$f_0(s) = a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \ldots + a_{\mu_1} e^{-\lambda_{\mu_1} s},$$

$$f_\tau(s) = a_{\nu_\tau} e^{-\lambda_{\nu_\tau} s} + a_{\nu_\tau + 1} e^{-\lambda_{\nu_\tau + 1} s} + \ldots + a_{\mu_\tau + 1} e^{-\lambda_{\mu_\tau + 1} s} \quad (\tau = 1,2,\ldots),$$

so konvergiert die Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(s)$$

gleichmäßig in einer gewissen Umgebung jedes regulären Punktes von $f(s)$ auf der Konvergenzgeraden.

Beweis: Wir setzen die Konvergenzabszisse $\varrho = 0$ voraus, was keine Einschränkung bedeutet. Sodann nehmen wir an, a sei ein regulärer Punkt von $f(s)$ auf der Konvergenzgeraden und wollen die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(s) \tag{1}$$

in einer vollen Umgebung von a beweisen.

Dazu greifen wir im Innern der Konvergenzhalbebene $\Re(s) > 0$ einen Punkt s_0 mit $\Im(s_0) = \Im(a)$ beliebig heraus und entwickeln die einzelnen Exponentialpolynome $f_\tau(s)$ nach Potenzen von $s - s_0$. Indem wir die so entwickelten Exponentialpolynome $f_\tau(s)$ sogleich passend zerlegen, setzen wir

$$f_\tau(s) = \varphi_\tau(s) + \psi_\tau(s) + \chi_\tau(s)$$

mit

$$\varphi_\tau(s) = \sum_{0 \leqq \nu \leqq \lambda_{\nu_\tau}} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0), \qquad \psi_\tau(s) = \sum_{\lambda'_{\nu_\tau} < \nu < \lambda'_{\mu_\tau + 1}} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0),$$

$$\chi_\tau(s) = \sum_{\lambda'_{\mu_\tau + 1} \leqq \nu < \infty} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0),$$

wobei $\lambda'_{\nu_\tau} = (1-\eta)\sigma_0 \lambda_{\nu_\tau}$, $\lambda'_{\mu_\tau} = (1+\eta)\sigma_0 \lambda_{\mu_\tau}$ mit $\sigma_0 = \Re(s_0)$ und einer Zahl η aus (0, 1), über die wir noch verfügen werden, sein sollen. Wir behandeln nun nacheinander die drei Funktionenreihen

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau(s), \tag{2}$$

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \chi_\tau(s), \tag{3}$$

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s). \tag{4}$$

1. Dazu ist zunächst eine Abschätzung von $|f_\tau(s)|$ für eine beliebige Stelle $s\,(\Re(s) = \sigma)$ erforderlich. Setzen wir

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

so gilt wegen $\varrho = 0$ für jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine Abschätzung

$$|A_n| \leqq C_1 e^{\varepsilon \lambda_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten C_1. Weiter ergibt sich durch partielle Summation für jedes $\tau = 1, 2, \ldots$

$$f_\tau(s) = -A_{\nu_\tau - 1} e^{-\lambda_{\nu_\tau} s} + A_{\mu_\tau + 1} e^{-\lambda_{\mu_\tau + 1} s} + \sum_{n=\nu_\tau}^{\mu_\tau + 1 - 1} A_n (e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}),$$

somit

$$|f_\tau(s)| \leqq C_1 e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda_{\nu_\tau}} + C_1 e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda_{\mu_\tau + 1}} + C_1 \sum_{n=\nu_\tau}^{\mu_\tau + 1 - 1} e^{\varepsilon \lambda_n} |e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}|.$$

Vermöge

$$\sum_{n=\nu_\tau}^{\mu_\tau + 1 - 1} e^{\varepsilon \lambda_n} |e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}| = \sum_{n=\nu_\tau}^{\mu_\tau + 1 - 1} e^{\varepsilon \lambda_n} \left| s \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda s} \, d\lambda \right|$$

$$\leqq |s| \sum_{n=\nu_\tau}^{\mu_\tau + 1 - 1} e^{\varepsilon \lambda_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda \sigma} \, d\lambda \leqq |s| \int_{\lambda_{\nu_\tau}}^{\lambda_{\mu_\tau + 1}} e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda} \, d\lambda$$

folgt hieraus schließlich

$$(5) \quad |f_\tau(s)| \leqq C_1 e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda_{\nu_\tau}} + C_1 e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda_{\mu_\tau + 1}} + C_1 |s| \int_{\lambda_{\nu_\tau}}^{\lambda_{\mu_\tau + 1}} e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda} d\lambda \quad (\tau = 1, 2, \ldots).$$

2. Um nun eine Abschätzung für $|\varphi_\tau(s)|$ zu gewinnen, denken wir uns um s_0 einen Kreis $\mathfrak{K}'$ vom Radius $r' = \sigma_0 (1 - \eta)$ geschlagen. Da wir $\varepsilon < \sigma_0 \eta$ voraussetzen dürfen, können wir nach (5) längs $\mathfrak{K}'$ abschätzen:

$$|f_\tau(s)| \leqq 2 C_1 e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} + C_1 \frac{|s_0| + r'}{\sigma_0 \eta - \varepsilon} e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} = C_2 e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} \quad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

wo C_2 eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Hieraus folgt weiter die Beziehung

$$\left| \frac{1}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0) \right| \leqq \frac{C_2}{r'^\nu} e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} = \frac{C_2}{[\sigma_0 (1 - \eta)]^\nu} e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} \quad (\tau = 1, 2, \ldots).$$

Beschränken wir daher s auf einen Kreis $|s - s_0| \leqq R'$ mit einem hinreichend wenig von σ_0 verschiedenen Radius $R' > \sigma_0$, so erhalten wir für diese Punkte s die Abschätzung

$$(6) \qquad |\varphi_\tau(s)| \leqq C_2 e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} \sum_{0 \leqq \nu \leqq \lambda'_{\nu_\tau}} \left[\frac{R'}{\sigma_0 (1 - \eta)} \right]^\nu$$

$$= C_3 \left[\left(\frac{R'}{\sigma_0} \right)^{(1-\eta)\sigma_0} \frac{e^{\varepsilon - \sigma_0 \eta}}{(1 - \eta)^{(1-\eta)\sigma_0}} \right]^{\lambda_{\nu_\tau}} = C_3 q'^{\lambda_{\nu_\tau}}$$

mit einer von τ unabhängigen Konstanten C_3 und einer positiven Zahl $q' < 1$, da für η aus $(0, 1)$ gewiß $(1 - \eta)^{1-\eta} e^\eta > 1$ ist und ε beliebig

klein angenommen werden darf. Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (2) in einer vollen Umgebung des Punktes a.

3. Ebenso ist die Reihe (3) zu behandeln. Wir denken uns um s_0 einen Kreis $\mathfrak{K}''$ vom Radius $r'' = \sigma_0(1+\eta)$ geschlagen und können nach (5) längs $\mathfrak{K}''$ für jedes $\tau = 1, 2, \ldots$ abschätzen

$$|f_\tau(s)| \leqq 2C_1 e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}} + C_1 \frac{|s_0|+r''}{\sigma_0\eta+\varepsilon} e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}} = C_4 e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}},$$

wo C_4 eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Hieraus folgt die Beziehung

$$\left|\frac{1}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0)\right| \leqq \frac{C_4}{r''^\nu} e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}} = \frac{C_4}{[\sigma_0(1+\eta)]^\nu} e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}}.$$

Beschränken wir daher s auf einen Kreis $|s-s_0| \leqq R''$ mit einem hinreichend wenig von σ_0 verschiedenen Radius $R'' > \sigma_0$ (jedenfalls soll $R'' < \sigma_0(1+\eta)$ sein), so erhalten wir für diese Punkte s die Abschätzung

$$(7) \qquad |\chi_\tau(s)| \leqq C_4 e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}} \sum_{\lambda'_{\mu_\tau+1} \leqq \nu < \infty} \left[\frac{R''}{\sigma_0(1+\eta)}\right]^\nu$$

$$= C_5 \left[\left(\frac{R''}{\sigma_0}\right)^{(1+\eta)\sigma_0} \frac{e^{\varepsilon+\sigma_0\eta}}{(1+\eta)^{(1+\eta)\sigma_0}}\right]^{\lambda_{\mu_\tau+1}} = C_5 q''^{\lambda_{\mu_\tau+1}}$$

mit einer von τ unabhängigen Konstanten C_5 und einer positiven Zahl $q'' < 1$, da für η aus $(0, 1)$ gewiß $(1+\eta)^{1+\eta} e^{-\eta} > 1$ ist und ε beliebig klein angenommen werden darf. Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (3) in einer vollen Umgebung des Punktes a.

4. Schließlich haben wir jetzt noch die Reihe (4) zu betrachten. Hier überlegen wir genau wie beim zweiten Teil des Beweises von Satz 1: Da die Reihen (1), (2), (3) in einer hinreichend kleinen Umgebung von s_0 gleichmäßig konvergieren und analytische Funktionen $f(s)$, $\varphi(s)$, $\chi(s)$ darstellen, gilt dasselbe von der Reihe (4); sie stellt hier die analytische Funktion

$$\psi(s) = f(s) - \varphi(s) - \chi(s)$$

dar. Die Funktionen $f(s)$, $\varphi(s)$, $\chi(s)$ sind in einem a im Innern enthaltenden Kreis $\mathfrak{K}_0$ um s_0 analytisch, also auch $\psi(s)$. Daher konvergiert die Potenzreihenentwicklung von $\psi(s)$ an der Stelle s_0 mindestens in $\mathfrak{K}_0$. Diese Potenzreihe ergibt sich sehr einfach, wenn wir festsetzen, die Zahl η aus $(0, 1)$ soll so klein angenommen werden, daß jeweils $\lambda'_{\mu_\tau} < \lambda'_{\nu_\tau}$ gilt, was wegen der Lückenbedingung $\lambda_{\nu_\tau} > (1+\vartheta)\lambda_{\mu_\tau}$ möglich ist. Dann enthält das nach Potenzen von $s - s_0$ entwickelte Polynom $\psi_\tau(s)$ jeweils nur Glieder höherer Ordnung als das nach Potenzen von $(s - s_0)$ entwickelte Polynom $\psi_{\tau-1}(s)$ und man bekommt die Potenzreihenentwicklung von $\psi(s)$ an der Stelle s_0 aus der Polynomreihe $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s)$, indem man

einfach die nach Potenzen von $(s - s_0)$ entwickelten Polynome $\psi_\tau(s)$ in ihre einzelnen Glieder aufspaltet und dieselben in der entstehenden Anordnung zu einer Reihe zusammenfaßt. Hieraus erkennt man unmittelbar, daß mit dieser Potenzreihe auch die Polynomreihe (4) in einem a im Innern enthaltenden Kreis um s_0 gleichmäßig konvergiert.

Mit den Reihen (2), (3) und (4) konvergiert auch (1) gleichmäßig in einer vollen Umgebung des Randpunktes a; damit ist der Beweis fertig.

Durch leichte Abänderungen der vorstehenden Überlegungen ergibt sich endlich der *spezielle Ostrowskische Überkonvergenzsatz für Dirichletsche Reihen:*

4. Satz: *Die Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots;\ \lambda_n \to \infty)$$

mit der endlichen Konvergenzabszisse ϱ weise eine unendliche Folge von Lücken

$$(\lambda_{\mu_1}, \lambda_{\nu_1}),\ (\lambda_{\mu_2}, \lambda_{\nu_2}),\ \ldots,\ (\lambda_{\mu_\tau}, \lambda_{\nu_\tau}),\ \ldots$$

auf, deren Relativbreiten

$$\vartheta_\tau = \frac{\lambda_{\nu_\tau} - \lambda_{\mu_\tau}}{\lambda_{\mu_\tau}} \to \infty$$

streben für $\tau \to \infty$. Setzt man dann

$$f_0(s) = a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \ldots + a_{\mu_1} e^{-\lambda_{\mu_1} s},$$

$$f_\tau(s) = a_{\nu_\tau} e^{-\lambda_{\nu_\tau} s} + a_{\nu_\tau + 1} e^{-\lambda_{\nu_\tau + 1} s} + \ldots + a_{\mu_{\tau+1}} e^{-\lambda_{\mu_{\tau+1}} s} \quad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

so konvergiert die Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(s)$$

im ganzen Regularitätsgebiet von $f(s)$ gegen $f(s)$ und zwar gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes Punktes dieses Gebietes.

Beweis: Wir setzen wieder die Konvergenzabszisse $\varrho = 0$ voraus, was keine Einschränkung bedeutet. Sodann sei a ein Punkt des Regularitätsgebietes von $f(s)$. Die analytische Fortsetzung der Funktion $f(s)$ von einem Punkt s_0 der Konvergenzhalbebene $\Re(s) > 0$ zum Punkt a hin sei möglich durch die Kette der Kreise $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ mit den Mittelpunkten $s_0, s_1, \ldots, s_m$, wobei s_1 in $\mathfrak{K}_0$, s_2 in $\mathfrak{K}_1, \ldots, s_m$ in $\mathfrak{K}_{m-1}$ gelegen ist. Wir wollen die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(s)$$

in einer vollen Umgebung von a beweisen.

Dazu entwickeln wir die Exponentialpolynome $f_\tau(s)$ nach Potenzen von $s - s_0$. Indem wir sogleich wieder eine passende Zerlegung der so entstehenden Potenzreihen vornehmen, setzen wir

$$f_\tau(s) = \varphi_\tau(s) + \psi_\tau(s) + \chi_\tau(s)$$

mit

$$\varphi_\tau(s) = \sum_{0 \leqq \nu \leqq \lambda'_{\nu_\tau}} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0), \quad \psi_\tau(s) = \sum_{\lambda'_{\nu_\tau} < \nu < \lambda'_{\mu_\tau+1}} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0),$$

$$\chi_\tau(s) = \sum_{\lambda'_{\mu_\tau+1} \leqq \nu < \infty} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0),$$

wobei $\lambda'_{\nu_\tau} = (1-\eta')\sigma_0 \lambda_{\nu_\tau}$, $\lambda'_{\mu_\tau} = (1+\eta'')\sigma_0 \lambda_{\mu_\tau}$ mit $\sigma_0 = \Re(s_0)$ sowie positiven Zahlen $\eta' < 1$ und η'', über die wir noch verfügen werden, sein sollen.

Wie beim Beweis des Satzes 3 schätzen wir nun $\varphi_\tau(s)$ ab. Es sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis um s_0 vom Radius $R > \sigma_0$, der die Kette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ im Innern enthält. Wir können dann für die Punkte s aus dem Innern von $\mathfrak{K}$ dem Beweis des Satzes 3 die Abschätzung entnehmen (vgl. (6)):

$$|\varphi_\tau(s)| \leqq C_3 \left[\left(\frac{R}{\sigma_0}\right)^{(1-\eta')\sigma_0} \frac{e^{\varepsilon - \sigma_0 \eta'}}{(1-\eta')^{(1-\eta')\sigma_0}} \right]^{\lambda_{\nu_\tau}} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots).$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer hat einen Wert $q' < 1$, wenn man nur η' hinreichend nahe bei 1 wählt (und natürlich ε genügend klein angenommen denkt), da $\left(\frac{R}{\sigma_0}\right)^{1-\eta'} \to 1$ und $(1-\eta')^{1-\eta'} \cdot e^{\eta'} \to e$ für $\eta' \to 1$ gilt. So denken wir uns η' gewählt und wissen dann die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau(s) = \varphi(s)$$

in $\mathfrak{K}$ und damit auf der Kreiskette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$.

Denken wir uns η'' zunächst so groß gewählt, daß $R < \sigma_0(1+\eta'')$ ist, so können wir weiter dem Beweis des Satzes 3 für die Punkte s aus $\mathfrak{K}$ die Abschätzung entnehmen (vgl. (7)):

$$|\chi_\tau(s)| \leqq C_5 \left[\left(\frac{R}{\sigma_0}\right)^{(1+\eta'')\sigma_0} \frac{e^{\varepsilon + \sigma_0 \eta''}}{(1+\eta'')^{(1+\eta'')\sigma_0}} \right]^{\lambda_{\mu_\tau+1}} \quad (\tau = 1, 2, \ldots).$$

Hier sieht man unmittelbar, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer für hinreichend großes η'' einen Wert $q'' < 1$ besitzt. So denken wir uns η'' gewählt und wissen dann auch die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \chi_\tau(s) = \chi(s)$$

in $\mathfrak{K}$ und damit auf der Kreiskette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$.

Zu behandeln bleibt also nur noch die Reihe $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s)$. Da jeweils $\psi_{\tau-1}(s)$ nur Glieder der Ordnungen $< \lambda'_{\mu_\tau}$, $\psi_\tau(s)$ nur Glieder der Ordnungen $> \lambda'_{\nu_\tau}$ enthält, und wegen der Lückenbedingung $\lambda_{\nu_\tau} = (1 + \vartheta_\tau)\lambda_{\mu_\tau}$ mit $\vartheta_\tau \to \infty$ gewiß von einem Index τ ab $\lambda'_{\nu_\tau} > \lambda'_{\mu_\tau}$ gilt, so folgert man wie beim Beweis des Satzes 3 aus der Regularität von $f(s), \varphi(s), \chi(s)$ in $\mathfrak{R}_0$ zunächst die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s) = \psi(s)$$

für jeden inneren Teil von $\mathfrak{R}_0$. Da aber für $\tau \to \infty$ sogar

$$\frac{\lambda'_{\nu_\tau} - \lambda'_{\mu_\tau}}{\lambda'_{\mu_\tau}} = \frac{(1-\eta')(1+\vartheta_\tau) - (1+\eta'')}{(1+\eta'')} \to \infty$$

gilt, so weist die Entwicklung von $\psi(s)$ nach Potenzen von $(s - s_0)$ zwischen den von den verschiedenen Polynomen $\psi_\tau(s)$ herrührenden Gliedern (von einem gewissen τ ab) Lücken auf, deren Relativbreiten über alle Grenzen wachsen. Nach Satz 2 konvergiert also $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s)$ gleichmäßig in einer Umgebung jedes Punktes des Regularitätsgebietes von $\psi(s) = f(s) - \varphi(s) - \chi(s)$, also jedenfalls in einer Umgebung von a.

Mit $\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau(s)$, $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s)$, $\sum_{\tau=0}^{\infty} \chi_\tau(s)$ konvergiert auch $\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(s)$ gleichmäßig in einer vollen Umgebung des Punktes a; damit ist der Beweis fertig.

(Eingegangen am 13. Oktober 1935.)